

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977

И. В. ГАЙШУН, ХОАНГ ВАН КУАНГ

УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ
ДИСКРЕТНЫХ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Введение. Предлагаемая работа посвящена исследованию вопросов управляемости и наблюдаемости одного класса двухпараметрических дискретных систем (или, как их часто называют, $2D$ -систем). Такие системы находят широкое применение в теории клеточных машин и автоматов, в теории цифровой обработки изображений, при описании некоторых теплофизических процессов и др.

Управляемость и наблюдаемость различных классов $2D$ -систем исследовались в многочисленных работах (см. монографию [1], в которой имеется соответствующая библиография), при этом, как правило, рассматривалась так называемая локальная управляемость. Более общее понятие финитной управляемости (и двойственное ему понятие наблюдаемости в классе финитных функций) изучено в [2]. В настоящей работе исследуем полную наблюдаемость, т. е. условия прохождения решения через произвольную функцию и условия восстановления «полного» начального состояния по известному выходу.

На протяжении всей работы используются следующие обозначения: \mathbf{Z} — множество целых чисел; \mathbf{Z}_+ — часть \mathbf{Z} , состоящая из неотрицательных чисел; \mathbf{C} — поле комплексных чисел; E, V, F — конечномерные нормированные пространства над полем \mathbf{C} ; $\mathcal{F}(E), \mathcal{F}(V)$ и $\mathcal{F}(F)$ — пространства функций $\mathbf{Z} \rightarrow E, \mathbf{Z} \rightarrow V$ и $\mathbf{Z} \rightarrow F$ соответственно; $\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(V)$ и $\mathcal{B}(F)$ — пространства ограниченных функций $\mathbf{Z} \rightarrow E, \mathbf{Z} \rightarrow V$ и $\mathbf{Z} \rightarrow F$.

2. Критерии управляемости. Пусть A и D — линейные операторы $E \rightarrow E, B$ — линейное отображение $V \rightarrow E$. Рассмотрим уравнение

$$x(t+1, s) = Ax(t, s+1) + Dx(t, s) + Bu(t, s), \quad (1)$$

в котором $x(t, s)$ — неизвестная E -значная функция, заданная на $\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}$; $u(t, s)$ — V -значная управляющая функция. Очевидно, для любого фиксированного управления $u(t, s)$ и любого отображения $\alpha \in \mathcal{F}(E)$ существует единственное решение $x(t, s, u, \alpha)$ уравнения (1), подчиняющееся начальному условию

$$x(0, s, u, \alpha) = \alpha(s) \quad (s \in \mathbf{Z}).$$

Пусть $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{F}(V), \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{F}(E)$ — векторные подпространства. Управление $u(t, s)$ назовем \mathcal{H}_1 -допустимым, если при любом фиксированном t отображение $s \rightarrow u(t, s)$ принадлежит \mathcal{H}_1 .

Определение 1. Будем говорить, что уравнение (1) $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ -управляемо, если существует такое целое число $N \geq 0$, что для любой пары функций $\alpha(s), \beta(s)$ из \mathcal{H}_2 найдется \mathcal{H}_1 -допустимое управление $u_{\alpha, \beta}(t, s)$, обеспечивающее равенство

$$x(N, s, u_{\alpha, \beta}, \alpha) = \beta(s) \quad (2)$$

при всех $s \in \mathbf{Z}$.

Дальше исследуются два случая $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ -управляемости: 1) $\mathcal{H}_1 = \mathcal{F}(V)$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{F}(E)$ (здесь мы говорим о полной управляемости); 2) $\mathcal{H}_1 = \mathcal{B}(V)$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{B}(E)$ (здесь мы говорим о полной управляемости в классе ограниченных функций).

При доказательстве условий управляемости существенную роль играет оператор $Q: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(E)$, задаваемый равенством

$$(Q\varphi)(s) = T_0\varphi(s) + T_1\varphi(s+1) + \dots + T_N\varphi(s+N), \quad (3)$$

где N — неотрицательное целое число; T_i — линейные отображения V в E . Поскольку для каждой функции $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ элемент $Q\varphi$ принадлежит $\mathcal{B}(E)$, то соотношение (3) определяет также линейный оператор $\mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}(E)$, который будем обозначать Q_1 .

