A. Yu. Trynin, E. D. Kireeva, The principle of localization at the class of functions integrable in the Riemann for the processes of Lagrange–Sturm–Liouville, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2020, Volume 20, Issue 1, 51–63

DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-1-51-63

УДК 517.518.8

Принцип локализации на классе функций, интегрируемых по Риману, для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля

А. Ю. Трынин, Е. Д. Киреева

Трынин Александр Юрьевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, tayu@rambler.ru

Киреева Екатерина Дмитриевна, студентка механико-математического факультета, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, ekateriha98@mail.ru

Будем говорить, что для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля $L_n^{SL}(f,x)$ на классе функций F в точке $x_0 \in [0,\pi]$ имеет место принцип локализации, если из того, что для любых двух функций f и g, принадлежащих F, таких, что в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$, $\delta > 0$ выполняется условие $f(x) = g(x)$, следует соотношение $\lim_{n\to\infty} \left| L_n^{SL}(f,x_0) - L_n^{SL}(g,x_0) \right| = 0$. Доказано, что для интерполяционных процессов, построенных по собственным функциям регулярной задачи Штурма – Лиувилля с непрерывным потенциалом ограниченной вариации, имеет место принцип локализации на классе функций, интегрируемых в смысле Римана. Установлено, что для интерполяционных процессов, построенных по собственным функциям регулярной задачи Штурма – Лиувилля с необязательно непрерывным потенциалом ограниченной вариации, имеет место принцип локализации на классе непрерывных на отрезке $[0,\pi]$ функций. Рассмотрен случай краевых условий третьего рода, из которых удалены граничные условия первого рода. Аппроксимативные свойства операторов Лагранжа – Штурма – Лиувилля в точке $x_0 \in [0,\pi]$ в обоих случаях зависят только от значений приближаемой функции лишь в окрестности этой точки $x_0 \in [0,\pi]$.

Ключевые слова: интерполяционный процесс, собственные функции, приближение функции, принцип локализации.

Поступила в редакцию: 31.10.2018 / Принята: 15.12.2018 / Опубликована: 02.03.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-51-63

ВВЕДЕНИЕ

Г. И. Натансон в [1] установил, что для функций из класса Дини – Липшица имеет место равномерная сходимость внутри интервала $(0,\pi)$, т.е. равномерная на любом компакте, содержащемся в $(0,\pi)$, процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) l_{k,n}^{SL}(x), \tag{1}$$

где U_n есть n-я собственная функция регулярной задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} U'' + [\lambda - q]U = 0, \\ U'(0) - hU(0) = 0, \\ U'(\pi) + HU(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0, \pi]$ и граничными условиями, гарантирующими, что главный член в асимптотических формулах для U_n будет косинусом, т.е. $h \neq \pm\infty$, $\quad H \neq \pm\infty$. Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n} < < \pi$ обозначены нули функции U_n.

Свойства операторов интерполирования функций лагранжевого вида (1) тесно связаны с поведением синк-приближений

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin nx}{\sin'\left(n\frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)} f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \tag{3}$$

используемых в теореме отсчетов Уиттекера – Котельникова – Шеннона (см. [2–5]). Наиболее полный обзор результатов, полученных в области исследования свойств синк-аппроксимаций (3) аналитических на действительной оси функции, экспоненциально убывающих на бесконечности, а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти, например, в [4] и [6]. Синк-приближения нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и приближения функций как одной так и нескольких переменных [7–23] в теории квадратурных формул [4] и теории вейвлет-преобразований или всплесков [2, 3, 5]. В [20–22] и [23] предложены различные модификации синк-приближений (3), позволяющие аппроксимировать непрерывные функции на отрезке $[0, \pi]$.

Изучению аппроксимативных свойств самих операторов Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) посвящены также работы [24–34]. В работе [24] устанавливается существование непрерывной на $[0, \pi]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) которой неограниченно расходится почти всюду на $[0, \pi]$. Исследования, проведенные в [25, 34], показывают, что при сколь угодно малом изменении параметров задачи Штурма – Лиувилля (2) (потенциала q, или констант h, H) аппроксимативные свойства процессов (1) могут сильно измениться. В [31] и [32] получены различные признаки равномерной сходимости интерполяционных процессов (2).

В монографии [33] приведены более подробные доказательства и исправлены опечатки, обнаруженные в некоторых формулах более ранних публикаций.

В настоящей работе, используя концепции исследований в [35–41], установлено, что для интерполяционных процессов (1), построенных по решениям задачи Штурма – Лиувилля (2), имеет место принцип локализации на классе функций, интегрируемых по Риману.

