

# УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*И. А. Игнатюк, В. А. Малышев, Т. С. Турова*

## Глава I

### ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

#### § 0. Введение

Пусть дана эргодическая цепь Маркова  $L$  со значениями в множестве  $U$ . Это значит, в частности, что для любого начального состояния при  $t \rightarrow \infty$  имеет место сходимость к единственному стационарному распределению на фазовом пространстве этой цепи. Если мы возьмем теперь счетное число независимых экземпляров  $L_x$  цепи  $L$ , занумерованных точками  $x$  решетки  $Z^v$ , т. е. для каждой точки  $x$  задана начальная случайная величина  $\xi_0(x)$  со значениями в  $U$ , то развитие процесса происходит в каждой точке  $x$  независимо. Это определяет довольно простой марковский процесс со значениями в  $U^{Z^v}$ , который также обладает свойством сходимости к единственному стационарному распределению для любого начального состояния. Далее мы рассматриваем слабые возмущения процесса, сохраняющие равноправность точек (трансляционная инвариантность), но вводящие зависимость между процессами в разных точках. Мы доказываем теорему устойчивости: сходимость к единственному стационарному распределению для начальных условий, моменты которых не слишком растут при  $\|x\| \rightarrow \infty$ . В действительности мы в некоторых предположениях относительно цепи  $L$  получаем существенно больше: экспоненциальную сходимость и явный ряд для стационарного распределения.

Эта задача имеет определенную историю. Для конечного  $U$  первые результаты о сходимости были одновременно получены в работах [2], [4], используя метод Добрушина [10]. Новый метод был предложен в [5]. В рамках современной идеологии теории кластерных разложений это было сделано в [27], [25]. Если  $U$  бесконечно, то возникают существенные технические

трудности. Однако случай, когда  $L$  удовлетворяет условию Деблина, прост. Для компактного  $U$  и некомпактного  $U$  в условиях Деблина это было сделано в [38], [1] соответственно. Условие Деблина означает, что в цепи  $L$  имеет место

$$|p_t - \pi| < C e^{-\alpha t}, \quad (D)$$

где  $p_t$  — распределение в момент  $t$ ,  $\pi$  — стационарное распределение, а константы  $C > 0$  и  $\alpha > 0$  не зависят от начального распределения.

Классическим примером, где не выполнено (D), является случайное блуждание на полупрямой (трансляционно-инвариантное с ограниченными скачками). В нем константа  $C$  зависит от того, в какой точке мы находились в начальный момент. Этот пример происходит из простейшей системы массового обслуживания. Множество других систем с этим же свойством дают случайные блуждания в  $Z_+^N$  со свойством максимальной возможной однородности [24].

Для наших цепей мы должны не просто постулировать оценки (D) с константой  $C > 0$ , зависящей от начального распределения, но иметь конструктивный прием получения такой оценки, который в дальнейшем должен быть обобщен на класс процессов с взаимодействием. Наиболее универсальным таким приемом является использование функций Ляпунова [31], [24]. И мы постулируем, что для нашей цепи такая функция построена. Укажем, что другой подход — использование мажорант — развивался в [20].

Мы рассматриваем два существенно технически различных случая:

1) счетные цепи  $L$  с дискретным временем в общем случае, задавая функции Ляпунова аксиоматически; случай непрерывного времени вносит, конечно, ряд модификаций (см. [14]), мы его опускаем в нашем обзоре;

2) системы стохастических уравнений Ито с полиномиальным ростом коэффициентов сноса. Особенность этого случая состоит в том, что мы исследуем сходимость конечномерных плотностей, и нужны довольно тонкие оценки плотностей в конечномерном случае.

Техника довольно громоздка, но общая схема доказательств проста. Мы получаем формальные ряды интегрированием уравнений Колмогорова. Эти ряды являются аналогами кластерных разложений для данного случая. Коэффициенты этих рядов нумеруются диаграммами. Ненулевой вклад дают лишь «связные» диаграммы, число которых оценивается  $A^n$ , где  $n$  — число ребер диаграммы. Факт связности здесь чрезвычайно прост и не требует никакой техники семинвариантов. Для диаграммы мы получаем оценки типа  $\gamma^t (A\varepsilon)^n$ ,  $0 < \gamma < 1$ , где  $t$  — «высота» диаграммы,  $\varepsilon$  — параметр взаимодействия, что дает сходимость нужного нам ряда. Основные трудности возникают

при получении указанной оценки вклада диаграммы. Эти оценки получаются из оценок одномерной плотности, ее производных и оценок типа  $(D)$  с указанием зависимости константы  $C$  от точек  $u, v$  в переходной плотности  $p(t, u, v)$ . Оценку типа  $(D)$  мы используем для длинных ребер диаграммы.

Случай ограниченных коэффициентов сноса в уравнениях Ито был рассмотрен в [26]. Здесь мы подробно рассматриваем случай их полиномиального роста.

Отметим еще раз, что мы рассматриваем здесь случай малого возмущения независимых процессов. Другой случай — малые возмущения гауссовских (линейных) систем. Чисто гауссовские системы рассматривались в [12], [15], [16], [30], [34]. Малые возмущения гауссовских систем Ито возникают, например, в так называемом методе стохастического квантования [35]. Однако до последнего времени все строгие результаты для метода стохастического квантования были получены в конечном объеме пространства. Доказательство экспоненциальной сходимости соответствующих систем см. в [35]. Там же построена теория уравнения Ито в грасмановом случае и доказана экспоненциальная сходимость. Возмущения гауссовых систем особо интересны, т. к. позволяют сделать предельный переход от решетки к непрерывному пространству.

Кроме метода стохастического квантования, в последнее время такие процессы рассматриваются в модельных задачах магнитной гидродинамики ([21], [15]) и в сетях связи ([20], [14]).

Теоремы существования и единственности бесконечномерных уравнений Ито см. в [9], [21], [28], [33].

Надо сказать о результате Т. В. Гири [8] относительно сходимости к равновесию для систем в бесконечном объеме. Его отличие от нашего случая состоит в использовании свойства монотонности. Остальные результаты относятся к конечному объему. Результат Гири, по-видимому, связан с теми доказательствами сходимости общих процессов с локальным взаимодействием [36], которые основаны на некоторых свойствах монотонности (см. также [37]), но из которых нельзя извлечь даже экспоненциальной скорости сходимости.

Для чтения статьи достаточно базовых понятий из теории цепей Маркова.

## § 1. Формулировка основных результатов

**1. Локально взаимодействующие цепи Маркова со счетным множеством состояний и дискретным временем.** Здесь  $U$  счетно; пусть  $p(u, v)$ ,  $u, v \in U$  — вероятность перехода в счетной цепи Маркова  $L$  за один шаг из  $u$  в  $v$ .