Л е м м а 1. А) *Отображение Q сюръективно тогда и только тогда, когда*

$$\text{rank}\{T_0 + mT_1 + \dots + m^N T_N\} = \dim E \quad (4)$$

хотя бы при одном $m \in \mathbb{C}$;

В) *отображение Q_1 сюръективно тогда и только тогда, когда равенство (4) выполняется при всех $m \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $|m|=1$.*

Доказательство. **Достаточность.** Пусть сначала $\dim E = \dim V = 1$, т. е. пусть T_i — комплексные числа, причем без ограничения общности $T_0 = 1$. Возьмем произвольную функцию $\psi \in \mathcal{F}(E)$ и рассмотрим уравнение

$$(Q\varphi)(s) = \psi(s). \quad (5)$$

Положим

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -T_N & -T_{N-1} & -T_{N-2} & \dots & -T_1 \end{pmatrix}, v(s) = \begin{pmatrix} \varphi(s+N-1) \\ \varphi(s+N-2) \\ \vdots \\ \varphi(s) \end{pmatrix}, \gamma(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \psi(s) \end{pmatrix}.$$

В силу (3) равенство (5) эквивалентно соотношению

$$v(s) = Tv(s+1) + \gamma(s). \quad (6)$$

Выберем в \mathbb{C}^N такой базис, в котором оператор T имеет жорданову форму $\text{diag}\{J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_d)\}$. Тогда уравнение (6) представимо в виде системы независимых уравнений

$$\omega_j(s) = J(\lambda_j)\omega_j(s+1) + \delta_j(s). \quad (7)$$

Так как уравнение (7), очевидно, разрешимо при любой функции $\delta_j(s)$, то разрешимо и уравнение (5), т. е. оператор Q сюръективен.

Установим сюръективность отображения Q_1 . Из условия (4) вытекает, что $T_0 + mT_1 + \dots + m^N T_N \neq 0$ при всех $|m|=1$. Поэтому матрица T , характеристический многочлен которой равен $T_0\lambda^N + T_1\lambda^{N-1} + \dots + T_N$, не имеет собственных чисел единичного модуля. Тогда при любой ограниченной функции $\delta_j(s)$ уравнение (7) имеет ограниченное решение $\omega_j^0(s)$:

$$\omega_j^0(s) = \sum_{i=0}^{\infty} J(\lambda_j)^i \delta_j(s+i) \quad \text{при} \quad |\lambda_j| < 1,$$

$$\omega_j^0(s) = - \sum_{i=1}^{\infty} J(\lambda_j)^{-i} \delta_j(s-i) \quad \text{при} \quad |\lambda_j| > 1.$$

Следовательно, ограниченными решениями обладают и уравнения (5), (6), а это и означает сюръективность оператора Q_1 .

Пусть теперь пространства E и V имеют произвольные размерности n и r . Выберем в этих пространствах некоторые базисы \mathfrak{B}_E и \mathfrak{B}_V ; тогда в (3) T_i можно рассматривать как матрицы над полем \mathbb{C} . Составим полиномиальную матрицу

$$P(m) = T_0 + mT_1 + \dots + m^N T_N \quad (m \in \mathbb{C})$$

и преобразуем уравнение (5) следующим образом:

1) введем новую неизвестную функцию φ' по формуле

$$\varphi = H_1^{i,j} \varphi',$$

где оператор $H_1^{i,j}: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ действует по правилу:

$$\varphi_1(s) = \varphi'_1(s), \dots, \varphi_{i-1}(s) = \varphi'_{i-1}(s),$$

$$\varphi_i(s) = \varphi'_i(s) + b_0 \varphi'_j(s) + b_1 \varphi'_j(s+1) + \dots + b_q \varphi'_j(s+q),$$

$$\varphi_{i+1}(s) = \varphi'_{i+1}(s), \dots, \varphi_r(s) = \varphi'_r(s)$$

($\varphi_i(s)$, $\varphi'_i(s)$ — координаты векторов $\varphi(s)$ и $\varphi'(s)$ в базисе \mathfrak{B}_V);

2) применим к правой и левой частям оператор $H_2^{\xi,\eta}: \mathcal{F}(E) \rightarrow \mathcal{F}(E)$, для которого $(H_2^{\xi,\eta}\psi)(s) = \psi'(s)$, причем

$$\psi'_1(s) = \psi_1(s), \dots, \psi'_{\xi-1}(s) = \psi_{\xi-1}(s),$$

$$\psi'_\xi(s) = \psi_\xi(s) + c_0 \psi_\eta(s) + c_1 \psi_\eta(s+1) + \dots + c_l \psi_\eta(s+l),$$

$$\psi'_{\xi+1}(s) = \psi_{\xi+1}(s), \dots, \psi'_n(s) = \psi_n(s).$$

Легко убедиться, что с помощью указанных операций приходим к уравнению, эквивалентному исходному, при этом матрица $P(m)$ изменяется следующим образом: 1) к j -й строке прибавляется i -я, умноженная на многочлен $b_0 + b_1 m + \dots + b_q m^q$; 2) к ξ -му столбцу прибавляется η -й, умноженный на полином $c_0 + c_1 m + \dots + c_l m^l$. Как известно [3], конечным числом указанных преобразований можно прийти к уравнению

$$(H_2^{i,j} \dots H_2^{i,j} Q H_1^{\xi,\eta} \dots H_1^{\xi,\eta} \varphi'')(s) = \psi''(s), \quad (8)$$