На протяжении всей работы, если не оговорено иное, будем считать потенциал q задачи Штурма – Лиувилля (2) непрерывной функцией ограниченной вариации на $[0, \pi]$. Договоримся также, что собственная функция будет нормирована условием $U_n(0) = 1$. Рассматриваем краевые условия (2) третьего рода, из которых исключены условия типа Дирихле, т. е. $h \neq \pm\infty$, $H \neq \pm\infty$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Приведем некоторые вспомогательные утверждения, которые будут использованы при доказательстве основного результата работы.

Лемма 1 ([31, 32, 42]). *Пусть U_n — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, регулярной задачи Штурма – Лиувилля (2). Через $0 < < x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n} < \pi$ обозначим нули функции U_n. Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$U_n(x) = \cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx + O(n^{-2}), \tag{4}$$

$$U'_n(x) = -n \sin nx + \beta(x) \cos nx + O(n^{-1}), \tag{5}$$

$$U'_n(x_{k,n}) = (-1)^k n + O(n^{-1}), \tag{6}$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n}\pi + n^{-2}\beta\Big(\frac{2k-1}{2n}\pi\Big) + O(n^{-3}), \tag{7}$$

где $\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau$, $c = \frac{1}{\pi}\Big(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\,d\tau\Big)$, а оценка остаточного члена во всех формулах (4)–(7) равномерна по $x \in [0, \pi]$ или $1 \leqslant k \leqslant n$.

Замечание 1. Из асимптотической формулы (4) видно, что выбранная нормировка собственных функций U_n обеспечивает их ограниченность в совокупности. Обозначим

$$\mathbb{M} = \sup\big\{|U_n(x)|,\ x \in [0, \pi],\ n \in \mathbb{N}\big\} < \infty. \tag{8}$$

Будем называть групповым сегментом I объединение конечного числа отрезков, содержащихся в $[A, B]$, таких, что соответствующие им интервалы не пересекаются. Пусть $\{x_{k,n}\}_{k=1,n=1}^{n,\ \infty}$ — произвольная система точек в отрезке $[A, B]$: $A \leqslant x_{1,n} < < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n} \leqslant B$. Каждому $x_{k,n}$ поставим в соответствие действительное число $A_{k,n}$.

Доказательство следующей леммы содержится в [43, с. 318–326].

Лемма 2. *Пусть функция f интегрируема в смысле Римана на отрезке $[A, B]$, $x_0 \in [A, B]$, $\delta > 0$ и $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [A, B]$. Для того чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k: x_{k,n} \in [A,B]\setminus O_\delta(x_0)} A_{k,n} f(x_{k,n}) = 0, \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы действительные коэффициенты удовлетворяли условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k: x_{k,n}\in[a,b]} A_{k,n} = 0$, *где $[a, b]$ — произвольный отрезок, содержащийся в $[A, B] \setminus O_\delta(x_0)$;*
2) $\max_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k: x_{k,n}\in[A,B]\setminus O_\delta(x_0)} |A_{k,n}| \leqslant M < \infty$;
3) *для любой последовательности групповых сегментов $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ таких, что $[A, B] \setminus O_\delta(x_0) \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_j \supset \ldots$, $\operatorname{mes} I_j \to 0$ при $j \to \infty$*

$$\lim_{j\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k: x_{k,n}\in I_j} |A_{k,n}| = 0.$$

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Будем говорить, что для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) на классе функций F в точке $x_0 \in [0, \pi]$ имеет место принцип локализации, если из того, что для любых двух функций f и g, принадлежащих F, таких, что в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$, $\delta > 0$ выполняется условие $f(x) = g(x)$, следует соотношение $\lim_{n\to\infty} \big|L_n^{SL}(f, x_0) - L_n^{SL}(g, x_0)\big| = 0$.

Теорема 1. *В любой точке $x_0 \in [0,\pi]$ на классе непрерывных на $[0,\pi]$ функций для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) (в случае не обязательно непрерывного потенциала q ограниченной вариации в (2)) имеет место принцип локализации.*

Доказательство. Для пространства непрерывных, исчезающих на концах отрезка, функций $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$ теорема 1 следует из [33, Предложение 19]. Действительно, положив в задаче Коши [33, формула (2.2)] $q_\lambda \equiv q$, $h(\lambda) \equiv h$ и рассматривая только собственные значения $\lambda = \lambda_n$ задачи Штурма – Лиувилля (2), получим, что оператор Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) является частным случаем оператора [33, формула (3.3)]. Так как в этом случае имеем $L_n^{SL}(f,\cdot) \equiv S_{\lambda_n}(f,\cdot)$.

Сделав замену неизвестной функции как в [33, Предложение 20], убеждаемся в справедливости принципа локализации на классе $C[0,\pi]$ для любой точки x_0 интервала $(0,\pi)$. Используя асимптотические формулы (4)–(7), непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости принципа локализации для интерполяционных процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) на классе непрерывных на $[0,\pi]$ функций в точках $x = 0$ и $x = \pi$. Теорема 1 доказана. □

Замечание 2. Теорема 1 остается справедливой в случае не обязательно непрерывного потенциала q, так как предложения 19 и 20 в [33] доказываются в предположении ограниченности вариации потенциала q в задаче Коши [33, формула (2.2)].

