А. Н. Паршин, Замечание о формуле Зигеля, *Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2001, том 70, 159–164

https://www.mathnet.ru/into106

УДК 511.331; 512.743

159-164

ЗАМЕЧАНИЕ О ФОРМУЛЕ ЗИГЕЛЯ

А. Н. Паршин

Настоящая заметка представляет собой резюме доклада автора на семинаре И. Р. Шафаревича, где-то в 1996 г., еще в старом здании Стекловки, где семинар продолжался более двадцати лет после изгнания И. Р. из МГУ.

Начнем с классической формулы для объема фундаментальной области F модулярной группы $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, действующей на верхней полуплоскости H. Если выбрать в качестве объема на H форму $(2\pi y^2)^{-1}dx\wedge dy$, то для кообъема дискретной фуксовой подгруппы $\Gamma' \subset G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ известно следующее выражение

$$\mathrm{vol}(H/\Gamma') = 2g - 2 + \sum_{\substack{\text{эллиптические} \\ \text{точки } P \bmod \Gamma'}} \left(1 - \frac{1}{\sharp\Gamma_P}\right) + \sum_{\substack{\text{параболические} \\ \text{точки } P \bmod \Gamma'}} 1,$$

где Γ_P — стационарная подгруппа точки P из фундаментальной области F'. Если $\Gamma' = \Gamma$, $F' = F$ — стационарная фундаментальная область с неподвижными точками $p = i$ ($\sharp\Gamma_P = 2$) и $p = \pm\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\sharp\Gamma_P = 3$), то отсюда получается, что $\mathrm{vol}(H/\Gamma) = \frac{1}{6}$. В чисто групповых терминах это означает, что $\mathrm{vol}(G/\Gamma) = \frac{1}{12}$, если выбрать на G такую меру Хаара, что $\mathrm{vol}(\mathbb{K}) = 1$, где $\mathbb{K} = U(1)$ — максимальная компактная подгруппа. Достаточно заметить, что $H = \mathbb{K}/G$ и $\sharp\mathbb{K}\cap\Gamma = 2$. Наконец, вспоминая, что значение $\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)$ дзета-функции Римана равно $-\frac{1}{12}$ [1], окончательно получаем

$$\frac{vol(G/\Gamma)}{vol(\mathbb{K})} = -\zeta_{\mathbb{Q}}(-1), \tag{1}$$

здесь левая часть уже не зависит от меры Хаара.

То, что это равенство не случайное совпадение, подтверждается его дальнейшими обобщениями, когда группа $\mathrm{SL}(2)$ заменяется широким классом полупростых групп, а поле $\mathbb{Q}$ — его расширениями. Для группы $\mathrm{SL}(n)$ это было сделано Минковским [6] (прозрачное доказательство его формулы получил В. Е. Воскресенский [3]). Для ортогональных групп формула для объема была получена Зигелем [9]. Именно после его работ и их интерпретации в терминах чисел Тамагавы, данной А. Вейлем, стало ясно, что такие формулы для объема достаточно общее явление (см. обзор Серра [8]). Поэтому мы и называем их формулами Зигеля.

Наиболее общая ситуация была рассмотрена Хардером в 1971 г. [5]. Его теорема относится к произвольной полупростой односвязной группе G, определенной над чисто вещественным полем алгебраических чисел $K \supset \mathbb{Q}$. Пусть $G' = \prod\limits_v G(K_v)$ по всем вещественным точкам v и $\Gamma = G(A)$, где A — кольцо целых поля K. Тогда для некоторой явно указываемой меры Хаара на G'

$$\mathrm{vol}(G'/\Gamma) = c^{[K:\mathbb{Q}]} \prod_{i=1}^{l} \zeta_K(-m_i), \tag{2}$$

где c зависит только от типа группы G, l — ее ранг и $m_1, \ldots, m_l$ — экспоненты группы Вейля. Например, если $G = \mathrm{Sp}(2l, K)$, то $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $\ldots$, $m_l = 2l - 1$ и $c = 1$.