Относительно цепи Маркова  $L$  предполагаются условия,

обеспечивающие ее эргодичность и достаточно быструю сходимость к стационарному распределению [24]:

$L$  — неприводима и непериодична;  $(A_0)$   
 для цепи  $L$  построена функция Ляпунова  $(A_1)$   
 $f: U \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что

а) ряд  $\sum_f \exp\{-bf\}$ , где суммирование проводится по всем значениям функции  $f$ , сходится при любом  $b > 0$ , и для любого  $r \in \mathbb{R}_+$  множество  $\{u \in U \mid f(u) \leq r\}$  конечно;

б)  $p(u, v) \neq 0$  только в том случае, если

$$|f(u) - f(v)| \leq M$$

для всех  $u, v \in U$ , где  $M$  — некоторая положительная константа;

в) для всех  $u \in U \setminus U_0$

$$\sum_{v \in U} p^{(k(u))}(u, v) f(v) - f(u) \leq -\delta,$$

где множество  $U_0 \subset U$  конечно,  $\delta > 0$  — фиксировано,  $k$  — ограниченная функция на  $U$  со значениями  $1, 2, 3, \dots$ ,  $p^{(k)}(u, v)$  — вероятность перехода цепи  $L$  из  $u$  в  $v$  за  $k$  шагов;  $u, v \in U$ .

Многочисленные примеры таких цепей, например, в [24].

Рассмотрим на  $U$  дискретную топологию и на  $U^{\mathbb{Z}^v}$  топологию тихоновского произведения. Пусть  $\mathcal{B}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $U^{\mathbb{Z}^v}$  в этой топологии.

Определим марковский процесс  $\xi_t = (\xi_t(z), z \in \mathbb{Z}^v)$ ,  $t \in \mathbb{Z}_+$ , со значениями в  $(U^{\mathbb{Z}^v}, \mathcal{B})$ , задавая:

1. распределение случайных величин  $\xi_0(z)$ ,  $z \in \mathbb{Z}^v$ , на  $(U^{\mathbb{Z}^v}, \mathcal{B})$ , т. е. начальное распределение;

2. переходные вероятности, определенные так, что для каждого  $t > 0$  при любых фиксированных значениях  $\{\xi_t(z) \in U, z \in \mathbb{Z}^v\}$  случайные величины  $\xi_{t+1}(z)$ ,  $z \in \mathbb{Z}^v$ , условно независимы для разных  $z$  и

$$P\{\xi_{t+1}(z) = u \mid \xi_t\} = p(\xi_t(z), u) + \varepsilon c(\xi_t(z + Q), u), \quad (1.1.1)$$

где множество  $Q \subset \mathbb{Z}^v$ ,  $|Q| < \infty$ , фиксировано,  $0 \in Q$ ;

$$z + Q = \{z + l \mid l \in Q\},$$

$$\xi_t(z + Q) = (\xi_t(x), x \in z + Q);$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$  — константа взаимодействия, функция  $c: \mathbb{R}^{|Q|+1} \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условиям:

$$[0 \leq p(u_0, v) + \varepsilon c(u_Q, v) \leq 1 \quad (A_2)$$

для всех  $v \in U$ ,  $u_Q \in U^{|Q|}$  и  $|\varepsilon| < \varepsilon'$ ,  $\varepsilon'$  — некоторая положительная константа;

$$\sum_{u \in U} c(u_Q, u) = 0 \quad (A_3)$$

для любых  $u_Q \in U^{|Q|}$ .

Условия  $A_2$  и  $A_3$  являются необходимыми и достаточными для того, чтобы (1.1.1) было распределением вероятностей на  $U$  при любых  $(\xi_t(z) \in U, z \in Z^v), |\varepsilon| < \varepsilon'$ .

Таким образом процесс  $\xi_t = (\xi_t(z), z \in Z^v), t \in Z_+$ , является «малым возмущением» набора независимых экземпляров счетной цепи Маркова  $L$ , занумерованных точками решетки  $Z^v$ . Для функции  $c$  дополнительно предполагается:

$$|c(u_Q, u)| \leq p^{(v)}(u_0, u) \quad (A_4)$$

для всех  $u \in U, u_Q \in U^{|Q|}$ , и некоторого  $\tau > 0$ .

Теорема 1.1.1. Пусть выполнены условия  $A_0 - A_4$ , и пусть совместное распределение случайных величин  $\xi_0(z), z \in Z^v$ , удовлетворяет условию

$$M \left\{ \exp \left( \alpha_0 \sum_{j=1}^n f(\xi_0(z_j)) \right) \right\} \leq C_0^n \quad (A_5)$$

для любых  $n \geq 1$ , попарно различных  $z_1, \dots, z_n \in Z^v$ , где  $\alpha_0, C_0 > 0$  — некоторые константы.

Тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , для любых попарно различных  $z_1, \dots, z_k \in Z^v, k \geq 1$ , существуют

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \{ \xi_t(z_1) = u_1, \dots, \xi_t(z_k) = u_k \} = p_\infty^{z_1, \dots, z_k}(u_1, \dots, u_k)$$

и задают предельное стационарное распределение. Более того, эти пределы являются аналитическими функциями по  $\varepsilon$  в области  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , и для любого  $t \in Z_+$

$$\begin{aligned} |P \{ \xi_t(z_1) = u_1, \dots, \xi_t(z_k) = u_k \} - p_\infty^{z_1, \dots, z_k}(u_1, \dots, u_k) | &\leq \\ &\leq C_1^k e^{-\alpha_1 t} \end{aligned}$$

для некоторых констант  $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_0) > 0, C_1 = C_1(\alpha_0, C_0) > 0$  при всех  $k \geq 1, z_1, \dots, z_k \in Z^v, z_i \neq z_j$  при  $1 \leq i < j \leq k$ .

**2. Диффузионные процессы с локальным взаимодействием.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — некоторое вероятностное пространство с потоком  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

Рассмотрим бесконечномерный диффузионный процесс  $\xi_t = (\xi_t(z), z \in Z^v) \in \mathbb{R}^{Z^v}$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , определенный системой стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\xi_t(z) = [ -P(\xi_t(z)) + \varepsilon b(\xi_t(z+l_1), \dots, \xi_t(z+l_N)) ] dt + \\ + \sigma(\xi_t(z)) d\omega_t(z) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

где  $\omega_t(z), t \geq 0, z \in Z^v$  — стандартные винеровские процессы, согласованные с  $\mathcal{F}_t$  и независимые для разных  $z \in Z^v, Q = \{l_1=0, l_2, \dots, l_N\}$  — подмножество  $Z^v$ ; с начальным условием

$$\xi_0 = \eta = (\eta(z), z \in Z^v), \quad (1.1.2')$$

согласованным с  $\mathcal{F}_0$ .

