Е. П. Голубева, О. М. Фоменко, Замечание об асимптотическом распределении целых точек на большой трехмерной сфере,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1990, том 185, 22–28

Е.П.Голубева, О.М.Фоменко

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА БОЛЬШОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

0. Основная цель настоящей статьи - показать, что оценки коэффициентов Фурье модулярных форм полуцелого веса, равномерные по номеру коэффициента n и весу k, можно получать в различных формах в зависимости от соотношения между величинами n и k.

При этом оказывается, что для приложений иногда при больших k лучше иметь более слабую оценку по n, но более сильную по весу. Это демонстрируется на примере задачи о распределении целых точек на большой трехмерной сфере $Сф_3$, в которой здесь получено продвижение по сравнению с первым нашим результатом на эту тему [I] и результатом работы [2]. (Разумеется, то же самое относится к произвольной тернарной квадратичной форме.) В [2] используется формула суммирования [3], приводящая к оценке по n такой же, как в работах Иванца [4] и Дьюка [5], т.е., по-видимому, предельной для этого метода, но сравнительно слабой по весу. Заметим, что [I], [2] и настоящая работа базируются на основном результате Иванца [4] и лемме 3 [I], в которой строится аналог "стаканчика Виноградова" по сферическим функциям. Заметим также, что в рассматриваемой задаче можно получить и дальнейшие усиления. Например, можно использовать при малых весах оценку работы [2], а при больших - оценку настоящей работы; кроме того, более изощренное применение бесселевых функций также может привести к уточнению доказываемых нами фактов. К сожалению, все эти результаты будут далеки от ожидаемых.

Настоящую статью мы посвящаем семидесятипятилетию со дня рождения академика Ю.В.Линника, работа которого [6] является фундаментальным (и длительное время была единственным) вкладом в рассматриваемую здесь задачу о распределении целых точек на $Сф_3$.

I. Сформулируем теперь полученный нами результат. Пусть $Q(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $X = (x_1, x_2, x_3)$; $r(n)$ - количество целочисленных решений уравнения

$$Q(X) = n \ . \tag{I}$$

ТЕОРЕМА. Пусть $n \equiv 1,2,3,5,6 \pmod 8$ и $r(n, \Omega)$ - количество решений уравнения (I) таких, что $Y = X|\sqrt{n} \in \Omega$, где Ω - произвольная выпуклая область с кусочно-гладкой границей на единичной сфере $S : Q(Y) = 1$. Тогда

$$\tau(n,\Omega) = \mu(\Omega)\,\tau(n) + O\left(n^{\frac{1}{2}-\gamma+\varepsilon}\right),$$

где

$$\frac{1}{113} < \gamma = \frac{7}{785} < \frac{1}{112},$$

$\mu(\Omega)$ - мера, пропорциональная объему конуса с центром в O и основанием Ω, нормированная условием $\mu(S)=1$, $\varepsilon>0$ - фиксированное сколь угодно малое положительное число, $O=O_\varepsilon$.

2. В настоящем пункте будет получена равномерная (по весу k) оценка коэффициентов Фурье параболических форм полуцелого веса.

Пусть $k=\frac{1}{2}+\ell$, где $\ell\geqslant 2$ - целое число, $N\equiv 0 \pmod 4$ и $\Gamma_0(N)$ - хорошо известная конгруэнц-подгруппа. Линейное пространство $S_k(\Gamma)$ параболических форм $f(z)$ веса k относительно $\Gamma=\Gamma_0(N)$ является конечномерным гильбертовым пространством с внутренним произведением (f,g). Пусть

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)\; e(nz)$$

- разложение Фурье функции f. Выберем ортонормированный базис $\{f_j(z)\}_{j=1}^{J}$ пространства $S_k(\Gamma)$, $\Gamma=\Gamma_0(N)$, где $J=\dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma)$; $(f_i,f_j)=0$, если $i\neq j$; $(f_j\, f_j)=1$.

В лемме I мы получим для случая ортонормированного базиса $\{f_j(z)\}_{j=1}^{J}$ и бесквадратных n равномерную по весу k оценку $\hat{f}_j(n)$.