эквивалентному (5), матрица $P(m)$ которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} p_1(m) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(m) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & p_h(m) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $p_i(m)$ — ненулевые многочлены, причем в силу (4) $h=n$. Однако уравнение (8) с матрицей $P(m)$ вида (9) состоит из конечного числа скалярных уравнений, что позволяет применить использованные выше рассуждения и тем самым установить достаточность леммы для пространств E и V произвольной размерности.

Необходимость. Совершая, если потребуется, такие же преобразования, что и при доказательстве достаточности, без ограничения общности можем считать, что матрица $P(m)$ имеет вид (9). Так как оператор Q сюръективен, то уравнение (5) разрешимо при любой функции $\psi \in \mathcal{F}(E)$; поэтому обязательно $h=n$ и существует такая точка $m_0 \in \mathbb{C}$, что $p_1(m_0) \dots p_n(m_0) \neq 0$. Следовательно, $\text{rank } P(m_0) = n$, т. е. условие (4) выполняется при $m = m_0$.

Пусть сюръективным является оператор Q_1 . В силу (9) уравнение (5) представляет собой систему n скалярных уравнений

$$(Q_j \varphi_j)(s) = a_0^j \varphi_j(s) + a_1^j \varphi_j(s+1) + \dots + a_k^j \varphi_j(s+k_j) = \psi_j(s) \\ (j=1, \dots, n; a_i^j = \frac{1}{i!} \frac{d^i p_j(0)}{dm^i}), \quad (10)$$

каждое из которых имеет ограниченное решение при любой ограниченной правой части $\psi_j(s)$.

Если предположить существование такого $m_0 \in \mathbb{C}$, $|m_0|=1$, что $p_j(m_0)=0$ при $j=j_0$, то $p_j(m) = (m-m_0)(b_0^j + b_1^j m + \dots + b_{k_j-1}^j m^{k_j-1})$, и поэтому, как легко проверить, равенство (10) (при $j=j_0$) может быть записано в виде

$$b_0^j \varphi_j(s+1) + b_1^j \varphi_j(s+2) + \dots + b_{k_j-1}^j \varphi_j(s+k_j) - \\ - m_0 [b_0^j \varphi_j(s) + b_1^j \varphi_j(s+1) + \dots + b_{k_j-1}^j \varphi_j(s+k_j-1)] = \psi_j(s).$$

Полагая $\varepsilon_j(s) = b_0^j \varphi_j(s) + b_1^j \varphi_j(s+1) + \dots + b_{k_j-1}^j \varphi_j(s+k_j-1)$, получим уравнение

$$\varepsilon_j(s+1) - m_0 \varepsilon_j(s) = \psi_j(s),$$

которое не имеет ограниченных решений при $\psi_j(s) = m_0^s$. Значит, ограниченных решений не имеет и уравнение $(Q_{j_0} \varphi_{j_0})(s) = m_0^s$.

Таким образом, равенство $p_{j_0}(m_0)=0$ противоречит сюръективности оператора Q_1 . Следовательно, $p_j(m) \neq 0$ при $|m|=1$, $j=1, 2, \dots, n$, и поэтому соотношение (4) выполняется для всех комплексных чисел m единичного модуля. Лемма доказана.

Теорема 1. Уравнение (1) вполне управляемо тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \{B, (A+mD)B, \dots, (A+mD)^{n-1}B\} = n \quad (n = \dim E) \quad (11)$$

хотя бы при одном $m \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Введем в рассмотрение операторы $Y_i^j: V \rightarrow E$, исходя из равенства

$$(A+mD)^j B = \sum_{i=0}^j Y_i^j m^i \quad (m \in \mathbb{C}). \quad (12)$$

Тогда, согласно [2], выполнимость соотношения (2) равносильна разрешимости относительно $u(t, s)$ системы уравнений

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^j Y_i^j u(N-1-j, s+i) = \beta(s) \quad (13)$$