Условие  $(B_1)$ : функция  $P(u)$  как при  $u > u_0 > 0$ , так и при

$-u > u_0 > 0$  ограничена сверху и снизу многочленами нечетной степени  $n \geq 1$  с положительными коэффициентами при старшем члене, и  $P(u)$  имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, причем для любого  $\alpha > 0$

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} |P'''(u)| e^{-\alpha u^2} = 0. \quad (1.1.3)$$

Отметим, что условие  $(B_1)$  обеспечивает эргодичность каждого процесса  $\xi_t(z)$ ,  $z \in Z^v$ , при  $\varepsilon = 0$ .

Условие  $(B_2)$ :

$$|b(u_1, \dots, u_N)| \leq B \sum_{i=1}^N |u_i|^{n-\delta}$$

для некоторых  $B, \delta > 0$  (без ограничения общности можно считать, что  $0 < \delta < 1$ ), и функция  $b$  имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, причем для любого  $\alpha > 0$

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i, j, k \leq N} \left| \frac{\partial^3 b(u_1, \dots, u_N)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \right| e^{-\alpha \|u\|^2} = 0. \quad (1.1.4)$$

Условие  $(B_3)$ : функция  $\sigma$  отделена от нуля и от бесконечности, т. е.

$$0 < c_1 \leq \sigma(u) \leq c_2 < \infty, \quad u \in \mathbb{R},$$

для некоторых  $c_2 \geq c_1 > 0$  и бесконечно дифференцируема.

Условие  $(B_4)$ : функция  $\left| \sigma'(u) \int_0^u P(v) dv \right|$  равномерно ограничена по  $u \in \mathbb{R}$ , и  $P'(u) - \frac{P^2(u)}{\sigma^2(u)} \leq -Au^{2n}$ ,  $|u| > u_1$ , для некоторых  $A, u_1 > 0$ .

Условие  $(B_5)$ : для каждого  $z \in Z^v$  случайные величины  $\eta(z)$  ограничены, т. е.

$$\eta(z) \in [-C; C], \quad C > 0, \quad z \in Z^v.$$

Одним из возможных способов определения процесса (1.1.2), (1.1.2') является рассмотрение конечномерного урезания  $\xi_t^\Lambda$  процесса (1.1.2) с нулевыми граничными условиями, т. е. систему (1.1.2) мы рассматриваем лишь для  $z \in \Lambda \subset Z^v$  ( $|\Lambda| < \infty$ ) и полагаем  $\xi_t(z) = 0$ ,  $z \notin \Lambda$ . (Существование и единственность решения такой системы доказаны, например, в [21]). Далее можно доказать, что  $\xi_t^\Lambda$  сходится при всех  $t$  в смысле конечномерных распределений при  $\Lambda \uparrow Z^v$ .

Фактически из наших рассуждений будет следовать существование процесса (1.1.2).

Теорема 1.1.2. Пусть выполнены условия  $(B_1) - (B_5)$ . Тогда для каждого конечного  $X \subset Z^v$  и  $t > 0$  существует плот-

ность распределения

$$p_{\eta}(t, v_x), v_x \in \mathbb{R}^{|X|},$$

вектора  $(\xi_t(z), z \in X)$ , где  $\xi_t$  — процесс, определенный в (1.1.2), (1.1.2'), причем существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  при  $t \rightarrow \infty$  плотность  $p_{\eta}(t, v_x)$  экспоненциально сходится к некоторой плотности  $p(v_x)$  независимо от начального распределения  $\eta$ :

$$|p_{\eta}(t, v_x) - p(v_x)| < \theta^{|X|} e^{-\gamma t}$$

при  $t \geq t_0$ ,  $t_0, \theta = \theta(C), \gamma > 0$  — некоторые постоянные.

Более того, при  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  функция  $p(v_x)$  аналитически зависит от  $\varepsilon$ .

Сформулируем еще две теоремы, дополняющие результат теоремы 1.1.2.

**Теорема 1.1.3.** В условиях теоремы 1.1.2 при  $n=1$  можно положить в условии  $(B_2)$   $\delta=0$ , и результат останется справедливым.

**Теорема 1.1.4 ([26]).** Пусть для функций  $P, b$  из уравнения (1.1.2) выполнены условия: найдутся такие  $C_0, B, u_0 > 0$ , что

$$P(u) \leq -C_0, u > u_0,$$

$$P(u) \geq C_0, u < -u_0; |P(u)|, |b(\bar{u})| \leq B, u \in \mathbb{R}, \bar{u} \in \mathbb{R}^N,$$

и выполнены условия  $(B_3) - (B_5)$ , (1.1.3) и (1.1.4). Тогда все утверждения теоремы 1.1.2 справедливы.

## Глава 2

### КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

#### § 1. Диаграммы и кластеры

Определим понятие диаграммы в двух случаях по-разному. Диаграмма есть пара из множества точек и множества отрезков.

Пусть  $t \in \{1, 2, \dots\}$ , и пусть  $A = \{(z_i, s_i), i=1, \dots, k\}$  для некоторого  $k \geq 1$  — подмножество  $Z^v \times \{1, 2, \dots, t-1\}$ . Точками диаграммы  $D_1(t, A)$  будут точки множества

$$D_1(A) = A \cup \{z+Q\} \times \{\tau-1\} | (z, \tau) \in A.$$

Пусть  $t > 0$ , и пусть  $A = \{(z_i, s_i), i=1, \dots, k\}$  для некоторого  $k \geq 1$ ,  $z_i \in Z^v, i=1, \dots, k$ ,  $0 \equiv s_{k+1} < s_k < \dots < s_1 < s_0 \equiv t$ . Точками диаграммы  $D_2(t, A)$  будут точки множества

$$D_2(A) = \{(z_i, s_{i-1}), \{z_i+Q\} \times \{s_i\}, i=1, \dots, k\}.$$

При этом элементы множества  $A$  будем называть главными точками диаграммы.

Отрезком диаграммы  $D_i(t, A)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , является любое множество

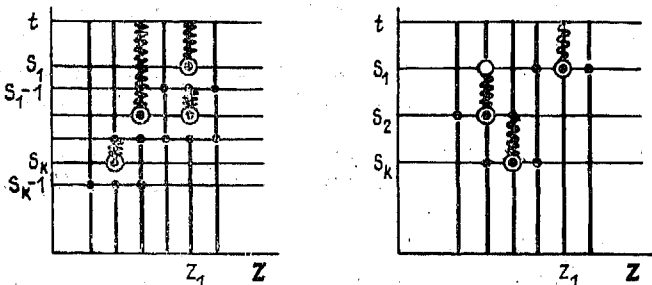
$$I(z, \tau, \tau') = \{z\} \times [\tau, \tau'], \quad 0 \leq \tau < \tau' \leq t,$$

содержащее хотя бы одну точку диаграммы  $D_i(t, A)$ , и такое, что

$$I(z, \tau, \tau') \cap \{D_i(t, A) \cup \{Z^v \times \{0, t\}\}\} = \{(z, \tau), (z, \tau')\},$$

причем  $(z, \tau') \in A$ , если  $i=1$ .

