Л. А. Аксентьев, Об однолистной разрешимости обратных краевых задач,
Тр. сем. по краев. задачам, 1973, выпуск 10, 11–24

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 10 *Труды семинара по краевым задачам* *1973*

Л. А. АКСЕНТЬЕВ

ОБ ОДНОЛИСТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В проблеме однолистной разрешимости обратных краевых задач имеются некоторые достижения. Это показали, в частности, доклады на Всесоюзной конференции (май 1969 г.) в Казани и обзорные доклады М. Т. Нужина, Г. Г. Тумашева [1] и Н. Б. Ильинского, М. Т. Нужина [2], а также две недавно защищенные диссертации [3], [4].

Однако в выступлениях Ф. Д. Гахова, М. Т. Нужина и В. С. Рогожина при обсуждении докладов по однолистной разрешимости на Казанской конференции были высказаны критические замечания, главным образом, относительно „узости“ полученных результатов и слабости применяемых методов. Оправданием того, что результаты еще далеки от завершения, является, как справедливо заметил Ф. Д. Гахов, небольшая история обратных краевых задач.

Настоящая статья посвящена систематическому изложению определенных результатов и возможным направлениям в исследовании однолистной разрешимости. К этому же кругу вопросов относится и статья Ф. Г. Авхадиева [5] в данном сборнике.

§ 1. Сильная и слабая проблемы однолистности

Напомним постановку основной внутренней обратной краевой задачи [6, гл. 1]. На неизвестном контуре L_z как функция дуговой координаты $s, 0 \leqslant s \leqslant l$, задается граничное значение

$$w(s) = u(s) + iv(s) \tag{1}$$

аналитической функции. Требуется построить контур L_z и найти аналитическую функцию внутри этого контура, граничные значения которой совпадают с (1). Решение задачи получается с помощью формулы

$$z(\zeta) = e^{i\alpha} \int \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\theta)\,\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta\right) d\zeta + c, \quad |\zeta| < 1 \qquad (2)$$

(α и c — постоянные). Функция $P(\theta)$ выражается сложным образом через функции (1). Именно, нужно предварительно отобразить область в плоскости w (с уравнением границы в виде (1)) на круг в плоскости ζ. Сравнением дуговых координат граничных кривых в плоскостях w и $\zeta = re^{i\theta}$ определится функция $s(\theta)$, и после этого будем иметь $P(\theta) = \ln\left|\frac{ds}{d\theta}\right|$.

В связи с таким трудным переходом от функций (1) к функции $P(\theta)$ взаимоотношения свойств функций $u(s)$, $v(s)$, с одной стороны, и функции $P(\theta)$, с другой стороны, можно провести лишь тонким анализом. Основные факты по этой теме установлены в работах С. Н. Андрианова [7] и Ф. Д. Гахова [8]. Тем не менее сравнительные количественные характеристики, надобность в которых возникает при решении геометрических вопросов в обратных задачах, найти пока не удалось.

Главным геометрическим вопросом в теории обратных краевых задач является вопрос об однолистности функции (2). Наиболее существен этот вопрос в прикладных обратных задачах. Однако и в основных обратных задачах (в частности, во внутренней задаче) однолистная разрешимость представляет большой интерес как модельная проблема.

Проблему однолистной разрешимости обратных краевых задач можно сформулировать в двух вариантах.

1. Сильная проблема однолистности. *Отделить классы функций $u(s)$, $v(s)$, допускающих однолистное решение* (2) *соответствующей обратной задачи, от классов функций $u(s)$, $v(s)$, не допускающих однолистное решение.*

2. Слабая проблема однолистности. *Отделить класс функций $P(\theta)$, допускающих однолистное решение* (2), *от класса функций $P(\theta)$, не допускающих однолистное решение.*

Известные к настоящему времени результаты по однолистной разрешимости обратных краевых задач дают возможность установить однолистность функции (2) по некоторым ограничениям на функцию $P(\theta)$. Наиболее естественным ограничением является условие Гёльдера и, в частности, условие Липшица, так как это условие на плотность обеспечивает существование главного значения интеграла типа Коши и интеграла Шварца как одного из видов интеграла типа Коши.