Мы видим, что формулу (1) можно обобщать в двух направлениях: первом, переходя к более общим группам G, и втором, обобщая основное поле K. Если в первом направлении формула Хардера дает, по-видимому, наиболее естественное и окончательное выражение для формулы Зигеля, то во втором направлении имеется большой простор для дальнейших обобщений. Цель этой заметки — привести аргументы в пользу этой точки зрения.

Воспользуемся для этого классификацией арифметических схем (т.е. схем над $\mathbb{Z}$) согласно их размерности по Круллю. Имеем следующую картину (см. табл. 1). Вместо ? можно было бы вставить поле $\mathbb{F}_1$, состоящее из одного элемента.

Формула Хардера относится к числовому случаю и размерности 1. Его методы дают соответствующую формулу и для алгебраических кривых над $\mathbb{F}_q$ (см. ниже (4)). Можно спросить, есть ли аналоги формулы Зигеля для размерности 0, 2 и т. д., скажем для геометрического случая. Показательно, что старая теорема Соломона [10] о порядках конечных групп Шевалле дает возможность заполнить место размерности 0, а недавние результаты Йосиоки [12] о векторных расслоениях на линейчатых

Размерность	Числовой случай	Геометрический случай
0	?	$\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q$
1	кольца A целых алгебраических чисел	алгебраические кривые над $\mathbb{F}_q$
2	арифметические поверхности	алгебраические поверхности над $\mathbb{F}_q$
...	...	...

Табл. 1

поверхностях дают некоторые указания по поводу размерности 2.

Пусть G — полупростая односвязная группа Шевалле (поскольку нам будут нужны группы точек G со значениями в различных полях, то лучше всего рассматривать G как групповую схему над $\mathbb{Z}$). Выберем максимальный тор $T \subset G$ и борелевскую подгруппу $B \supset T$. Тогда $l = \dim T$ — ранг группы G и $W = N(T)/T$ — ее группа Вейля (подробности см. в [2]). W является группой Кокстера с системой образующих $S = \langle s_1, \ldots, s_l \rangle$. Экспоненты $m_1, \ldots, m_l$ — это целые числа, входящие в собственные значения $\zeta^{2\pi i m_j/h}$ преобразований $s_1, \ldots, s_l$, действующих на $\operatorname{Hom}(T, \mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{C}$. Если взять числа $d_1 = m_1 + 1$, $\ldots$, $d_l = m_l + 1$, то они будут степенями образующих кольца инвариантов $\operatorname{Sym}(\mathfrak{g})^G$ симметрической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G относительно присоединенного действия.

Так, если G типа A_l, то $m_1 = 1$, $\ldots$, $m_l = l$ (случай C_l см. выше), что легко вытекает из второго определения через степень инвариантов.

Пусть теперь $P_I \supset B$ — стандартная параболическая подгруппа в G, отвечающая подмножеству $I \subset S$. Введем еще дзета-функцию

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - q^{-s}}$$

конечного поля $\mathbb{F}_q$, т.е. схемы размерности 0.

Теорема ([10]).

$$\zeta(-d_1) \cdots \zeta(-d_l) = (-1)^l \sum_{I \subset S} (-1)^{\sharp I} \frac{1}{\sharp P_I(\mathbb{F}_q)}. \tag{3}$$

Мы несколько изменили первоначальную формулировку для удобства дальнейшего сравнения.

Переходим к размерности 1, т. е. алгебраической кривой C над $\mathbb{F}_q$. Пусть $P \in C(\mathbb{F}_q)$, $A = \mathrm{H}^0(C - P, \mathcal{O}_c)$, $K_P \supset \mathcal{O}_P$ — локальное поле (кольцо) в точке P, $\Gamma = G(A)$ и $G = G(K_P)$. Γ — дискретная подгруппа конечного кообъема локально компактной группы G.