Точки  $(z, \tau)$  и  $(z, \tau')$  будем называть, соответственно, нижним и верхним концами отрезка. Главным отрезком назовем отрезок диаграммы, нижний конец которого является главной точкой (см. рис.).



• и ○ — точка диаграммы  
 ⊙ — главная точка диаграммы

I — отрезок  
 ≡ — главный отрезок

Определим понятие кластера. Пусть  $X$  — произвольное конечное подмножество  $Z^v$ ,  $k \geq 1$ ,  $t > 0$ , — произвольно фиксированы.

$(X, t)$ -кластером в  $Z^v \times \mathbb{R}_+$  мощности  $k$  назовем любое множество точек

$$\{(z_i, s_i), i=1, \dots, k\}, \quad z_i \in Z^v, \quad t > s_i > 0, \quad i=1, \dots, k,$$

такое, что

1)  $z_i \in X$  для всех индексов  $1 \leq i \leq k$ , если  $s_i = \max \{s_1, \dots, s_k\}$ ;

2)  $z_i \in \bigcup_{j: s_j > s_i} \{z_j + Q\} \cup X$  для остальных индексов  $1 \leq i \leq k$ .

## § 2. Кластерное разложение

В этом параграфе, используя диаграммную технику, мы преобразуем ряды для конечномерных распределений в наших случаях.

1. Цепи Маркова с дискретным временем. Пусть  $\xi_t$  — процесс, определенный в гл. 1, § 1, п. 1.

Определение. Пусть  $(x, t) \in Z^v \times Z_+$ . Конусом с вершиной в точке  $(x, t)$  назовем множество  $\Lambda(x, t) \subset Z^v \times Z_+$ , определя-

емое индуктивно так:

$$\Lambda(x, 0) = \{(x, 0)\},$$

$$\Lambda(x, t+1) = \bigcup_{y \in Q} \Lambda(x+y, t) \cup \{(x, t+1)\}.$$

Пусть  $\Lambda_0(x, t) = \Lambda(x, t) \setminus (Z^v \times \{0\})$ .

Для каждого  $X \subset Z^v$ ,  $|X| < \infty$ ,  $t \in Z_+$ ,  $u_x = (u_x, x \in X) \in U^{|X|}$  по формуле полной вероятности из (1.1.1) получаем:

$$P\{\xi_t(x) = u_x, x \in X\} = \sum'_u \left[ \prod_{(y, \tau)} (p(u_y^{\tau-1}, u_y^\tau) + ec(u_{y+Q}^{\tau-1}, u_y^\tau)) \right] \times$$

$$\times P\{\xi_0(y) = u_y^0, (y, 0) \in \bigcup_{x \in X} \Lambda(x, t)\}, \quad (2.2.1)$$

где  $\sum'_u$  — сумма по всем конфигурациям:

$\bar{u} = \{u_y^\tau \in U \mid (y, \tau) \in \bigcup_{x \in X} \Lambda(x, t)\}$  такое, что  $u_x^t = u_x, x \in X$ ;

$\Pi$  — произведение по всем точкам  $(y, \tau) \in \bigcup_{x \in X} \Lambda(x, t)$ .

Раскроем в (2.2.1) скобки. Тогда

$$P\{\xi_t(x) = u_x, x \in X\} = \sum'_u \sum_A \varepsilon^{|A|} \left[ \prod_{(y, \tau) \in \bar{A}} p(u_y^{\tau-1}, u_y^\tau) \right] \times$$

$$\times \left[ \prod_{(y, \tau) \in A} c(u_{y+Q}^{\tau-1}, u_y^\tau) \right] P\{\xi_0(y) = u_y^0, (y, 0) \in \bigcup_{x \in X} \Lambda(x, t)\}, \quad (2.2.2)$$

где  $\sum_A$  — сумма по всем подмножествам  $A \subseteq \bigcup_{x \in X} \Lambda_0(x, t)$ ;

$\bar{A} = \bigcup_{x \in X} \Lambda_0(x, t) \setminus A$ .

Рассмотрим для каждого  $A \subseteq \bigcup_{x \in X} \Lambda_0(x, t)$  величины

$$K_A(u_x, t) = \sum'_u \left[ \prod_{(y, \tau) \in \bar{A}} p(u_y^{\tau-1}, u_y^\tau) \right] \left[ \prod_{(y, \tau) \in A} c(u_{y+Q}^{\tau-1}, u_y^\tau) \right] \times$$

$$\times P\{\xi_0(y) = u_y^0, (y, 0) \in \bigcup_{x \in X} \Lambda(x, t)\}.$$

Учитывая условие  $(A_3)$  на функцию  $c$  (Гл. 1, § 1, п. 1) и воспользовавшись определением кластера, нетрудно понять, что

$$K_A(u_x, t) = 0$$

для всех  $u_x \in U^{|X|}$ , если множество  $A \neq \emptyset$  не является  $(X, t)$ -кластером. Следовательно,

$$P\{\xi_t(x) = u_x, x \in X\} = \sum_{A - (X, t)\text{-кластер}} \varepsilon^{|A|} K_A(u_x, t) + K_\emptyset(u_x, t), \quad (2.2.3)$$

где

$$K_{\emptyset}(u_X, t) = \sum_{u_x \in U, x \in X} \left[ \prod_{x \in X} p^{(t)}(u_x^0, u_x) \right] P \{ \xi_0(x) = u_x^0, x \in X \},$$

и для каждого  $(X, t)$ -кластера  $A$  величины  $K_A(u_X, t)$  на языке диаграмм выражаются так:

$$K_A(u_X, t) = \sum_u \left[ \prod^1 (c(u_{y+Q}^{\tau-1}, u_y^{\tau}) p^{(\tau-\tau)}(u_y^{\tau}, u_y^{\tau})) \right] \times \\ \times \left[ \prod^2 p^{(\tau-\tau)}(u_y^{\tau}, u_y^{\tau}) \right] P \{ \xi_0(y) = u_y^0, (y, 0) \in G(A) \cup \{X \times \{0\}\} \}, \quad (2.2.3')$$

где  $\prod^1$  — произведение по всем главным отрезкам  $I(y, \tau, \tau')$  диаграммы  $D_1(t, A)$ ;

$\prod^2$  — произведение по всем остальным отрезкам  $I(y, \tau, \tau')$  диаграммы такое, что  $(y, \tau') \in D_1(A)$ .