Для примера сформулируем задачу о разделяющей постоянной [9] для функции $P(\theta)$. Нужно определить такое $N_0(\nu)$, что при $N < N_0(\nu)$ в условии $|P(\theta_1) - P(\theta_2)| \leqslant N|\theta_1 - \theta_2|^\nu$ функция $z(\zeta)$ является однолистной в $|\zeta| \leqslant 1$, а при $N \geqslant N_0(\nu)$ найдется хотя бы одна неоднолистная функция в $|\zeta| \leqslant 1$. Как показано в [9], с неравенством $N \geqslant N_0(\nu)$ связан смешанный класс функций $z(\zeta)$ — однолистных и неоднолистных. Некоторые оценки для разделяющих постоянных приведены в обзорном докладе [1]. Последние достижения содержатся в диссертациях [3], [4].

Точные значения разделяющих постоянных получены в некоторых подклассах однолистных функций. Для всего класса однолистных функций имеются двусторонние оценки этих постоянных. Таблица оценок для разделяющих постоянных будет опубликована в очередном выпуске „Трудов семинара".

Имеются также новые виды достаточных условий однолистности функции $z(\zeta)$ по поведению функции $P(\theta)$. Например, условие $A \leqslant \frac{4N^3}{3\pi(N^2-3)}$ $(\sqrt{3} \leqslant N \leqslant 3)$, если

$$|P(\theta_1) - P(\theta_2)| \leqslant N|\theta_1 - \theta_2|, \quad |P'(\theta_1) - P'(\theta_2)| \leqslant A|\theta_1 - \theta_2|,$$

у Ф. Г. Авхадиева и В. Н. Гайдука [10]; условие

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P'(\theta+\varphi) - P'(\varphi)|^q \, d\varphi\right]^{1/q} < \frac{\lambda|\theta|^\lambda}{2^\lambda \ln 2}$$

у С. Н. Кудряшова [11]; условия вида $|P(\theta_1) - P(\theta_2)| < \alpha$ и $P'(\theta) > \beta$ у Ф. Г. Авхадиева [12].

Не получены пока достаточные условия однолистности функции $z(\zeta)$ в виде оценок на модули непрерывности функции $P(\theta)$. Такая задача поставлена Н. А. Лебедевым.

Идеальным решением слабой проблемы однолистности является исчерпание класса однолистных функций из класса регулярных функций. (В прикладных задачах нужно решать более узкую задачу: об исчерпании определенных подклассов однолистных функций. Например, для задач гидромеханики о построении изолированного профиля нужно исчерпать класс однолистных функций, выпуклых в одном направлении). В решении этой задачи (по условию Липшица на $P(\theta)$) нужно сделать следующий шаг: найти такую постоянную N_{11} больше $N_{01} = N_0$ (условие $|P(\theta_1) - P(\theta_2)| \leqslant N_0(1)|\theta_1 - \theta_2|$ заменяем на более сильное условие $|P'(\theta)| \leqslant N_0(1)$), чтобы при $|P'(\theta)| < N_{11}$ и $|P''(\theta)| < N_{12}$ функция $z(\zeta)$ была однолистной в $|\zeta| \leqslant 1$. Именно такой вид имеет условие Ф. Г. Авхадиева и В. Н. Гайдука [10], отмеченное выше. Дальше нужно привлечь следующие производные, т. е. найти условия однолистности функции $z(\zeta)$ в виде совокупности неравенств: $|P'(\theta)| < N_{n1}$, $|P''(\theta)| < N_{n2}, \dots$, $|P^{(n+1)}(\theta)| < N_{n\,n+1}$. Очевидно, что $N_{pm} < N_{qm}$ при $p < q$ и $N_{pm} \underset{p \to \infty}{\to} \infty$. Тем самым ослабляются предыдущие ограничения за счет добавления новых условий, и составляется бесконечный процесс.

Можно наметить аналогичный алгоритм частичного исчерпания однолистных функций и по некоторым интегральным характеристикам функции $P(\theta)$, например, по коэффициентам ее ряда Фурье.

Перспективными в отношении однолистного исчерпания являются общие принципы построения достаточных условий однолистности. Один такой принцип для отыскания характерных областей в плоскости $\ln f'(\zeta)$ в связи с условиями вида $\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{a}{1-|\zeta|^2}$, $|\zeta| < 1$, выдвинут в работе Ф. Г. Авхадиева и автора [13]. Там же отмечен и алгоритм частичного исчерпания однолистных функций на решениях внутренней и внешней обратных краевых задач.

Аналогичные принципы предстоит создать в плоскостях $\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}$ и $\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}$.