при любом $\beta \in \mathcal{F}(E)$. Полагая

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} u(0, s) \\ u(1, s) \\ \vdots \\ u(N-1, s) \end{pmatrix}, \quad T_i = (0, \dots, 0, Y_i^0, Y_i^1, \dots, Y_i^{N-1}): V^N \rightarrow E,$$

систему (13) можно записать в виде

$$T_0 \varphi(s) + T_1 \varphi(s+1) + \dots + T_{N-1} \varphi(s+N-1) = \beta(s). \quad (14)$$

По лемме 1 (в которой следует заменить V на V^N) уравнение (14) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \{T_0 + mT_1 + \dots + m^{N-1}T_{N-1}\} = n \quad (15)$$

при некотором $m = m_0$. Но в силу (12) равенство (15) влечет за собой условие

$$\text{rank}\{B, (A + mD)B, \dots, (A + mD)^{N-1}B\} = n,$$

которое совпадает с (11) при $m = m_0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Уравнение (1) вполне управляемо в классе ограниченных функций тогда и только тогда, когда выполняется равенство (11) при всех $m \in \mathbb{C}$, $|m| = 1$.

Доказательство использует вторую часть леммы 1 и полностью аналогично доказательству теоремы 1.

3. Условия наблюдаемости. Предположим, что в уравнении (1) управление $u(t, s)$ фиксировано; без ограничения общности его можно считать нулевым и, значит, рассматривать уравнение

$$x(t+1, s) = Ax(t, s+1) + Dx(t, s). \quad (16)$$

Пусть задана выходная функция

$$y(t, s) = Cx(t, s), \quad (17)$$

где $C: E \rightarrow F$ — известное линейное отображение.

Определение 2. Уравнение (16) называется \mathcal{H}_2 -наблюдаемым по выходу (17), если существует такое целое число $N \geq 0$, что для любых различных начальных функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ из \mathcal{H}_2 соответствующие выходные функции $y_\alpha(t, s) = Cx(t, s, \alpha)$, $y_\beta(t, s) = Cx(t, s, \beta)$ различны на множестве $\{(t, s) | 0 \leq t \leq N\}$.

Ниже рассматриваются два случая \mathcal{H}_2 -наблюдаемости: 1) полная наблюдаемость ($\mathcal{H}_2 = \mathcal{F}(E)$); 2) полная наблюдаемость в классе ограниченных функций ($\mathcal{H}_2 = \mathcal{B}(E)$).

Как и в случае управления, свойство наблюдаемости тесно связано с операторами Q , Q_1 , определенными формулой (8).

Лемма 2. А) Оператор Q инъективен тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}\{T_0 + mT_1 + \dots + m^N T_N\} = r \quad (r = \dim V) \quad (18)$$

для всех ненулевых $m \in \mathbb{C}$;

В) отображение Q_1 инъективно тогда и только тогда, когда равенство (18) выполняется для всех $m \in \mathbb{C}$, $|m| = 1$.

Доказательство. Пусть сначала $\dim E = \dim V = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $T_0 = 1$. Рассмотрим уравнение

$$(Q\varphi)(s) = 0. \quad (19)$$

Так же, как и при доказательстве леммы 1, перейдем к уравнению $v(s) = Tv(s+1)$, которое в силу (7) можно представить в виде системы независимых уравнений

$$w_j(s) = J(\lambda_j)w_j(s+1). \quad (20)$$

Легко видеть, что уравнение (20) имеет только нулевое решение в классе произвольных функций тогда и только тогда, когда $\lambda_j = 0$. Значит, уравнение (19) имеет лишь нулевое решение в том и только в том случае, если спектр матрицы T состоит только из нулевого элемента, т. е. если $T_0 m^N + T_1 m^{N-1} + \dots + T_N \neq 0$ при $m \neq 0$. А это и доказывает первую часть леммы.

Установим утверждение В). Так как уравнение (20) имеет единственное нулевое решение в классе ограниченных функций тогда и только тогда, когда $|\lambda_j| \neq 1$, то уравнение (19) имеет единственное нулевое решение в том же классе тогда и только тогда, когда матрица T не имеет собственных чисел на единичной окружности, т. е. когда $T_0 + mT_1 + \dots + m^N T_N \neq 0$ при $|m| = 1$. Тем самым доказана и вторая часть леммы.

Таким образом, лемма 2 установлена при $\dim E = \dim V = 1$. Для случая произвольных размерностей она доказывается так же, как и лемма 1, путем перехода к канонической форме (9) матрицы $P(m)$.

Обозначим через A', D' и C' операторы, сопряженные отображениям A, D и C соответственно.