$\sum_u$  — сумма по всем конфигурациям

$$\bar{u} = \{ u_y^{\tau} \in U \mid (y, \tau) \in D_1(A) \cup \{X \times \{0\}\} \cup G(A), u_y^t = u_y, y \in X \},$$

$G(A)$  — проекция множества  $D_1(A)$  на слой  $Z^v \times \{0\}$ :

$$G(A) = \{ (y, 0) \mid \exists \tau > 0 : (y, \tau) \in D_1(A) \}.$$

## 2. Диффузионные процессы с локальным взаимодействием.

Получим разложение в ряд плотности конечномерного распределения для этого случая.

Пусть  $X \subset \Lambda \subset Z^v$  произвольно фиксированы,  $|\Lambda| < \infty$ . Из теоремы Гирсанова [22] следует, что процесс  $(\xi_t^{\Lambda}(z), z \in X)$  (процесс  $\xi_t^{\Lambda}$  определен в гл. 1, § 1 п. 2) обладает плотностью), — обозначим ее через  $p^{\Lambda}(t, v_X)$ , которая удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t} p^{\Lambda}(t, v_X) = \\ = - \sum_{z \in X} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_z} [-P(v_z) p^{\Lambda}(t, v_X)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} [\sigma(v_z) p^{\Lambda}(t, v_X)] \right\} - \\ - \varepsilon \sum_{z \in X} \int_{R \setminus \{(z+Q) \setminus X\}} \delta(v_{\{z+Q\} \setminus \Lambda}) \frac{\partial}{\partial v_z} [b(v_{z+Q}) p(t, v_X \cup \{z+Q\})] \times \\ \times dv_{\{z+Q\} \setminus X}, \quad (2.2.4)$$

где  $\delta(v_Y)$  —  $\delta$ -функция на  $R^Y$ ,  $Y \subset Z^v$ ,  $|Y| < \infty$ .

Обозначим далее через  $H_0$  и  $H_1^{\Lambda}$  операторы, действующие на  $|Y|$  — частичные плотности  $p^{\Lambda}(t, v_Y)$ ,  $Y \subset \Lambda$  — произвольно, следующим образом:

$$H_0 p^{\Lambda}(t, v_Y) = - \sum_{z \in Y} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_z} [-P(v_z) p^{\Lambda}(t, v_Y)] + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} [\sigma(v_z) p^\Lambda(t, v_x)] \} \quad (2.2.5)$$

$$H_1^\Lambda p^\Lambda(t, v_x) = - \sum_{z \in Y} \int_{R^{|z+Q|} \setminus X} \delta(v_{\{z+Q\} \setminus \Lambda}) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial v_z} \{b(v_{z+Q}) p(t, v_{X \cup \{z+Q\}})\} dv_{\{z+Q\} \setminus X}.$$

Тогда уравнение (2.2.4) можно переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial t} p^\Lambda(t, v_x) = (H_0 + \varepsilon H_1^\Lambda) p(t, v_x). \quad (2.2.6)$$

Обозначим через  $e^{H_0 t}$ ,  $t \geq 0$ , полугруппу операторов, связанную с «невозмущенным» процессом  $\xi_t^\Lambda$  (т. е. в (2.2.4)  $\varepsilon = 0$ ). Тогда решение уравнения (2.2.4), обозначим его через  $p_0^\Lambda(t, v_x)$  при  $\varepsilon = 0$ , можно представить в виде:

$$p_0^\Lambda(t, v_x) = e^{H_0 t} p^\Lambda(0, v_x)$$

либо

$$p_0^\Lambda(t, v_x) = \int_{R^{|X|}} p_0^\Lambda(t, u_x, v_x) p^\Lambda(0, u_x) du_x, \quad (2.2.7)$$

где  $p_0^\Lambda(t, u_x, v_x)$  — фундаментальное решение уравнения (2.2.4) при  $\varepsilon = 0$ , т. е. плотность переходной вероятности «невозмущенного» процесса  $(\xi_t^\Lambda(z), z \in X)$ .

Ясно, что для всех  $\Lambda$ ,  $\Lambda' \supset X$ ,  $|\Lambda|$ ,  $|\Lambda'| < \infty$ ,

$$p_0^\Lambda(t, v_x) = p_0^{\Lambda'}(t, v_x).$$

Поэтому далее мы будем использовать обозначение  $p_0(t, v_x)$  (и  $p_0(t, u_x, v_x)$ ) для плотности (переходной плотности) процесса  $(\xi_t(z), z \in X)$  при  $\varepsilon = 0$ .

Уравнение (2.2.4) при  $\varepsilon \neq 0$  эквивалентно уравнению

$$p^\Lambda(t, v_x) = e^{H_0 t} p^\Lambda(0, v_x) + \varepsilon \int_0^t e^{H_0(t-s)} H_1^\Lambda p^\Lambda(s, v_x) ds. \quad (2.2.8)$$

Очевидно, что решение уравнения (2.2.8) можно представить в виде

$$p^\Lambda(t, v_x) = e^{H_0 t} p^\Lambda(0, v_x) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} e^{H_0(t-s_1)} H_1^\Lambda e^{H_0(s_1-s_2)} \dots \\ \dots H_1^\Lambda e^{H_0 s_k} p^\Lambda(0, v_x) ds, \quad (2.2.9)$$

если последний ряд сходится при всех  $t > 0$ ,  $v_x \in R^{|X|}$ .

Далее мы докажем равномерную сходимость ряда (2.2.9) по  $\Lambda$ , что позволит перейти к пределу при  $\Lambda \uparrow Z^v$ . Иными словами, мы построим процесс  $\xi_t$ , определив все его конечномерные распределения.

Центральным пунктом доказательства равномерной сходимости является кластерное разложение.

В этом случае удобнее воспользоваться следующим понятием кластера в  $Z^v$ .

Пусть  $X$  — некоторое конечное подмножество  $Z^v$ ,  $k \geq 1$ . Назовем  $X$ -кластером в  $Z^v$  мощности  $k$  любое упорядоченное множество точек из  $Z^v$   $z = (z_1, \dots, z_k)$  такое, что

- 1)  $z_i \in X$ ;
- 2)  $z_i \in \bigcup_{j=1}^{i-1} \{z_j + Q\} \cup X$ .