При поиске новых достаточных условий однолистности в круге и в любой области полезным будет такое замечание. Возьмем класс регулярных функций $f(\zeta)$ $(f'(0) = 1)$, заданных в однолистной многосвязной области D $(0 \in D)$ с гладкой границей. Зададим в некоторой плоскости ω конечную область D_ω, конформно эквивалентную области D, содержащую 1 и не содержащую 0. Проведем преобразование подобия с центром в 1 и примем полученную область за множество D', накрывающее область значений f':

$$f'(\zeta) \prec \frac{\omega(\zeta) - 1}{M} + 1, \tag{3}$$

где $\prec$ — знак подчинения и функция $\omega(\zeta)$, $\omega(0) = 1$, дает конформное отображение D на D_ω. Тогда можно утверждать, что функция $f(\zeta)$ окажется однолистной, начиная с некоторого M_0 $(M > M_0)$, так как функция $f'(\zeta)$ будет близка к 1 при достаточно большом значении M.

В самом деле, для любых точек ζ_1, $\zeta_2 \in D$ имеем

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \geqslant |\zeta_1 - \zeta_2| \left(1 - \int\limits_L |f'(t) - 1| \frac{|dt|}{|\zeta_1 - \zeta_2|}\right) > 0,$$

если

$$|f'(\zeta) - 1| < \left[\sup_{\zeta_1, \zeta_2} \frac{l(\zeta_1, \zeta_2)}{|\zeta_1 - \zeta_2|}\right]^{-1}, \quad l(\zeta_1, \zeta_2) = \inf_{L} \int\limits_L |dt|$$

и $L\ (\subset D)$ — любая кривая, соединяющая точки ζ_1 и ζ_2.

Кроме того, для каждой области D_ω будет существовать такая величина m_0, что при $M < m_0$ область D', связанная с правой функцией в (3), не будет давать достаточное условие однолистности функции $f(\zeta)$. Это случится, например, когда $0 \in D'$, т. е. когда нарушится необходимое условие однолистности.

Справедливость условия (3) можно пояснить еще тем, что функция $f(\zeta)$ будет близка к ζ. Тем не менее построить достаточное условие однолистности в ослабленной форме

$$|f(\zeta) - \zeta| < \varepsilon \tag{4}$$

нельзя. Для подтверждения рассмотрим функцию $f(\alpha, \zeta) = \zeta + \alpha\sqrt{1-\zeta^2}$ в круге $|\zeta| < 1$, причем $f(\alpha, 0) = 1 + \alpha$ и $\alpha > 0$. Производная этой функции $f'(\alpha, \zeta) = 1 - \alpha\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$ обращается в нуль в точке $(1+\alpha^2)^{-1/2}$, и поэтому функция $f(\alpha, \zeta)$ не является однолистной при как угодно малом α. Однако условие (4) выполняется с $\varepsilon = \alpha\sqrt{2}$. Аналогичный эффект получится для регулярной функции $f(\alpha, \beta; \zeta) = \zeta + \alpha\varphi(\zeta)e^{i\beta}$ с дополнительным условием $\lim\limits_{\zeta \to e^{i\theta_0}} \varphi'(\zeta) = \infty$ и $|\varphi(\zeta)| \leqslant M$ в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant 1$. В этом случае при достаточно малом α на отрезке, соединяющем точки 0 и $e^{i\theta_0}$, найдется такая точка ζ_0, в которой $|\varphi'(\zeta_0)| = 1/\alpha$ и поэтому $\varphi'(\zeta_0) = e^{i\beta_0}/\alpha$. Следовательно, $f'(\alpha, \pi - \beta_0; \zeta_0) = 0$, т. е. функция $f(\alpha, \pi - \beta_0; \zeta)$ не будет однолистной, а условию (4) она удовлетворяет с $\varepsilon = \alpha M$.

Что касается сильной проблемы однолистности в обратных задачах, то здесь пока нет точной постановки задачи в смысле количественных характеристик функций $u(s)$, $v(s)$, например, в смысле разделяющих постоянных для этих функций или для их производных. Сформулируем одну задачу, относящуюся к сильной проблеме однолистности. Докажем вначале такое утверждение.

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы кривая L_z (искомый контур при решении обратной краевой задачи) была окружностью $|z| = l/2\pi$, является представимость функций $u(s)$, $v(s)$ в виде*:

$$\begin{gathered} u(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l}{2\pi}\right)^k \left(a_k \cos\frac{k2\pi s}{l} + b_k \sin\frac{k2\pi s}{l}\right), \\ v(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l}{2\pi}\right)^k \left(a_k \sin\frac{k2\pi s}{l} - b_k \cos\frac{k2\pi s}{l}\right), \quad 0 \leqslant s \leqslant l, \end{gathered} \tag{5}$$

и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k - ib_k)\left(\dfrac{ql}{2\pi}\right)^k e^{ik2\pi s/l}$ сходится для любого $q \in (0, 1)$.