В настоящей работе устанавливается справедливость принципа локализации для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля на более широком функциональном классе.

Теорема 2. *В любой точке $x_0 \in [0,\pi]$ на классе интегрируемых в смысле Римана на $[0,\pi]$ функций для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) имеет место принцип локализации.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in [0,\pi]$. Зафиксируем любое положительное δ и возьмем произвольную интегрируемую по Риману на $[0,\pi]$ функцию f, равную нулю при $x \in O_\delta(x_0)$. В силу леммы 2, чтобы для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) имел место принцип локализации, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} L_n^{SL}(f,x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) l_{k,n}^{SL}(x_0) = 0, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы для значений фундаментальных функций $l_{k,n}^{SL}(x_0)$ выполнялось одновременно три условия:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k:x_{k,n}\in[a,b]} l_{k,n}^{SL}(x_0) = 0, \tag{11}$$

где $[a,b]$ — произвольный отрезок, содержащийся в $[0,\pi] \setminus O_\delta(x_0)$;

$$\max_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k:x_{k,n}\in[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| \leqslant M < \infty; \tag{12}$$

для любой последовательности групповых сегментов $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ таких, что $[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)\supset I_1\supset I_2\supset\dots\supset I_j\supset\dots$, $\operatorname{mes} I_j\to 0$ при $j\to\infty$

$$\lim_{j\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k:x_{k,n}\in I_j}|l_{k,n}^{SL}(x_0)|=0. \tag{13}$$

С помощью формулы конечных приращений Лагранжа, (4), (5) и (6) оценим разность

$$\left|\sum_{k=1}^{n}l_{k,n}^{SL}(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^kU_n(x)}{n(x-x_{k,n})}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{U_n(x)}{(x-x_{k,n})}\right|\left|\frac{(-1)^kn-U_n'(x_{k,n})}{nU_n'(x_{k,n})}\right|=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|U_n'(\xi_{k,n})|\left|\frac{(-1)^kn-U_n'(x_{k,n})}{nU_n'(x_{k,n})}\right|=O(n^{-1}). \tag{14}$$

Отсюда делаем вывод о справедливости асимптотической формулы

$$\left|\sum_{k=1}^{n}l_{k,n}^{SL}(x)\right|=\frac{|U_n(x)|}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(x-x_{k,n})}\right|+O(n^{-1}).$$

Если суммирование осуществлять только по индексам узлов, попадающих в произвольный отрезок $[a,b]$, содержащийся в $[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)$, то это неравенство может только усилиться

$$\left|\sum_{k:x_{k,n}\in[a,b]}l_{k,n}^{SL}(x)\right|=\frac{|U_n(x)|}{n}\left|\sum_{k:x_{k,n}\in[a,b]}\frac{(-1)^k}{(x-x_{k,n})}\right|+O(n^{-1}). \tag{15}$$

Оценка остаточных членов в (14) и (15) равномерна по $x\in[0,\pi]$. Рассуждая так же, как при доказательстве соотношения (14), получаем оценку

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left|l_{k,n}^{SL}(x)\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{(-1)^kU_n(x)}{n(x-x_{k,n})}\right|\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|l_{k,n}^{SL}(x)-\frac{(-1)^kU_n(x)}{n(x-x_{k,n})}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{U_n(x)}{(x-x_{k,n})}\right|\left|\frac{(-1)^kn-U_n'(x_{k,n})}{nU_n'(x_{k,n})}\right|=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|U_n'(\xi_{k,n})|\left|\frac{(-1)^kn-U_n'(x_{k,n})}{nU_n'(x_{k,n})}\right|=O(n^{-1}). \tag{16}$$

Пусть для определенности выбранная точка x_0 лежит слева от отрезка $[a,b]$. Тогда справедливы соотношения $0\leqslant x_0<x_0+\delta\leqslant a<b\leqslant\pi$. Обозначим через k_0 номер ближайшего справа к x_0 узла интерполяции, а через k_1 и k_2 — номера наименьшего и наибольшего из узлов, попадающих в отрезок $[a,b]$. В силу (7) можно выбрать $n_1\in\mathbb{N}$ таким образом, что для всех $n\geqslant n_1$ будут справедливы соотношения

$$k_1-k_0\geqslant\left[\frac{\delta}{2\pi}n\right]>2, \tag{17}$$

$$\left|\frac{4\|\beta\|_{C[0,\pi]}}{n^2}+O(n^{-3})\right|<\frac{\pi}{n}\ \text{в асимптотической формуле (7)}. \tag{18}$$