ЛЕММА I. Пусть $k=\frac{1}{2}+\ell$ ($\ell\geqslant 2$ - целое), $j=1,\dots,J$; тогда для бесквадратных n

$$\hat{f}_j(n) \ll \frac{(4\pi)^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\Gamma(k-1)}}\left\{k^{\frac{3}{16}}\, n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{40}+\varepsilon} + k^{\frac{85}{32}}\, n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-\frac{7}{160}+\varepsilon}\right\},$$

причем $\ll$- константа зависит лишь от N и ε, где ε - фиксированное сколь угодно малое положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в работе [4],

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi n)^{k-1}} \sum_{j=1}^{J} \left|\hat{f}_j(n)\right|^2 \ll$$

$$\ll P + \sum_{Q_0 \in \mathbb{Q}_0} \Big| \sum_{c \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, Q_0)} c^{-1} K(n,n;c)\, J_{k-1}\left(\frac{4\pi n}{c}\right) \Big| \log P,$$

где $\ll$ – константа является абсолютной; $\mathbb{Q}_0 = \{\, pN \;;\; P < p \leq 2P,\ p \nmid 2n \}$, где p означает простое число; $K(m,n;c)$ – обобщенная сумма Клостермана (сумма Салье):

$$K(m,n;c) = \sum_{d \,(\mathrm{mod}\, c)} \varepsilon_d^{-2k} \left(\frac{c}{d}\right) e\left(\frac{m\bar{d}+nd}{c}\right),$$

где

$$\varepsilon_d = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad d \equiv 1 \pmod 4, \\ i, & \text{если} \quad d \equiv -1 \pmod 4), \end{cases}$$

и $\left(\frac{c}{d}\right)$ – обобщенный символ Кронекера; $J_{k-1}(\quad)$ – бесселева функция порядка $k-1$. Пусть

$$K_{Q_0}(x) = \sum_{\substack{c \leq x \\ c \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, Q_0)}} c^{-\frac{1}{2}} K(n,n;c)\, e\left(\frac{2\nu n}{c}\right),$$

где $-1 \leq \nu \leq 1$ и $Q_0 \equiv 0 \pmod 8$. Иванец [4] доказал следующую замечательную оценку: для бесквадратного n и $N \equiv 0 \pmod 8$ имеем

$$\sum_{Q_0 \in \mathbb{Q}_0} \left| K_{Q_0}(x) \right| \ll \tag{2}$$

$$\ll \left[xP^{-\frac{1}{2}} + xn^{-\frac{1}{2}} + (x+n)^{\frac{5}{8}} \left(x^{\frac{1}{4}} P^{\frac{3}{8}} + n^{\frac{1}{8}} x^{\frac{1}{8}} P^{\frac{1}{4}} \right) \right] \tau(n) (\log nx)^2,$$

где $\ll$ – константа является абсолютной.

Пусть ниже $X = n^{13/14} P^{3/14}$, $P = n^{1/10} k^{7/2}$. Для доказательства леммы I разобъем суммирование по c в

$$\sum = \sum_{Q_0 \in \mathbb{Q}_0} \Bigl| \sum_{c \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, Q_0)} c^{-1} K(n,n;c) J_{k-1}\Bigl(\frac{4\pi n}{c}\Bigr) \Bigr|$$

на три части (а не на две, как в [I]):

I) $c \leqslant X$; 2) $X < c \leqslant 4\pi n/k^2$; 3) $4\pi n/k^2 < c$.

Тогда

$$\sum \leqslant \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 ,$$

где

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{Q_0 \in \mathbb{Q}_0} \Bigl| \sum_{\substack{c \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, Q_0) \\ c \leqslant X}} c^{-1} K(n,n;c) J_{k-1}\Bigl(\frac{4\pi n}{c}\Bigr) \Bigr| ,$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{Q_0 \in \mathbb{Q}_0} \Bigl| \sum_{\substack{c \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, Q_0) \\ X < c \leqslant 4\pi n/k^2}} c^{-1} K(n,n;c) J_{k-1}\Bigl(\frac{4\pi n}{c}\Bigr) \Bigr| ,$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{Q_0 \in \mathbb{Q}_0} \Bigl| \sum_{\substack{c \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, Q_0) \\ c > 4\pi n/k^2}} c^{-1} K(n,n;c) J_{k-1}\Bigl(\frac{4\pi n}{c}\Bigr) \Bigr| .$$

Сумму $\sum_1$ оцениваем с помощью классической оценки

$$|K(n,n;c)| \leqslant (n,c)^{1/2} c^{1/2} \tau(c)$$

и оценки, показанной в [I]:

$$J_{k-1}(z) \ll \frac{1}{\sqrt{z}} \qquad \text{при} \quad z \geqslant k^2 , \qquad (3)$$

где $\ll$- константа является абсолютной.