Доказательство. Пусть решением обратной краевой задачи является круг $|z| < l/2\pi$. Так как искомую регулярную функцию можно разложить в ряд Тейлора, то в качестве предельных значений на окружности $|z| = l/2\pi$ получим комплексную функцию, вещественная и мнимая части которой представляются сопряженными рядами Фурье вида (5).

Наоборот, из условия (5) следует существование регулярной функции $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - ib_k) z^k$ в круге $|z| < l/2\pi$, для которой предельные значения вещественной и мнимой частей совпадают с (5).

Единственность решения задачи (5) можно гарантировать при условии, что $u'(s)$, $v'(s)$ являются гельдеровыми. Однако решение задачи (5) в виде круга $|z| < l/2\pi$ существует даже при расходящихся рядах (5). Интересно было бы описать множество решений задачи (5) в ослабленных предположениях на $u'(s)$, $v'(s)$ и, в частности, найти геометрическую форму решения с использованием сингулярных функций. Этот вопрос дополняет геометрические вопросы С. Н. Андрианова [7, с. 22] (относительно сингулярных решений), которые пока еще не выяснены.

Если взять общую постановку внутренней задачи, то можно разложить функции $u(s)$, $v(s)$ в ряды Фурье, которые не являются, вообще говоря, сопряженными рядами. Тогда получится: $u = u_0(s)$, $v = v_0(s) + \tilde{v}(s)$ или $u = u_0(s) + \tilde{u}(s)$, $v = v_0(s)$, где $u_0(s)$, $v_0(s)$ — сопряженные функции вида (5). Если $\tilde{v}(s) \equiv 0$, то, как уже показано, решением задачи будет круг $|z| < l/2\pi$. Возникает вопрос об условиях, наложенных на $\tilde{v}$, $\tilde{u}$, которые бы обеспечили однолистность искомой области при заданных функциях $u(s)$, $v(s)$. Например, можно сформулировать такую задачу: найти границу в оценках $|\tilde{v}(s)| < \varepsilon$, $|\tilde{v}'(s)| < \varepsilon$ для обеспечения однолистного решения.

Результаты, аналогичные теореме 1, можно получить для случая внешности круга, кругового кольца и кольца с концентрическими разрезами (с предельными вариантами: круг с концентрическими разрезами и внешность круга с концентрическими разрезами).

Приведем формулировку и доказательство результата для кольца.

Теорема 2. *Для того чтобы в качестве решения обратной краевой задачи получилось кольцо $l_1/2\pi < |z| < l_0/2\pi$, необходимо и достаточно представить краевые условия в виде*

$$\varphi(z)\,|_{L_m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\frac{l_m}{2\pi}\right)^k e^{ik2\pi s/l_m}, \quad 0 \leqslant s \leqslant l_m;\ m = 0,\ 1, \tag{6}$$

причем производные по s от этих рядов должны удовлетворять условию Гёльдера.

Доказательство. Если решением обратной краевой задачи является кольцо $l_1/2\pi < |z| < l_0/2\pi$, то регулярную в этом кольце функцию можно разложить в ряд Лорана

$$\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \tag{7}$$

краевыми значениями которого являются функции (6).

Наоборот, при условии (6) существует регулярная функция (7) в кольце с граничными окружностями $L_0(|z| = l_0/2\pi)$ и $L_1(|z| = l_1/2\pi)$. Краевые значения функции (7) на границе кольца совпадают с (6).

Гёльдеровость производных функций (6) по s нужна для обеспечения единственности решения обратной краевой задачи.

В частности, когда второго условия в (6) нет, получаем теорему 1. Аналогично случаю круга будут появляться другие решения обратной краевой задачи, кроме кольца, если ослабить ограничения на краевые условия (6).