Ясно, что если  $z$  —  $X$ -кластер в  $Z^v$  мощности  $k$ , то для произвольного  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_k)$ ,  $t > s_1 > \dots > s_k > 0$  множество  $(\bar{z}, \bar{s}) = \{(z_i, s_i), i=1, \dots, k\}$  является  $(X, t)$ -кластером в  $Z^v \times \mathbb{R}_+$  мощности  $k$ . Обратное утверждение также верно.

Теперь, используя представление (2.2.7), как и в предыдущем случае, ряд (2.2.9) можно переписать на языке диаграмм так:

$$p^\Lambda(t, v_X) = M p_0(t, \eta_X, v_X) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X), \quad (2.2.10)$$

здесь для каждого  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X) = & \sum_{\substack{z\text{-}X\text{-кластер} \\ \text{мощности } k}} \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} \int_0^R \dots \int_0^R \left\{ \prod_{\substack{(y,j):(y,s_j) \in \\ \in \Lambda(z) \setminus \Lambda}} \delta(u_y^j) \right\} \times \\ & \times \left\{ \prod_1 b(u_y^j + Q) \frac{\partial}{\partial u_y^j} p_0(s_{j-1} - s_j, u_y^j, u_y^{j-1}) \right\} \left\{ \prod_2 p_0(s_i - s_j, u_y^j, u_y^i) \right\} \times \\ & \times \left\{ \prod_{y \in X \setminus \Lambda(z)} p_0(t, u_y^{k+1}, v_y) \right\} P_{\eta_\Lambda} (du_{\Lambda(z) \cup X \cap \Lambda}^{k+1}) \prod_3 du_y^j, \end{aligned}$$

где для каждого  $z$

$$\Lambda(z) = \bigcup_{i=1}^k \{z_i + Q\}; \quad \eta_\Lambda = (\eta_z, z \in \Lambda)$$

$$u_y^0 = v_y, \quad y \in X;$$

и для всех  $s = (s_1, \dots, s_k)$ ,  $t = s_0 > s_1 > \dots > s_k > s_{k+1} = 0$ ,

$$(\bar{z}, \bar{s}) = \{(z_i, s_i), i=1, \dots, k\},$$

$\prod_1$  — произведение по всем главным отрезкам  $I(y, s_j, s_{j-1})$  диаграммы  $D_2(t, (\bar{z}, \bar{s}))$ ;

$\Pi_2$  — произведение по всем остальным отрезкам  $I(y, s_j, s_i)$  таким, что  $(y, s_i) \in D_2(\bar{z}, \bar{s}) \cup \{X \times t\}$ ;

$\Pi_3$  — произведение по всем точкам  $(y, s_j)$  диаграммы.

(При выводе этого ряда мы воспользовались тем фактом, что  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial u} p_0(t, u, v) dv \equiv 0, u \in \mathbb{R}, t > 0.$ )

Таким образом, из приведенных (формальных) разложений ясно, что для дальнейшего изучения взаимодействующих процессов  $\xi_t$  необходимо рассмотреть свойства «невозмущенных» процессов. Невозмущенным (одномерным) процессам и посвящена следующая глава.

### Глава 3

#### ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕВОЗМУЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

##### § 1. Экспоненциальная сходимость переходных вероятностей цепи Маркова с дискретным временем

Рассмотрим счетную цепь Маркова  $L = \{\eta_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$ , определенную в главе 1, § 1, п. 1.

Утверждение 3.1.1. Для любого  $h > 0$  можно указать такие  $\beta_1 > 0$  и  $d_1 > 0$ , что для любого  $t \in \mathbb{Z}_+$

$$P\{\eta_\tau \in U_0, \tau \in \mathbb{Z}_+, 0 < \tau \leq t \mid \eta_0 = u\} \leq d_1 e^{hf(u) - \beta_1 t},$$

где  $f, U_0$  — из условия (A<sub>1</sub>).

Утверждение 3.1.2. Существуют такие постоянные  $q, \beta_2, d_2 > 0$ , что для любого  $u \in U, t \in \mathbb{Z}_+$  при  $t > q^{-1}f(u)$

$$|p^{(t)}(u, u_0) - \pi_0(u_0)| \leq d_2 e^{-\beta_2 t},$$

где  $u_0 \in U_0$  и  $\{\pi_0(u), u \in U\}$  — стационарные вероятности для цепи  $L$ .

Оба эти утверждения доказаны в [24].

Замечание 3.1.1. Заметим, что в условии (A<sub>1</sub>) в) без ограничения общности можно считать, что  $|U_0| = 1$  и  $U_0 = \{u_0\}$ .

Действительно, цепь Маркова  $L$  неприводима и непериодична, значит существуют  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  и  $\delta_0 > 0$  такие, что для любого  $u \in U_0$

$$p^{(n_0)}(u, u_0) \geq \delta_0 > 0.$$

Поэтому, если для функции  $f$  множество  $U_0 \subset U$  состоит более чем из одной точки, можем рассмотреть другую функцию

$$f_1 : U \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

ПОЛОЖИВ

$$f_1(u_0) = f(u_0),$$

$$f_1(u) = f(u) + \frac{Mn_0}{\delta_0} + \delta_1 + f(u_0), \quad u_0 \neq u \in U,$$

где  $\delta_1 > 0$  и  $M > 0$  — константа из условия А<sub>1</sub>б), а также вместо функции  $k$  — функцию  $k_1 : U \rightarrow \mathbb{Z}_+$ ,

$$k_1(u) = \begin{cases} k(u), & u \in U \setminus U_0, \\ n_0, & u \in U_0. \end{cases}$$

Тогда для любого  $u \in U$ ,  $u \neq u_0$

$$\sum_{v \in V} p^{(k_1(u))}(u, v) f(v) - f(u) \leq -\delta', \quad \delta' > 0.$$

При этом в условии ограниченности «скачков» (А<sub>1</sub>б)) изменится лишь константа  $M$ .

Отметим, что утверждение 3.1.2 эквивалентно следующему утверждению.

Утверждение 3.1.2'. Для любого  $h > 0$  можно указать такие  $\beta'_2 > 0$  и  $d'_2 > 0$ , что для любого  $u \in U$  и  $t \in \mathbb{Z}_+$

$$|p^{(t)}(u, u_0) - \pi_0(u_0)| \leq d'_2 \exp\{hf(u) - \beta'_2 t\}.$$

Рассмотрим теперь важные следствия из этих утверждений.