Добавим к множеству нулей собственных функций задачи Штурма – Лиувилля точки $x_{0,n} = 0$ и $x_{n+1,n} = \pi$. Теперь, в силу выбора номера узла $x_{k_0,n}$, имеем представление $x_0 = x_{k_0,n} - \alpha_n(x_{k_0,n} - x_{k_0-1,n})$, где последовательность α_n принимает значения в сегменте $[0,1)$. Отсюда и (7) для любых $1 \leqslant k \leqslant n$ получаем асимптотическую формулу

$$x_{k,n} - x_0 = \frac{2k-1}{2n}\pi - \frac{2k_0-1}{2n}\pi + \alpha_n\frac{\pi}{n} + O(n^{-2}) = \frac{\pi}{n}\left(k - k_0 + \alpha_n + O(n^{-1})\right). \quad (19)$$

Выбор $n_1 \in \mathbb{N}$ в (18) гарантирует в этой формуле оценку $|O(n^{-1})| < 1$.

Установим справедливость соотношения (11). Учитывая (17) и (18), оценим первое слагаемое в правой части (15)

$$\frac{|U_n(x_0)|}{n}\left|\sum_{k:x_{k,n}\in[a,b]}\frac{(-1)^k}{(x_0 - x_{k,n})}\right| = \frac{|U_n(x_0)|}{n}\left|\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{(-1)^k}{(x_0 - x_{k,n})}\right| =$$

$$= \frac{|U_n(x_0)|}{\pi}\left|\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{(-1)^k}{(k - k_0 + \alpha_n + O(n^{-1}))}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|U_n(x_0)|}{\pi}\left\{\left|\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{(-1)^k}{(k-k_0))}\right| + \sum_{k=k_1}^{k_2}\left|\frac{\alpha_n + O(n^{-1})}{(k-k_0)(k-k_0+\alpha_n+O(n^{-1}))}\right|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|U_n(x_0)|}{\pi}\left\{\left|\sum_{l=k_1-k_0}^{k_2-k_0}\frac{(-1)^{l+k_0}}{l}\right| + \sum_{l=k_1-k_0}^{k_2-k_0}\frac{2}{l(l-2)}\right\}. \quad (20)$$

Возьмем произвольное положительное ε и выберем $n_2 \geqslant n_1$ таким образом, чтобы для всех $n \geqslant n_2$ остаточный член $|O(n^{-1})|$ в асимптотической формуле (15) был меньше $\varepsilon/2$. В силу (7), (8), (17) и сходимости рядов $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+k_0}}{l}$, $\sum\limits_{l=3}^{\infty}\frac{2}{l(l-2)}$ с помощью критерия Коши найдем такое $n_3 \geqslant n_2$, начиная с которого будут выполняться неравенства

$$\left|\sum_{l=\left[\frac{\delta n}{2\pi}\right]}^{k_2-k_0}\frac{(-1)^{l+k_0}}{l}\right| < \frac{\varepsilon\pi}{4\mathbb{M}}, \qquad \sum_{l=\left[\frac{\delta n}{2\pi}\right]}^{k_2-k_0}\frac{2}{l(l-2)} < \frac{\varepsilon\pi}{4\mathbb{M}}.$$

Отсюда, из (15), (18) и (20) следует справедливость неравенства $\left|\sum\limits_{k:x_{k,n}\in[a,b]} l_{k,n}^{SL}(x_0)\right| < \varepsilon$ для любого $n \geqslant n_3$. Таким образом, соотношение (11) доказано.

Теперь оценим сумму $\sum\limits_{k:x_{k,n}\in[a,b]}\left|l_{k,n}^{SL}(x_0)\right| = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2}\left|l_{k,n}^{SL}(x_0)\right|$. Как и прежде, ограничимся рассмотрением случая $0 \leqslant x_0 < x_0 + \delta \leqslant a < b \leqslant \pi$. Опять подберем n_1, как в случае (17), (18). В силу (16) существует константа $C_1 > 0$, для которой при $n \geqslant n_1$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}\left|l_{k,n}^{SL}(x_0)\right| \leqslant \frac{|U_n(x)|}{n}\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{1}{(x_0 - x_{k,n})} + \frac{C_1}{n}. \quad (21)$$

Но для всех $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$ имеет место соотношение $|x_0 - x_{k,n}| \geqslant \delta$. Кроме того, в силу (7) существует константа $C_2 > 0$ такая, что для всех $n \geqslant n_1$ верны неравенства