Изменения в формулировке соответствующего утверждения в случае кольца с концентрическими разрезами можно пояснить на примере кольца $l_1/2\pi < |z| < l_0/2\pi$ с одним разрезом

$$L_2 = L_2^+ \bigcup L_2^-:\ z = \frac{l_2}{2\pi} e^{i2\pi s/l_2}, \quad \alpha \leqslant s \leqslant \beta,$$

лежащим на окружности $|z| = l_2/2\pi$. Через L_2^+ обозначен левый берег этого разреза, а через L_2^- — правый берег при движении вдоль окружности против часовой стрелки. Краевое значение регулярной функции $\varphi(z)$ будет выглядеть так:

$$\begin{gathered}
\varphi|_{L_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\frac{l_0}{2\pi}\right)^k e^{ik2\pi s/l_0}, \quad 0 \leqslant s \leqslant l_0; \\
\varphi|_{L_2^-} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\frac{l_2}{2\pi}\right)^k e^{ik2\pi s/l_2}, \quad \alpha \leqslant s \leqslant \beta; \\
\varphi|_{L_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \left(\frac{l_1}{2\pi}\right)^k e^{ik2\pi s/l_1}, \quad 0 \leqslant s \leqslant l_1; \\
\varphi|_{L_2^+} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \left(\frac{l_2}{2\pi}\right)^k e^{ik2\pi s/l_2}, \quad \alpha \leqslant s \leqslant \beta,
\end{gathered} \tag{8}$$

причем коэффициенты c_k и d_k связаны условиями:

$$\lim_{|z|>l_2/2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = \lim_{|z|<l_2/2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k \quad \text{при } z \to e^{i2\pi s/l_2} \quad \text{и} \tag{8'}$$
$$s \in [0, l_2] \setminus [\alpha, \beta].$$

Краевые значения (8), (8′) дадут необходимые и достаточные условия того, чтобы в качестве решения обратной краевой задачи получилась трехсвязная область в виде кругового кольца с одним концентрическим разрезом.

Все отмеченные результаты можно легко переформулировать при других параметрах, через которые задаются краевые условия в обратных задачах [6, § 5].

Из теоремы 1 вытекает такой результат для нелинейной краевой задачи Гильберта.

Следствие. *Краевая задача для регулярной функции* $\varphi(z) = u + iv$ *с условием*

$$\Phi(u, v, s) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant l, \tag{9}$$

разрешима в бесчисленном множестве областей. В круге $|z| < l/2\pi$ *эта задача будет разрешима в том и только в том случае, если существует такое краевое условие*

$$\Phi_1(u, v, s) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant l, \tag{10}$$

что совместное решение уравнений (9), (10) *относительно* u, v *приводит к сопряженным тригонометрическим рядам* (5).

Действительно, на соотношения (9), (10) можно смотреть, как на условия, определяющие обратную краевую задачу. Одним из решений этой обратной задачи будет (по условию второй части следствия) решение задачи (5), т. е. круг $|z| < l/2\pi$. Функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям (5) и, следовательно, условиям (9), (10). Итак, одно из решений краевой задачи (9) найдено.

Если задать функцию (10) произвольно, но так, что якобиан $D(\Phi, \Phi_1)/D(u, v) \neq 0$, $0 \leqslant s \leqslant l$, то в качестве решения соответствующей обратной задачи получится некоторая область D и функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая условию (9). Меняя функцию (10), получим бесчисленное множество областей D, в которых существует решение задачи (9).

Недостаток следствия в отношении задачи Гильберта в круге состоит в том, что не определен способ построения конкретной функции Φ_1 (линейной или нелинейной по u, v) для заданной функции Φ.

Результаты для многосвязных областей (теорема 2 и ее аналоги) очевидным образом переносятся на случай нелинейной краевой задачи Гильберта в кольце или кольце с концентрическими разрезами.

§ 2. Вопросы n-листности

Исследование геометрических свойств решений обратных краевых задач можно вести более глубоко, изучая признаки n-листности получаемых отображающих функций. Например, если рассматривать функцию (2), то можно найти разделяющие постоянные в условии Липшица, которые определяют интервалы, связанные с многолистностью функции $z(\zeta)$. Действительно, легко показать существование таких постоянных $N_1(\nu) = N_0(\nu)$, $N_2(\nu), \ldots, N_n(\nu), \ldots$, что условие

$$|P(\theta_1) - P(\theta_2)| \leqslant N |\theta_1 - \theta_2|^\nu$$

будет следующим образом связано с геометрическими свойствами функции $z(\zeta)$: если $N < N_1(\nu)$, то $z(\zeta)$ является однолистной функцией в $|\zeta| \leqslant 1$; если $N_1(\nu) \leqslant N < N_2(\nu)$, то $z(\zeta)$ является не более чем двулистной функцией в $|\zeta| \leqslant 1$, и т. д.; если $N_{n-1}(\nu) \leqslant N < N_n(\nu)$, то $z(\zeta)$ является не более чем n-листной функцией в $|\zeta| \leqslant 1$.