Утверждение 3.1.3. Для любого  $h > 0$  можно указать такие константы  $\beta_3 > 0$  и  $d_3 > 0$ , что для любого  $u \in U$  и любого набора  $t_j$ ,  $t'_j \in \mathbb{Z}_+$ ,  $j = 0, \dots, N$ ,  $0 \leq t_0 \leq t'_0 \leq \dots \leq t_N \leq t'_N$  имеет место неравенство

$$\begin{aligned} P\{\eta_t \neq u_0, t_j \leq t \leq t'_j, j = 0, \dots, N, t \in \mathbb{Z}_+ | \eta_0 = u\} &\leq \\ &\leq d_3^{N+1} \exp\left\{hf(u) - \beta_3 \sum_{j=1}^N (t'_j - t_j)\right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. При  $N=0$  это утверждение легко следует в силу замечания 3.1.1 из утверждения 3.1.1, поскольку

$$\begin{aligned} &P\{\eta_\tau \neq u_0, \tau = t_0, \dots, t'_0 | \eta_0 = u\} \leq \\ &\leq P\{\eta_\tau \neq u_0, \tau = 1, \dots, t'_0 | \eta_0 = u\} + \\ &+ \sum_{\tau=1}^{t'_0-1} p^{(\tau)}(u, u_0) P\{\eta_t \neq u_0, t = \tau + 1, \dots, t'_0 | \eta_\tau = u_0\} \leq \\ &\leq \sum_{\tau=1}^{t'_0-1} d_1 \exp\{-\beta_1(t'_0 - \tau - 1) + hf(u_0)\} + d_1 \exp\{-\beta_1 t'_0 + hf(u)\}. \end{aligned}$$

Аналогично для  $N = m + 1$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ :

$$P\{\eta_\tau \neq u_0, \tau = t_j, \dots, t'_j, j = 0, \dots, m + 1 | \eta_0 = u\} \leq$$

$$\leq P \{ \eta_\tau \neq u_0, \tau = t_j, \dots, t'_j, j = 0, \dots, m-1, \\ \tau = t_m, \dots, t'_{m+1} \mid \eta_0 = u \} + \\ + \sum_{t=t'_m+1}^{t_{m+1}-1} P \{ \eta_\tau = u_0, \tau = t_j, \dots, t'_j, j = 0, \dots, m \mid \eta_0 = u \} \times \\ \times P \{ \eta_\tau \neq u_0, \tau = t+1, \dots, t'_{m+1} \mid \eta_t = u_0 \}.$$

Из последнего неравенства индукцией по  $m$  получим утверждение 3.1.3.

Утверждение доказано.

Из этого утверждения в силу условия ограниченности скачков цепи  $L$  (условие  $(A_1b)$ ) вытекают также следующие два утверждения.

Утверждение 3.1.4. Для любого  $h > 0$  можно указать такие  $\alpha_4, h', \beta_4 > 0$ , что для любого  $t \in \mathbb{Z}_+$  и любого  $u \in U$

$$\sum_{v \in U} p^{(t)}(u, v) e^{h'f(v)} \leq d_4 e^{hf(u)}$$

и

$$\sum_{v \in \Omega} F^{(t)}(u, v) e^{h'f(v)} \leq d_4 e^{hf(u) - \beta_4 t},$$

где  $F^{(t)}(u, v) = P \{ \eta_\tau \neq u_0, \tau = 1, \dots, t-1, \eta_t = v \mid \eta_0 = u \}$ .

Утверждение 3.1.5. Существуют такие  $h_5 > 0$  и  $d_5 > 0$ , что

$$\sum_{u \in U} \pi_0(u) e^{h_5 f(u)} \leq d_5.$$

Докажем последнее (здесь) утверждение относительно цепи  $L$ .

Утверждение 3.1.6. Для любого  $h > 0$  можно указать такие  $h_6, d_6, \beta_6 > 0$ , что для любого  $u \in U, t \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{v \in U} |p^{(t)}(u, v) - \pi_0(v)| e^{h_6 f(v)} \leq d_6 e^{hf(u)}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$p^{(t)}(u, v) = F^{(t)}(u, v) + \sum_{\tau=1}^t p^{(\tau)}(u, u_0) F^{(t-\tau)}(u_0, v)$$

и

$$\pi_0(v) = \sum_{u \in U} \pi_0(u) F^{(t)}(u, v) + \sum_{\tau=1}^t \pi_0(u_0) F^{(t-\tau)}(u_0, v).$$

Тогда

$$|p^{(t)}(u, v) - \pi_0(v)| \leq F^{(t)}(u, v) + \sum_{u' \in U} \pi_0(u') F^{(t)}(u', v) + \\ + \sum_{\tau=1}^t |p^{(\tau)}(u, u_0) - \pi_0(u_0)| F^{(t-\tau)}(u_0, v).$$

В силу утверждения 3.1.4 для любого  $h > 0$  найдутся такие  $h', \beta_4, d_4 > 0$ , что

$$\sum_{v \in U} |p^{(t)}(u, v) - \pi_0(v)| e^{h'f(v)} \leq \\ \leq d_4 e^{hf(u) - \beta_4 t} + \sum_{u' \in U} \pi_0(u') e^{hf(u') - \beta_4 t} + \\ + \sum_{\tau=1}^t |p^{(\tau)}(u, u_0) - \pi_0(u_0)| e^{hf(u_0) - \beta_4(t-\tau)}.$$

Используя теперь утверждение 3.1.5 и 3.1.2, получаем утверждение 3.1.6.

Утверждение доказано.

## § 2. Экспоненциальная сходимость плотностей одномерного диффузионного процесса

В этом параграфе мы будем изучать процесс, заданный уравнением

$$d\xi_t = -P(\xi_t) dt + \sigma(\xi_t) d\omega_t, \quad t > 0, \quad (3.2.1)$$

$$\xi_0 = u \in \mathbb{R}, \quad (3.2.1')$$

где  $P, \sigma$  — функции из (1.1.2).

1. Оценка плотности. Обозначим через  $\tilde{\xi}_t$  процесс, заданный уравнением

$$d\tilde{\xi}_t = \sigma(\tilde{\xi}_t) d\omega_t, \quad t > u, \quad (3.2.2)$$

$$\tilde{\xi}_0 = u. \quad (3.2.2')$$

Из теоремы Гирсанова [22] следует, что процессы  $\xi_t$  и  $\tilde{\xi}_t$  обладают плотностями переходных вероятностей (обозначим их соответственно через  $p(t, u, v)$  и  $\tilde{p}(t, u, v)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ ), причем

$$p(t, u, v) = \\ = \tilde{p}(t, u, v) M \left\{ \exp \left\{ \int_0^t \frac{-P(\tilde{\xi}_s)}{\sigma(\tilde{\xi}_s)} d\omega_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{P^2(\tilde{\xi}_s)}{\sigma^2(\tilde{\xi}_s)} ds \right\} \middle| \tilde{\xi}_t = v \right\} \quad (3.2.3)$$