$k_2 - k_1 \leqslant \frac{b-a}{\pi}n + 2 + \frac{C_2}{n}$. Поэтому найдется зависящий только от параметров задачи Штурма – Лиувилля (2) номер $n_4 \in \mathbb{N}$, начиная с которого $\frac{C_1}{n}$ в (21) будет меньше, чем $\mathrm{mes}\,(a,b)$, и будет справедлива оценка $k_2 - k_1 \leqslant \frac{2\mathrm{mes}\,[a,b]n}{\pi}$. Таким образом, из (18) и (21) следует существование константы C_3 такой, что для любого n, начиная с n_4, справедлива оценка

$$\sum_{k:x_{k,n}\in[a,b]} \left|l_{k,n}^{SL}(x_0)\right| \leqslant \frac{2\mathbb{M}\mathrm{mes}\,[a,b]}{\pi\delta} + \mathrm{mes}\,[a,b] \leqslant C_3\mathrm{mes}\,[a,b].$$

Отсюда следуют (12) и (13). Действительно, (12) получаем из неравенств

$$\max_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k:x_{k,n}\in[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| = \max_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{k:x_{k,n}\in[0,x_0-\delta]} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| + \sum_{k:x_{k,n}\in[x_0+\delta,\pi]} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(C_3\mathrm{mes}\,\{[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)\},\ \max_{1\leqslant n\leqslant n_4} \sum_{k:x_{k,n}\in[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| \right).$$

Пусть $I_j = \cup_{l=1}^m \overline{\Delta}_{j,l}$, где $\overline{\Delta}_{j,l}$ — произвольные, не пересекающиеся с $O_\delta(x_0)$ отрезки такие, что соответствующие им интервалы $\Delta_{j,l}$ не имеют общих точек. Тогда по свойству полной аддитивности меры [44, с. 58] для любого n, начиная с n_4, получаем оценку

$$\sum_{k:x_{k,n}\in I_j} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| = \sum_{l=1}^m \sum_{k:x_{k,n}\in\overline{\Delta}_{j,l}} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| \leqslant \sum_{l=1}^m C_3\mathrm{mes}\,\{\overline{\Delta}_{j,l}\} =$$

$$= \sum_{l=1}^m C_3\mathrm{mes}\,\{\Delta_{j,l}\} = C_3\mathrm{mes}\,I_j.$$

Откуда и следует (13). Случай, когда выбранная точка x_0 лежит справа от отрезка $[a,b]$, доказывается аналогично или с помощью замены $z = \pi - x$.

Теорема 2 доказана. □

Библиографический список

1. *Натансон Г. И.* Об одном интерполяционном процессе // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та. 1958. Т. 166. С. 213–219.
2. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 550 с.
3. *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основы теории всплесков // УМН. 1998. Т. 53, вып. 6 (324). С. 53–128. DOI: https://doi.org/10.4213/rm89
4. *Stenger F.* Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions. Springer Ser. Comput. Math. Vol. 20. N. Y. : Springer-Verlag, 1993. 565 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2706-9
5. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
6. *Butzer P. L.* A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields // Journal of Approximation Theory. 2009. Vol. 160, iss. 1–2. P. 3–18. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jat.2009.05.004
7. *Шмуклер А. И., Шульман Т. А.* О некоторых свойствах рядов Котельникова // Изв. вузов. Матем. 1974. № 3. С. 93–103.

8. *Livne O. E., Brandt A.* MuST: The Multilevel Sinc Transform // SIAM J. Sci. Comput. 2011. Vol. 33, iss. 4. P. 1726–1738. DOI: https://doi.org/10.1137/100806904
9. *Krivoshein A., Skopina M.* Multivariate sampling-type approximation // Analysis and Applications. 2017. Vol. 15, № 4. P. 521–542. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219530516500147
10. *Kolomoitsev Yu., Skopina M.* Around Kotelnikov – Shannon formula // 2017 12th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA 2017). IEEE, 2017. P. 279–282. DOI: https://doi.org/10.1109/SAMPTA.2017.8024385
11. *Maleknejad K., Rostami Ya., Shahi Kalalagh H.* Numerical solution for first kind Fredholm integral equations by using sinc collocation method // IJAPM. 2016. Vol. 6, № 3. P. 120–128. DOI: https://doi.org/10.17706/ijapm.2016.6.3.120-128
12. *Беличенко К. В., Соболев В. М.* Синк-аппроксимация данных RFID меток // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 7–9.
13. *Шакиров И. А.* О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 6 (328). С. 1404–1423.
14. *Coroianu L., Gal S. G.* Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels // Demonstratio Math. 2016. Vol. 49, iss. 1. P. 38–49. DOI: https://doi.org/10.1515/dema-2016-0005
15. *Richardson M., Trefethen L.* A sinc function analogue of Chebfun // SIAM J. Sci. Comput. 2011. Vol. 33, iss. 5. P. 2519–2535. DOI: https://doi.org/10.1137/110825947
16. *Tharwat M. M.* Sinc approximation of eigenvalues of Sturm – Liouville problems with a Gaussian multiplier // Calcolo. 2014. Vol. 51, iss. 3. P. 465–484. DOI: https://doi.org/10.1007/s10092-013-0095-3
17. *Alquran M. T., Al-Khaled K. M.* Numerical comparison of methods for solving systems of conservation laws of mixed type // Int. Journal of Math. Analysis. 2011. Vol. 5, № 1. P. 35–47.
18. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East J. Approx. 2008. Vol. 14, № 2. P. 183–192.
19. *Mohsen A., El-Gamel M.* A sinc-collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations // Z. Angew. Math. Phys. 2007. Vol. 58, iss. 3. P. 380–390. DOI: https://doi.org/10.1007/s00033-006-5124-5
20. *Умаханов А. Я., Шарапудинов И. И.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // Владикавк. матем. журн. 2016. Т. 18, № 4. С. 61–70.
21. *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // Уфим. матем. журн. 2015. Т. 7, вып. 4. С. 116–132.
22. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, вып. 5. С. 170–194.
23. *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. вузов. Матем. 2016. № 3. С. 72–81.
24. *Трынин А. Ю.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // Изв. вузов. Матем. 2010. № 11. С. 74–85.
25. *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // Изв. вузов. Матем. 2000. № 9 (460). С. 60–73.
26. *Мосина К. Б.* Принцип Дини – Липшица для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 56–59.