Дадим односторонние оценки для постоянных $N_n(1)$, которые получаются из рассмотрения функции $z_a(\zeta) = a^{-1}e^{a\zeta}$, a — вещественная положительная величина. Для этой функции

$$P_a(\theta) = \ln\left|\frac{dz_a}{d\zeta}\right|\Bigg|_{\zeta=e^{i\theta}} = a\cos\theta \quad \text{и} \quad \left|\frac{dP_a(\theta)}{d\theta}\right| = a|\sin\theta| \leqslant a,$$

т. е. $N = a$. Функция $z_a(\zeta)$ является не более чем n-листной и не менее чем $(n-1)$-листной при $(n-1)\pi \leqslant a < n\pi$. Эти неравенства дают грубые оценки для N_n: $N_n(1) < n\pi$.

По-видимому, улучшение оценок получится с помощью функции $f(\zeta)$, для которой $\ln|f'(e^{i\theta})|$ имеет кусочно-постоянную производную по θ.

Точные значения для постоянных $N_n(\nu)$, $0 < \nu < 1$, пока не найдены.

§ 3. Вариационные обратные задачи

Исследование вопросов однолистной разрешимости обратных краевых задач иногда становится простым, если одно из условий при постановке обратной задачи является вариационным.

Предварительно поясним эквивалентную форму постановки внутренней обратной краевой задачи. Дело в том, что вместо задания двух вещественных функций $u = u(s)$, $v = v(s)$ можно задавать связь граничных значений

$$\Phi(u, v) = 0 \tag{11}$$

и одну из функций, например,

$$u = u(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l, \tag{12}$$

с выполнением условий теоремы о неявной функции $v = v(u)$ в (11). Аналогично можно видоизменить постановку обратной задачи при других параметрах.

Совокупность условий (11), (12) позволяет определить контур L_z и функцию $w = \varphi(z)$ в области D_z с границей L_z, причем функция $\varphi(z)$ на границе удовлетворяет условиям (11), (12). Единственность решения такой задачи обеспечивается при нормировке искомой функции

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = a > 0, \tag{13}$$

причем a определяется после решения.

Однолистность области D_z получается не всегда. Если отбросить условие (12), то наверняка найдутся однолистные области, причем их будет бесчисленное множество. Поэтому нужно найти такую замену для условия (12), чтобы новое условие гарантировало вместе с однолистностью и единственность решения. Приведем несколько задач, в которых новое условие является вариационным.

Задача 1. *Заменим* (12) *условием*:

$$\textit{площадь области } D_z \textit{ минимальна.} \tag{14}$$

Требуется определить область D_z и функцию $\varphi(z)$, которая удовлетворяет условиям (11) и (13) *с заданной величиной a.*

Решение. Предполагаем, что (11) определяет границу области D_w (в плоскости $w = u + iv$), подобной однолистной, и что $0 \in D_w$. Отобразим область D_w на круг $|\zeta| < 1$ с помощью функции $\zeta = \Psi(w)$ $(\Psi(0) = 0,\ \Psi'(0) > 0)$ и обозначим через $\psi(\zeta)$ $(\psi(0) = 0,\ \psi'(0) = b > 0)$ обратную функцию. Пусть $\{z(\zeta)\}$ — семейство функций, регулярных в круге $|\zeta| < 1$ и нормированных условиями $z(0) = 0$, $z'(0) = b/a$, где a — параметр из условия (13). Ясно, что в случае существования решения задачи функция $z_0(\zeta)$, отображающая $|\zeta| < 1$ на искомую область, содержится в этом семействе. Функции $\{ab^{-1}z(\zeta)\}$ являются регулярными в круге функциями с разложением $az(\zeta)/b = \zeta + a_2\zeta^2 + \ldots$. На основании теоремы о минимизации [14, с. 34] имеем, что минимальная площадь D_z получается при $az_0(\zeta)/b = \zeta$.

Итак, искомой областью является круг $|z| < b/a$, искомой функцией является $\varphi(z) = \psi(az/b)$. Так как $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = \psi'(0)\, a/b = a$, то нормировка (13) выполнена. Интересно отметить, что если условие (13) заменить на условие

$$\varphi(0) = 0, \text{ длина } L_z = l, \tag{13$'$}$$

то задача 1 не будет иметь решения, так как минимальная площадь, равная нулю, будет достигаться, когда L_z — двойной криволинейный отрезок. Однако при условии (13′) имеет решение

Задача 1′. *Найти область D_z и функцию $\varphi(z)$, которые удовлетворяют условиям* (11), (13′), *и*

$$\text{площадь области } D_z \text{ максимальна.} \tag{14′}$$

С помощью решения изопериметрической задачи классического вариационного исчисления получим круг $|z| < l/2\pi$ и функцию $\varphi(ze^{i\alpha})$, отображающую этот круг на известную область D_w (α — вещественная постоянная).