Теорема ([5], [8]).

$$\zeta_A(1-d_1)\cdots\zeta_A(1-d_l) = \sum_{\substack{I\subset\tilde{S}\\ I\neq\tilde{S}}}(-1)^{\sharp I}\frac{\mathrm{vol}(G/\Gamma)}{\mathrm{vol}(\tilde{P}_I(\mathcal{O}_P))}, \tag{4}$$

где $\zeta_A(s) = \prod\limits_{x\in\mathrm{Spec}\,A}(1 - Nmx^{-s})^{-1}$ *— дзета-функция кривой* $\mathrm{Spec}\,A \subset C$, $\tilde{S} \supset S$ *— аффинная система корней и* $\tilde{P}_I$ *— т.н. парахорические подгруппы максимальных компактных подгрупп группы* G.

Последних ровно $l+1$, с точностью до сопряженности. Если взять среди них, например, $G(\mathcal{O}_P)$, то подгруппы $\tilde{P}_I$ для $I \subset \subset S \subset \tilde{S}$ суть прообразы параболических подгрупп $P_I \subset G(\mathbb{F}_q)$ относительно отображения редукции $G(\mathcal{O}_P) \longrightarrow G(\mathbb{F}_q)$ (см. [2], [8], [11]).

Сходство формул (3) и (4) сразу бросается в глаза. Заметим, что их правые части содержат обемы подгрупп, связанных с симплексами основы (building) Брюа—Титса, соответственно, групп $G(\mathbb{F}_q)$ и $G(k_P)$ (обзор теории основ см. в докладе Титса [11]).

С точки зрения теории n-мерных локальных полей поля $\mathbb{F}_q$ и $K_P \cong \mathbb{F}_q((t))$ являются локальными полями размерности 0 и 1 и упомянутые основы Брюа—Титса являются частными случаями общей конструкции основ над локальными полями любой размерности [4]. Это указывает, что предполагаемое обобщение формул (3) и (4), например, для случая алгебраической поверхности X над $\mathbb{F}_q$, должно быть связано с основой Брюа—Титса алгебраической группы, определенной над двумерным локальным полем $K_{P,C}$. Здесь $P \in X$ — замкнутая точка, а C — неприводимая кривая на X.

Вернемся снова к группе $\mathrm{SL}(2)$. Пусть $G = \mathrm{SL}(2, K_P)$, $\mathbb{K} = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_P)$. Формула (4) дает

$$\frac{\mathrm{vol}(G/\Gamma)}{\mathrm{vol}(\mathbb{K})} = \zeta_C(-1). \tag{5}$$

Это точный смысл формулы (1). Это же равенство на языке векторных расслоений E ранга 2 на кривой C выглядит так:

$$\sum_{\substack{\operatorname{rk} E=2 \\ c_1(E)=0}} \frac{1}{\sharp \operatorname{Aut}(E)} = (q-1)^{-1}\zeta_C(-1) \tag{6}$$

(см. [7]). Если попытаться непосредственно обобщить его на алгебраические поверхности, то первая трудность состоит в том, что

$$\sum_{\substack{\operatorname{rk} E=2, \\ c_{1,2}(E)=0}} \frac{1}{\sharp \operatorname{Aut}(E)} = \infty, \tag{7}$$

по крайней мере, для $\mathbb{P}_2$ и скорее всего всегда. Тем не менее, К. Йошиока [12] нашел следующую замечательную формулу, верную для линейчатых поверхностей X, расслоенных над кривой C с общим слоем $Y \cong \mathbb{P}^1$:

$$\begin{gathered}\sum_{\substack{\operatorname{rk} E=2,\ c_1(E)=0 \\ E|_Y \text{ тривиально}}} \frac{1}{\sharp \operatorname{Aut}(E)} q^{-_2(E)s} = \\ = \zeta_X'(0) \prod_{m\geqslant 1} \zeta_X(ms-2m) \prod_{m\geqslant 1} \zeta_X(ms-2m+1)^{-1}.\end{gathered} \tag{8}$$

Сразу укажем, что она не является аналогом формул (3) и (4) для линейчатых поверхностей. Таким аналогом будет, скорее, ее частный случай

$$\sum_{\substack{\operatorname{rk} E=2,\ c_{1,2}(E)=0 \\ E|_Y \text{ тривиально}}} \frac{1}{\sharp \operatorname{Aut}(E)} = \zeta_X'(0). \tag{9}$$

Его, впрочем, легко получит непосредственно, ибо входящие в левую сумму расслоения являются подъемами расслоений ранга 2 с кривой C.