Переходим к $\sum_2$. Мы пользуемся оценкой Иванца (2) и при суммировании по частям оценкой

$$J_{k-1}\left(4\pi\frac{n}{c}\right) - J_{k-1}\left(4\pi\frac{n}{c+Q_0}\right) \ll$$

$$\ll J'_{k-1}(z)\,\frac{nQ_0}{c(c+Q_0)} \ll \sqrt{\frac{c}{n}}\,\frac{nP}{c^2},$$

где $\frac{4\pi n}{c} \geqslant z \geqslant \frac{4\pi n}{c+Q_0}$;

$$J'_{k-1}(z) \ll \frac{1}{\sqrt{z}}, \tag{4}$$

если $z \geqslant k^2$; при этом все $\ll$- константы от k не зависят. (4) доказывается на основе тех же соображений, что и (3).

Остается рассмотреть $\sum_3$. Мы пользуемся оценкой Иванца (2); для разности бесселевых функций получена следующая оценка:

$$J_{k-1}\left(4\pi\frac{n}{c}\right) - J_{k-1}\left(4\pi\frac{n}{c+Q_0}\right) \ll \frac{n^{5/2}Q_0}{k^{3/2}c^{7/2}},$$

где $\ll$- константа абсолютная. Улучшение по k сравнительно с аналогичной оценкой на стр. 60 [I] стало возможным за счет замены используемого в [I] равенства

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|C_n^{3/2}(x)\right| = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

равенством

$$\int_{-1}^{1}\left(C_n^{\frac{3}{2}}(x)\right)^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\pi\cdot 2^{-2}\,\Gamma(n+3)}{n!\,(\frac{3}{2}+n)\left(\Gamma(\frac{3}{2})\right)^2};$$

здесь $C_n^{3/2}(x)$ - многочлен Гегенбауэра; см. [7], p.221.

После некоторых выкладок мы приходим к неравенству

$$\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3 \ll_{\varepsilon,N} k^{\frac{3}{8}} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{20}+\varepsilon}+k^{\frac{85}{16}} n^{\frac{1}{2}-\frac{7}{80}+\varepsilon}.$$

Лемма I доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $k=\frac{1}{2}+\ell$ ($\ell \geqslant 2$ - целое). Представим n в виде $n=tn_0^2$, где t бесквадратно. Пусть $f(z)\in S_k(\Gamma)$. Тогда для любого n с условием $(n_0,N)=1$ имеем

$$\hat{f}(n)\ll$$

$$\ll\frac{(4\pi)^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\Gamma(k-1)}}\left\{k^{\frac{3}{16}} n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{40}+\varepsilon}+k^{\frac{85}{32}} n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-\frac{7}{160}+\varepsilon}\right\}(f,f)^{1/2},$$

причем $\ll$ - константа зависит лишь от N и ε, где ε - фиксированное сколь угодно малое положительное число.

Лемма 2 выводится из леммы I с помощью подъема Шимуры [8], примененного к элементам ортонормированного базиса $\{f_j(z)\}_{j=1}^{J}$, состоящего из собственных функций всех $T(p^2)$-операторов Гекке, $p\nmid N$.

Доказательство теоремы проводится по схеме, изложенной в [I], с применением леммы 2.

Литература

I. Голубева Е.П., Фоменко О.М. Асимптотическое распределение целых точек на трехмерной сфере. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций.8. Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1987, т.160, с.54-71.

2. Duke W., Schulze-Pillot R. Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids. - Invent.math., 1990, vol.99, N 1, p.49-57.

3. Проскурин Н.В. Об общих суммах Клостермана. - Препринт ЛОМИ Р-3-80, Л., 1980. 36 с.

4. Iwaniec H. Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight. - Invent.math., 1987, vol.87, N 2, p.385-401.

5. Duke W. Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms. - Invent.math., 1988, vol.92, N 1,

p.73-90.

6. Л и н н и к Ю.В. Асимптотико-геометрические и эргодические свойства множества целых точек на сфере. - Мат.сб., 1957, т.43, № 2, с.257-276. (Перепечатано в кн.: Линник Ю.В. Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и L-функции. Л., 1979, с.209-228).
7. M a g n u s W., O b e r h e t t i n g e r F., S o n i R.P. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Berlin etc., 1966. 508 p.
8. S h i m u r a G. On modular forms of half integral weight. - Ann.Math., 1973, vol.97, N 3, p.440-481.