Сопоставление результатов решения задач 1 и 1′ звучит несколько парадоксально, так как условия (14) и (14′) противоположны. Ясность вносит анализ условий (13), (13′), геометрическая природа которых различна.

Сведением к изопериметрической задаче решается и

Задача 2′. *Найти область D_z и функцию $\varphi(z)$, которые удовлетворяют условиям* (11), (14′) *и*

$$\varphi(0) = 0, \text{ каждая неизвестная часть кривой } L_z \text{ имеет определенную длину } l_k,\ k = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

а n дополнительных участков кривой L_z задаются.

В качестве кривой L_z получится линия, которая содержит известные дуги, соединенные дугами окружностей, причем каждая дуга окружности имеет длину l_k.

Неясен метод решения задачи типа 2′ с минимальной площадью.

Задача 2. *Найти область D_z, если несколько участков границы задаются, а остальные участки неизвестны, при условиях* (11) *и* (13) *на искомую функцию и при условии* (14).

Решение задачи 2 просто лишь в случае, когда единственный заданный участок границы является отрезком прямой.

Задача 3. *При одном из условий*:

$$A = \inf_{L_z} \sup_{z \in L_z} |z| \text{ достигается на искомой кривой } L_z, \tag{16}$$

$$|z| \leqslant M \text{ и площадь } D_z \text{ максимальна —} \tag{16′}$$

требуется определить область D_z и функцию $\varphi(z)$, которая удовлетворяет условиям (11), (13).

Результат решения задачи 3 совпадает с результатом решения задачи 1, т. е. в качестве области D_z получается круг.

Сформулируем и решим одну задачу для многосвязной области.

Задача 4. ***Найти многосвязную область D_z, содержащую ∞ и обладающую таким свойством: часть плоскости, не заполненная областью D_z, имеет наибольшую возможную площадь. Нужно найти регулярную функцию $\varphi(z)$ с нормировкой $\varphi(\infty) = w_0$, $\varphi'(z) z^2 |_\infty = 1$ по условиям вида (11) на граничных кривых.***

Решение задачи строится с помощью функции $\Phi(w, w_0)$, указанной в [15, с. 272], которая отображает известную многосвязную область в плоскости w на искомую область. Искомая функция является обратной к $z = \Phi(w, w_0)$.

В заключение этого параграфа заметим, что простейшие обратные задачи с вариационным условием, частные случаи которых рассмотрены выше, решаются с помощью приведения к прямым вариационным задачам. Более сложные обратные вариационные задачи приводят к многопараметрическим обратным краевым задачам. Предварительные результаты в этом направлении получил О. В. Захаров [16].

§ 4. О преобразовании неоднолистных решений в однолистные

Если решение внутренней обратной краевой задачи получилось неоднолистным, то можно наметить несколько путей „исправления" полученного решения.

1°. Зададим краевое условие обратной задачи в форме

$$w_\varepsilon(s) = \varphi_\varepsilon(z)\,|_{L_z} = [(1-\varepsilon)\,\varphi_0(z) + \varepsilon\varphi_1(z)]_{L_z} = u_\varepsilon(s) + iv_\varepsilon(s),$$

$$0 \leqslant s \leqslant l.$$

Считаем, что условие с $\varepsilon = 0$ приводит к неоднолистному решению, а условие с $\varepsilon = 1$ — к однолистному решению. Требуется определить минимальную величину ε_0 таким образом, чтобы условие с $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ $(0 < \varepsilon_0 < 1)$ давало однолистное решение. Значение ε_0 обеспечивает минимальное искажение условия $w_0(s)$ при данной функции $w_1(s)$ для достижения однолистного решения задачи.

Аналогичную задачу можно поставить для интегрального представления (2).

2°. По данной обратной краевой задаче построим смешанные задачи, в определенном смысле близкие к данной и допускающие однолистное решение при условии их разрешимости. Для этого возьмем простую замкнутую кривую Γ с длиной l. На участке $0 \leqslant s \leqslant \lambda$ этой кривой зададим условие (11). Участок $\lambda < s < l$ считаем неизвестным и на нем задаем оба условия (11), (12). Нужно определить минимальную величину λ, начиная с которой решение поставленной задачи будет однолистным. Ясно, что при λ, близком к l, решение не может быть неоднолистным, так как вспомогательный контур — простой. Однако такая задача может оказаться неразрешимой [17].