Сравнивая формулы (3) (для $G = \mathrm{SL}(2)$), (5)–(6) и (9), видим, что в них входят значения дзета-функции схемы, соответственно, в точках $s = -2,\ -1,\ 0$. В последнем случае берется вычет, ибо для поверхности точка $s = 0$ лежит на границе критической полосы и $\zeta_X(s)$ имеет там полюс 1-го порядка. Возможно, это связано с расходимостью ряда (7).

Соблазнительно считать, что выбор точек $s = -2,\ -1,\ 0$ определяется размерностью схемы и, следовательно, для схемы X размерности d и полупростой группы G нужно брать $\zeta_X(d-d_i)$, $i = 1, \dots, l$ и/или их вычеты. Я склонен предположить, что существует общая формула для этих значений дзета-функции любой схемы X, в правую часть которой должны входить объемы, связанные с основой Брюа—Титса групповой схемы G_X над локальным полем, построенным на X.

Случай поверхности, где имеются лишь частичные результаты типа (8) или (9), является, конечно, решающим. Можно еще подумать о размерности 0 для числового случая, т. е. поле $\mathbb{F}_1$. Но это уже вопрос к А. Смирнову или М. Капранову.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. — М.: Наука, 1964. — 566 с. (РЖМат, 1965, 4А116К)
2. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972. — 334 с. (РЖМат, 1973, 2А387К)
3. *Воскресенский В. Е.* Вычисление объемов некоторых классических фундаментальных областей группы целочисленных матриц// Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1990. — *183.* — С. 42–50 (РЖМат, 1991, 1А506)
4. *Паршин А. Н.* Векторные расслоения и арифметические группы. I// Тр. Мат. ин-та РАН. — 1995. — *208.* — С. 240–265 (РЖМат, 1996, 6А289)
5. *Harder G.* A Gauss–Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups// Ann. sci. Ecole norm. super. — 1971. — *4*, № 3. — С. 409–455 (РЖМат, 1972, 4А277)
6. *Minkowski H.* Diskotinuitätsbereich für arithmetische Äquivalent// J. reine und angew. Math. — 1905. — *129.* — С. 220–274
7. *Serre J.-P.* Cohomologie des groupes discrets// Ann. Math. Stud. — 1971. — № 70. — С. 77–169 (РЖМат, 1972, 7А320) (пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.* Когомологии дискретных групп// Математика. — 1974. — *18*, № 3. — С. 123–144; № 4. — С. 3–33 (РЖМат, 1974, 11А450, 11А451)
8. *Serre J.-P.* Arbres, amalgames, SL_2// Astérisque. — 1977. — № 46. — 189 с. (РЖМат, 1978, 4А160К)
9. *Siegel C. L.* Über analytische Theorie der quadratischen Formen. I, II, III// Ann. Math. — 1935. — *36.* — С. 527–606; 1936. — *37.* — С. 230–263; 1937. — *38.* — С. 212–291
10. *Solomon L.* The orders of the finite Chevalley groups// J. Algebra. — 1966. — *3*, № 3. — С. 376–393 (РЖМат, 1968, 1А248)
11. *Tits J.* On buildings and their applications// Proc. Int. Congr. Math. Vancouver, 1974. Vol. 1. — 1975. — С. 209–220 (РЖМат, 1976, 10А257)
12. *Yoshioka K.* The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on $\mathbb{P}^2$// J. reine und angew. Math. — 1994. — *453.* — С. 193–220