Теорема 3. Уравнение (16) вполне наблюдаемо по выходу (17) тогда и только тогда, когда

$$\text{rang}\{C', (A' + mD')C', \dots, (A' + mD')^{n-1}C'\} = n \quad (21)$$

при всех ненулевых $m \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Очевидно, что уравнение (16) вполне наблюдаемо тогда и только тогда, когда равенству

$$Cx(t, s, \alpha) = 0 \quad (0 \leq t \leq N) \quad (22)$$

удовлетворяет только нулевая функция $\alpha(s) \equiv 0$. Определим операторы $\hat{Y}_i^j: E \rightarrow E$, полагая

$$(A + mD)^j = \sum_{i=0}^j \hat{Y}_i^j m^i \quad (m \in \mathbb{C}).$$

Тогда в силу результатов работы [2] соотношение (22) может быть записано в виде системы

$$C \sum_{i=0}^j \hat{Y}_i^j \alpha(s+i) = 0 \quad (0 \leq j \leq N),$$

которая после введения обозначений

$$T_i = \begin{pmatrix} C\hat{Y}_i^N \\ C\hat{Y}_i^{N-1} \\ \vdots \\ C\hat{Y}_i^i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : E \rightarrow F^N \quad (i=0, 1, \dots, N)$$

допускает представление

$$T_0\alpha(s) + T_1\alpha(s+1) + \dots + T_N\alpha(s+N) = 0.$$

Так как простые вычисления показывают, что

$$T_0 + mT_1 + \dots + m^N T_N = \begin{pmatrix} C(A+mD)^N \\ C(A+mD)^{N-1} \\ \vdots \\ C \end{pmatrix},$$

то доказательство теоремы завершается ссылкой на лемму 2 (в которой следует заменить V на E и E на F^N).

Теорема 4. Уравнение (16) вполне наблюдаемо в классе ограниченных функций по выходу (17) тогда и только тогда, когда равенство (21) выполняется для всех комплексных чисел единичного модуля.

Доказательство основано на лемме 2 и проводится так же, как и доказательство теоремы 3.

З а м е ч а н и е. Сравнивая теоремы 2 и 4, легко усмотреть, что полная управляемость в классе ограниченных функций и полная наблюдаемость в классе таких же функций являются двойственными понятиями. Однако теоремы 1 и 3 показывают, что полная управляемость и полная наблюдаемость в двойственности не находятся.

4. Общая система (коммутативный случай). Уравнение (1) является частным случаем двухпараметрической системы

$$A_1x(t+1, s) + A_2x(t, s+1) + A_3x(t, s) = Bu(t, s), \quad (23)$$

у которой A_i — линейные отображения E в E , а остальные параметры имеют прежний смысл. Система (23) представляет собой достаточно общий объект, включающий, как частный случай, наиболее известные типы $2D$ -систем. Однако без дополнительных предположений высказать какие-либо конструктивные факты об уравнении (23) представляется довольно затруднительным.

Одно из таких предположений, использованное в [4], заключается в требовании попарной коммутативности операторов A_i . Как установлено в [4], в этом случае уравнение (23) допускает представление в виде системы трех независимых уравнений, два из которых имеют такой же вид, что и (1), а третье при любом фиксированном управлении имеет единственное решение. Эти факты позволяют естественным образом распространить понятия полной управляемости и полной наблюдаемости на систему (1) и без труда получить эффективные критерии существования указанных свойств.

Литература

1. Касцогек Т. Two-Dimensional Linear Systems. Berlin, 1985.
2. Гайшун И. В., Горячкин В. В. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1989. № 4. С. 3—8.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1989.
4. Гайшун И. В., Горячкин В. В. // Дифференц. уравнения. 1988. Т.24, № 12. С. 2047—2051.

Институт математики
АН БССР

Поступила в редакцию
26 декабря 1989 г.

УДК 517.926.7

С. А. МАЗАНИК

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим линейное матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где элементы $n \times n$ -матрицы A являются интегрируемыми и ограниченными на $[0, +\infty[$ комплекснозначными функциями. Пусть решение X уравнения (1) удовлетворяет начальному условию

$$X(0) = \exp C, \quad (2)$$

где C — некоторая постоянная матрица.

Известно (см., например, [1, с. 117]), что если для всех $t \geq 0$ выполняется условие

$$A(t)B(t) = B(t)A(t), \quad (3)$$

где

$$B(t) = C + \int_0^t A(\tau) d\tau,$$

то решение матричного уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2), представимо в виде

$$X(t) = \exp B(t). \quad (4)$$

Решение обратной задачи, т. е. при каких условиях из выполнения соотношения (4) следует (3), почти полностью содержится в работе [2].