3°. Следуя М. И. Хайкину [17], рассмотрим частный случай задания контура Γ, когда участок $0 \leqslant s \leqslant \lambda$, $\lambda < l/2$, является прямолинейным отрезком ab вещественной оси. Пусть этому отрезку соответствует дуга AB на замкнутом контуре

L_w. Отобразим область D_w на верхний полукруг плоскости ζ так, чтобы дуга AB перешла в диаметр $[-1, 1]$. Так же, как в основной внутренней обратной краевой задаче, найдем связь дуг на верхней полуокружности $s = s(\theta)$. Для функции $\ln \frac{dz}{d\zeta}$ получается смешанная задача: на полуокружности задана вещественная часть этой функции $\ln \frac{ds}{d\theta} = P(\theta)$, на диаметре задана мнимая часть: $\arg \frac{dz}{d\zeta}\Big|_{\zeta=t} = 0, \ -1<t<1$, так как отрезок ab лежит на вещественной оси. С использованием продолжения функции $\ln \frac{dz}{d\zeta}$ по принципу симметрии получим

$$\ln \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta,$$

причем

$$P(-\theta) = P(\theta). \tag{17}$$

Однолистность функции $z(\zeta)$ можно исследовать, привлекая известные условия однолистной разрешимости обратных краевых задач [6, § 7]. В силу дополнительного условия (17), по-видимому, увеличатся разделяющие постоянные в классе Гёльдера для функции $P(\theta)$.

Аналогично рассматривается случай, когда участок $0 \leqslant \leqslant s \leqslant \lambda$ составлен из двух равных прямолинейных отрезков, образующих угол π/n, n — целое число.

В заключение можно выразить уверенность, что в скором времени будут получены результаты, близкие к окончательным, и что это даст возможность ставить и решать новые вопросы в рамках большой проблемы приложений методов геометрической теории функций к краевым задачам.

Автор благодарит участников семинара по краевым задачам за полезные замечания по статье.

Доложено на семинаре 25 января 1972 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нужин М. Т., Тумашев Г. Г. Обратные краевые задачи и их приложения в гидроаэромеханике (обзорный доклад). — Тр. сем. по краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, вып. 7, 1970, с. 18—27.

2. Ильинский Н. Б., Нужин М. Т. Об обратных краевых задачах напорной фильтрации (обзорный доклад). — Тр. сем. по краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, вып. 7, 1970, с. 71—77.

3. Аксентьев Л. А. Геометрические свойства решений краевых задач для аналитических функций. Автореферат докт. дисс. Казань, 1971.

4. Авхадиев Ф. Г. Некоторые достаточные условия однолистности и их применение к обратным краевым задачам. Автореферат канд. дисс., Казань, 1972.

5. Авхадиев Ф. Г. К слабой и сильной проблемам однолистности в обратных краевых задачах. См. наст. сборник.

6. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи. Изд-во Казанск. ун-та, 1965.

7. Андрианов С. Н. О существовании и числе решений обратной краевой задачи теории аналитических функций. — Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, с. 21—30.

8. Гахов Ф. Д. Об обратных краевых задачах. — Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, с. 9—20.

9. Аксентьев Л. А. Об условиях разрешимости и условиях однолистности. — Тр. сем. по обратным краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, вып. 2, 1964, с. 12—20.

10. Авхадиев Ф. Г., Гайдук В. Н. Применение почти выпуклых функций к обратным краевым задачам. — Изв. вузов, Матем., 1968, № 6, с. 3—10.

11. Кудряшов С. Н. Некоторые критерии выпуклости в одном направлении решения внутренней обратной краевой задачи. — Тр. сем. по обратным краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, вып. 2, 1964, с. 78—83.

12. Авхадиев Ф. Г. К достаточным условиям однолистности решений обратных краевых задач. — ДАН СССР, т. 190, № 3, 1970, с. 495—498.

13. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Достаточные условия однолистности аналитических функций. — ДАН СССР, т. 198, № 4, 1971, с. 743—746.

14. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., „Наука“, 1966.

15. Шиффер М. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений. — Приложение к книге Р. Куранта „Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности“. М., ИИЛ, 1953.

16. Хайкин М. И. Теоремы существования для одного класса обратных смешанных краевых задач теории аналитических функций. — Тр. Казанск. авиац. ин-та, вып. 64, 1961, с. 3—24.

16.