27. *Мосина К. Б.* Формула Неваи для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля // Труды Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. 2013. Т. 46. С. 316–318.
28. *Турашвили К. Б.* Асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений задачи Штурма – Лиувилля // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 73–76.
29. *Турашвили К. Б.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // Труды Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 44. С. 347–350.
30. *Турашвили К. Б.* Об интерполяционном аналоге интегрального признака Дини // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 94–98.
31. *Трынин А. Ю.* Равномерная сходимость процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля на одном функциональном классе // Уфимск. матем. журн. 2018. Т. 10, вып. 2. С. 93–108.
32. *Трынин А. Ю.* Признак сходимости процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля в терминах одностороннего модуля изменения // Изв. вузов. Матем. 2018. № 8. С. 61–74.
33. *Трынин А. Ю.* Теорема отсчетов на отрезке и ее обобщения: Теорема дискретизации для синк аппроксимаций и ее обобщение. LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2016. 488 с.
34. *Трынин А. Ю.* Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма – Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5, вып. 4. С. 116–129.
35. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 230 с.
36. *Голубов Б. И.* Сферический скачок функции и средние Бохнера – Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье // Матем. заметки. 2012. Т. 91, вып. 4. С. 506–514. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm8739
37. *Голубов Б. И.* Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 1985. Т. 37, вып. 1. С. 13–24.
38. *Дьяченко М. И.* Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 3. С. 3–18. DOI: https://doi.org/10.4213/sm8118
39. *Скопина М. А., Максименко И. Е.* Многомерные периодические всплески // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, вып. 2. С. 1–39.
40. *Дьяченко М. И.* Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 2004. Т. 76, вып. 5. С. 723–731. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm139
41. *Иванникова Т. А., Тимашова Е. В., Шабров С. А.* О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 1. С. 3–8. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-1-3-8
42. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : в 2 т. М. : Изд-во иностр. лит. Т. 1, 1953. 336 с. ; Т. 2, 1954. 428 с.
43. *Егорова И. А.* О принципе локализации в теории интерполирования // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та. 1949. Т. 86. С. 317–335.
44. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. 480 с.

Образец для цитирования:

Трынин А. Ю., Киреева Е. Д. Принцип локализации на классе функций, интегрируемых по Риману, для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 51–63. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-51-63

The Principle of Localization at the Class of Functions Integrable in the Riemann for the Processes of Lagrange – Sturm – Liouville

A. Yu. Trynin, E. D. Kireeva

Alexander Yu. Trynin, https://orcid.org/0000-0002-0036-5435, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, tayu@rambler.ru

Ekaterina D. Kireeva, https://orcid.org/0000-0002-4901-4660, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, ekateriha98@mail.ru

Let us say that the principle of localization holds at the class of functions F at point $x_0 \in [0,\pi]$ for the Lagrange – Sturm – Liouville interpolation process $L_n^{SL}(f,x)$ if $\lim_{n\to\infty} \left|L_n^{SL}(f,x_0) - L_n^{SL}(g,x_0)\right| = 0$ follows from the fact that the condition $f(x) = g(x)$ is met for any two functions f and g belonging to F in some neighborhood $O_\delta(x_0)$, $\delta > 0$. It is proved that the principle of localization at the class of Riemann integrable functions holds for interpolation processes built on the eigenfunctions of the regular Sturm – Liouville problem with a continuous potential of bounded variation. It is established that the principle of localization at the class of continuous on the segment $[0,\pi]$ functions holds for interpolation processes built on the eigenfunctions of the regular Sturm – Liouville problem with an optional continuous potential of bounded variation. We consider the case of boundary conditions of the third kind, from which the boundary conditions of the first kind are removed. Approximative properties of Lagrange – Sturm – Liouville operators at point $x_0 \in [0,\pi]$ in both cases depend solely on the values of the approximate function just in the neighborhood of this point $x_0 \in [0,\pi]$.

