a_k на 9, а a_{1002-k} – на 8. При этом $A - Z$ не увеличится, а Z не уменьшится. Заменим все цифры $a_{k+1},\ldots,a_{500}$ на нули, а $a_{502},\ldots,a_{1000-k}$ – на девятки. Тогда $A - Z$ не увеличится, а Z если и уменьшится, то на меньшую величину (это произойдет только тогда, когда вторая половина и так была девятками!). Поскольку в оптимальном примере $A - Z < Z$ (в первом просто меньше цифр), то ясно, что $\frac{A-Z}{Z}$ не возрастет. Итак, можно считать, что A имеет вид

$$\underbrace{99\ldots9}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{500-k}9\underbrace{99\ldots9}_{500-k}8\underbrace{99\ldots9}_{k-1}.$$

В этом случае

$$A - Z = 10^{501} + 10^{500} - 10^k - 10^{k-1}.$$

Это выражение достигает минимума при $k = 500$, и при этом же k достигается максимум значения рассматриваемых Z. Значит, это и есть ответ.

5. Да, можно.

Решение 1. Возьмем в горизонтальной плоскости α правильный треугольник с высотой 2. Пусть J — центр одной из его вневписанных окружностей, а A, B, C — середины его сторон. Выберем такие сферы: три радиуса 1 с центрами в A, B, C; две радиуса 2 с центрами в точках J' и J'', получающихся из J поднятием и опусканием относительно α на 1.

Теперь проведем требуемые плоскости. Плоскость через J', параллельная α, касается четырех остальных сфер; для J'' – аналогично. Осталось провести плоскость, скажем, через A; она перпендикулярна α и содержит сторону треугольника, на которой лежит A. Все проверки достаточно просты.

Решение 2. Центр сферы S_0 поместим в точке A_0 с координатами $(0;0;0)$, радиус r этой сферы выберем позже. Остальные сферы S_i, $i = 1,2,3,4$, возьмем радиуса 1, а центры этих сфер поместим в точки $A_1(a;0;1)$, $A_2(-a;0;1)$, $A_3(0;a;-1)$, $A_4(0;-a;-1)$ (a выберем позже).

Плоскость Oxy проходит через A_0 и касается сфер S_i, $i = 1,2,3,4$. Можно подобрать α так, чтобы плоскость $A_2A_3A_4$ находилась на расстоянии $\rho_1 = 1$ от точки A_1, тогда плоскость σ_1, проходящая через A_1 и параллельная плоскости $A_2A_3A_4$, будет касаться сфер S_i, $i = 2,3,4$. Действительно, уравнение плоскости $A_2A_3A_4$: $2x + az + a = 0$. Тогда $\rho_1 = \frac{4a}{\sqrt{4+a^2}}$ и достаточно положить $a = \sqrt{\frac{4}{15}}$. Положим r равным расстоянию от A_0 до плоскости σ_1 так, чтобы плоскость σ_1 касалась также и сферы S_0. Конструкция переводится в себя при симметрии относительно плоскостей Oxz, Oyz, а также при композиции поворота на 90° вокруг оси Oz и симметрии относительно плоскости Oxy. Поэтому условие задачи выполняется также для центров сфер S_i, $i = 2, 3, 4$.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ НАШЕГО ЖУРНАЛА!

Посылая в редакцию журнала «Квант» статью, просим вас сообщать о себе, кроме фамилии, имени и отчества, также место работы, занимаемую должность и электронный адрес (e-mail).

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел. моб.: 8 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Телефон: +7 495 363-48-86,
htpp: //capitalpress.ru