Keywords: interpolation process, eigenfunctions, function approximation, localization principle.

Received: 31.10.2018 / Accepted: 15.12.2018 / Published: 02.03.2020

References

1. Natanson G. I. About one interpolation process. *Uchenye zapiski Leningradskogo pedagogicheskogo insituta* [Scientific notes of the Leningrad Pedagogical Institute], 1958, vol. 166, pp. 213–219 (in Russian).
2. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Ortogonal'nye ryady* [Orthogonal series]. Moscow, Izd-vo AFTs, 1999. 550 p. (in Russian).
3. Novikov I. Ya., Stechkin S. B. Basic wavelet theory. *Russian Math. Surveys*, 1998, vol. 53, iss. 6, pp. 1159–1231. DOI: https://doi.org/10.1070/rm1998v053n06ABEH000089
4. Stenger F. *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*. Springer Ser. Comput. Math., vol. 20, New York, Springer-Verlag, 1993. 565 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2706-9
5. Dobeshi I. *Desyat' lektsiy po veivletam* [Ten Wavelet Lectures]. Izhevsk, NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, 2001. 464 p. (in Russian).
6. Butzer P. L. A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields. *Journal of Approximation Theory*, 2009, vol. 160, iss. 1–2, pp. 3–18. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jat.2009.05.004
7. Shmukler A. I., Shulman T. A. Certain properties of Kotel'nikov series. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1974, vol. 18, iss. 3, pp. 81–90.
8. Livne O. E., Brandt A. E. MuST: The multilevel sinc transform. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2011, vol. 33, iss. 4, pp. 1726–1738. DOI: https://doi.org/10.1137/100806904

9. Krivoshein A., Skopina M. Multivariate Sampling-Type Approximation. *Analysis and Applications*, 2017, vol. 15, no. 4, pp. 521–542. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219530516500147
10. Kolomoitsev Yu., Skopina M. Around Kotelnikov – Shannon Formula. *2017 12th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA 2017)*. IEEE, 2017, pp. 279–282. DOI: https://doi.org/10.1109/SAMPTA.2017.8024385
11. Maleknejad K., Rostami Ya., Shahi Kalalagh H. Numerical solution for first kind Fredholm integral equations by using sinc collocation method. *IJAPM*, 2016, vol. 6, no. 3, pp. 120–128. DOI: https://doi.org/10.17706/ijapm.2016.6.3.120-128
12. Belichenko K. V., Sobolev V. M. Sinc approximation of data RFID methods. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2017, iss. 19, pp. 7—9 (in Russian).
13. Shakirov I. A. Influence of the choice of Lagrange interpolation nodes on the exact and approximate values of the Lebesgue constants. *Siberian Math. J.*, 2014, vol. 55, iss. 6, pp. 1144–1160. DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446614060184
14. Coroianu L., Gal G. S. Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels. *Demonstratio Math.*, 2016, vol. 49, iss. 1, pp. 38–49. DOI: https://doi.org/10.1515/dema-2016-0005
15. Richardson M., Trefethen L. A sinc function analogue of Chebfun. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2011, vol. 33, iss. 5, pp. 2519–2535. DOI: https://doi.org/10.1137/110825947
16. Tharwat M. M. Sinc approximation of eigenvalues of Sturm – Liouville problems with a Gaussian multiplier. *Calcolo*, 2014, vol. 51, iss. 3, pp. 465–484. DOI: https://doi.org/10.1007/s10092-013-0095-3
17. Alquran M. T., Al-Khaled K. Numerical comparison of methods for solving systems of conservation laws of mixed type. *Int. Journal of Math. Analysis*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 35–47.
18. Sklyarov V. P. On the best uniform sinc-approximation on a finite interval. *East J. Approx.*, 2008, vol. 14, iss. 2, pp. 183–192.
19. Mohsen A., El-Gamel M. A Sinc-collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2007, vol. 58, iss. 3, p. 380–390. DOI: https://doi.org/10.1007/s00033-006-5124-5
20. Umakhanov A. Ya., Sharapudinov I. I. Interpolation of functions by the Whittaker sums and their modifications: conditions for uniform convergence. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2016, vol. 18, no. 4, pp. 61–70 (in Russian).
21. Trynin A. Yu. On some properties of sinc approximations of continuous functions on the interval. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, iss. 4, pp. 111–126. DOI: https://doi.org/10.13108/2015-7-4-111
22. Trynin A. Yu. On necessary and sufficient conditions for convergence of sinc approximations. *St. Petersburg Math. J.*, 2016, vol. 27, iss. 5, pp. 825–840. DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1419
23. Trynin A. Yu. Approximation of continuous on a segment functions with the help of linear combinations of sincs. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, iss. 3, pp. 63–71. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X16030087
24. Trynin A. Yu. The divergence of Lagrange interpolation processes in eigenfunctions of the Sturm – Liouville problem. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, iss. 11, pp. 66–76. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X10110071
25. Trynin A. Yu. On the absence of stability of interpolation in eigenfunctions of the Sturm – Liouville problem. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2000, vol. 44, iss. 9, pp. 58–71.

26. Mosina K. B. The Dini – Lipschitz principle for the Lagrange – Sturm – Liouville interpolation process. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2013, iss. 15, pp. 56–59 (in Russian).
27. Mosina K. B. Nevai formula for the Lagrange – Sturm – Liouville interpolation process. *Trudy Matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo* [Works of the N. I. Lobachevsky Mathematical Center], 2013, vol. 46, pp. 316–318 (in Russian).
28. Turashvili K. B. Asymptotic formulas for the eigenfunctions and eigenvalues of the Sturm – Liouville problem. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2012, iss. 14, pp. 73–76 (in Russian).
29. Turashvili K. B. On the lack of stability of interpolation with respect to the eigenfunctions of the Sturm – Liouville problem. *Trudy Matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo* [Works of the N. I. Lobachevsky Mathematical Center], 2011, vol. 44, pp. 347–350 (in Russian).
30. Turashvili K. B. On the interpolation analogue of the integral sign of Dini. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2010, iss. 12, pp. 94–98 (in Russian).
31. Trynin A. Yu. Uniform convergence of Lagrange – Sturm – Liouville processes on one functional class. *Ufa Math. J.*, 2018, vol. 10, iss. 2, pp. 93–108. DOI: https://doi.org/10.13108/2018-10-2-93
32. Trynin A. Yu. A criterion of convergence of Lagrange – Sturm – Liouville processes in terms of one-sided modulus of variation. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2018, vol. 62, iss. 8, pp. 51–63. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X1808008X
33. Trynin A. Yu. *Teorema otschetov na otrezke i ee obobscheniya: Teorema diskretizatsii dlia sink approksimatsii i ee obobshchenie* [Sample theorem on a segment and its generalization: Discretization theorem for sinc approximation and its generalization]. LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2016. 488 p. (in Russian).
34. Trynin A. Yu. On inverse nodal problem for Sturm – Liouville operator. *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, iss. 4, pp. 112–124. DOI: https://doi.org/10.13108/2013-5-4-112
35. Privalov A. A. *Teoriya interpolirovaniya funktsii* [Function Interpolation Theory]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 1990. 230 p. (in Russian).
36. Golubov B. I. Spherical Jump of a Function and the Bochner – Riesz Means of Conjugate Multiple Fourier Series and Fourier Integrals. *Math. Notes*, 2012, vol. 91, iss. 4, pp. 479–486. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434612030212
37. Golubov B. I. Absolute convergence of multiple Fourier series. *Math. Notes*, 1985, vol. 31, iss. 1, pp. 8–15. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01652507
38. Dyachenko M. I. On a class of summability methods for multiple Fourier series. *Sb. Math.*, 2013, vol. 204, iss. 3, pp. 307–322. DOI: https://doi.org/10.1070/SM2013v204n03ABEH004302
39. Skopina M. A., Maksimenko I. E. Multidimensional periodic wavelets. *St. Petersburg Math. J.*, 2004, vol. 15, iss. 2, pp. 165–190. DOI: https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00808-8
40. Dyachenko M. I. Uniform Convergence of Hyperbolic Partial Sums of Multiple Fourier Series. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, iss. 5, pp. 673–681. DOI: https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000049666.00784.9d
41. Ivannikova T. A., Timashova E. V., Shabrov S. A. On necessary conditions for a minimum of a quadratic functional with a Stieltjes integral and zero coefficient of the highest derivative on the part of the interval. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 1, pp. 3–8 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-1-3-8

42. Sansone Dzh. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations: in 2 vols.]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, vol. 1, 1953, 336 p.; vol. 2, 1954, 428 p. (in Russian).
43. Egorova I. A. On the principle of localization in the theory of interpolation. *Uchenye zapiski Leningradskogo pedagogicheskogo insituta* [Scientific notes of the Leningrad Pedagogical Institute], 1949, vol. 86, pp. 317–335 (in Russian).
44. Natanson I. P. *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of functions of a real variable]. Moscow, Nauka, 1974. 480 p. (in Russian).

Cite this article as:
Trynin A. Yu., Kireeva E. D. The Principle of Localization at the Class of Functions Integrable in the Riemann for the Processes of Lagrange – Sturm – Liouville. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 51–63 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-51-63