для всех  $t > 0$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Лемма 3.2.1. Существуют такие  $a, \alpha, \beta, \beta_1, \beta_2 > 0$ , что

$$p(t, u, v) \leq \frac{ae^{\beta_1 t}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(u-v)^2}{2t} \beta_2 - B(u) + B(v)} \times \\ \times \begin{cases} e^{-\beta u^{n+1}}, & t \geq u^{-(n-1)}, \\ e^{-\beta u^{n+1}} + e^{-t\alpha u^{2n}}, & t < u^{-(n-1)}; \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} p(t, u, v) \right| \leq a \left( \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t} \right) e^{\beta_1 t} e^{-\frac{(u-v)^2}{t} \beta_2 - B(u) + B(v)} \times \\ \times \begin{cases} e^{-\beta u^{n+1}}, & t \geq u^{-(n-1)}, \\ e^{-\beta u^{n+1}} + e^{-t\alpha u^{2n}}, & t < u^{-(n-1)}; \end{cases} \quad (3.2.5)$$

где

$$B(v) = -\frac{1}{\sigma^2(v)} \int_0^v P(u) du, \quad t > 0, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Используя формулу Ито, преобразуем правую часть выражения (3.2.3):

$$p(t, u, v) = \tilde{p}(t, u, v) e^{B(v) - B(u)} \times \\ \times M \left\{ \exp \left[ -\int_0^t 2\bar{P}(\tilde{\xi}_s) \frac{\sigma'(\tilde{\xi}_s)}{\sigma^2(\tilde{\xi}_s)} d\omega_s + \int_0^t g(\tilde{\xi}_s) ds \right] \tilde{\xi}_t = v \right\}, \quad (3.2.6)$$

где

$$\bar{P}(u) = \int_0^u P(v) dv, \\ g(u) = -\frac{1}{2} \frac{P^2(u)}{\sigma^2(u)} + \frac{1}{2} P'(u) - 2P(u) \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - \\ - 2\bar{P}(u) \sigma^2(u) \left( \frac{\sigma'(u)}{\sigma^2(u)} \right)'. \quad (3.2.7)$$

Найдем оценки для  $\tilde{p}(t, u, v)$  и математического ожидания в (3.2.6). С помощью случайной замены меры (см., например, [6]) процесс  $\tilde{\xi}_t$  можем представить так:

$$\tilde{\xi}_t = u + \omega_{\varphi_t^{-1}}, \quad (3.2.7)$$

где  $\varphi_t^{-1}$  — обратная функция к  $\varphi_t = \int_0^t \sigma(u + \omega_s)^{-2} ds$ .

Отсюда легко понять, что найдутся такие  $a', a'' > 0$ , что

$$\tilde{p}(t, u, v) \leq \frac{e^{a't}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(u-v)^2}{t} a''} \quad (3.2.8)$$

для всех  $t > 0$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Учитывая ограничения на функцию  $\sigma(B_3, B_4)$ , нетрудно вывести:

$$\begin{aligned} M \left\{ \exp \left[ - \int_0^t 2\bar{P}(\tilde{\xi}_s) \frac{\sigma'(\tilde{\xi}_s)}{\sigma^2(\tilde{\xi}_s)} d\omega_s + \int_0^t g(\tilde{\xi}_s) ds \right] \middle| \tilde{\xi}_t = v \right\} \leq \\ \leq e^{\beta t} \left( M \left\{ \exp \int_0^t 2g(\tilde{\xi}_s) ds \middle| \tilde{\xi}_t = v \right\} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

для некоторой  $\beta' > 0$ .

Пусть далее  $|u| \geq u_0$ ,  $u_0 > 0$  — произвольно фиксировано. Рассмотрим последнее математическое ожидание в (3.2.9):

$$\begin{aligned} M \left\{ \exp \int_0^t 2g(\tilde{\xi}_s) ds \middle| \tilde{\xi}_t = v \right\} \leq \\ \leq \int_{\mathbb{R}} \max_{|y| < x} \exp \left\{ \int_0^{t \wedge u^{-(n-1)}} 2g(u+y) ds + \right. \\ \left. + m(t - t \wedge u^{-(n-1)}) \right\} P(dx), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где  $m = \max_{u \in \mathbb{R}} g(u)$ ;

$$P(dx) = P \left\{ \max_{0 \leq \varphi_s^{-1} < \varphi_t^{-1} \wedge \varphi_{u^{-(n-1)}}^{-1}} |\omega_{\varphi_s^{-1}}| \in dx \middle| \omega_{\varphi_t^{-1}} = v - u \right\};$$

$$u \wedge v = \min\{u, v\}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Используя известную формулу плотности распределения  $\max_{0 \leq s < t} \omega_s$  (см., например, [19]), легко вывести оценку для  $P(dx)$ :

$$\begin{cases} P(dx) \leq \frac{a_2}{t} e^{-\frac{(2x - |v-u|)^2}{t}} a_4 (2x - |v-u|) e^{\frac{(v-u)^2}{t} a_4} dx, \\ \quad \quad \quad x \geq |v-u|, \\ P(dx) \equiv 0, \quad x < |v-u|, \end{cases} \quad (3.2.11)$$

если  $t \leq u^{-(n-1)}$ , и

$$P(dx) \leq \frac{a_2}{\tau} \sqrt{t} e^{\frac{(v-u)^2}{t} a_4} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{(2x-|y|)^2 a_4}{\tau}}}{\sqrt{\tau}} (2x-|y|) e^{-\frac{(y-(v-u))^2 a_4}{t-\tau}}}{\sqrt{t-\tau}} dy dx, \quad (3.2.12)$$

если  $t > u^{-(n-1)}$ , где  $a_3, a_4 > 0$  — некоторые постоянные,  $\tau = u^{-(n-1)}$ .

Пусть  $t \leq u^{-(n-1)}$ ,  $\frac{1}{3}|u| > |v-u|$ . Подставляя (3.2.11) в (3.2.10), находим

$$\begin{aligned} & M \left\{ \exp \int_0^t 2g(\tilde{\xi}_s) ds \mid \tilde{\xi}_t = v \right\} \leq \\ & \leq \int_{|v-u|}^{|u|/3} e^{2t \max_{|y| \leq x} g(u+y)} P(dx) + \\ & + \int_{\frac{|u|}{3}}^{\infty} e^{2tm} \frac{a_3}{t} e^{-\frac{(2x-|v-u|)^2 a_4}{t}} (2x-|v-u|) e^{-\frac{(v-u)^2 a_4}{t}} dx. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Поскольку  $g(u) \leq -A_1 u^{2n} + A_2$  для некоторых  $A_1, A_2 > 0$ , неравенство (3.2.13) можно продолжить так, что

$$\begin{aligned} & M \left\{ \exp \int_0^t 2g(\tilde{\xi}_s) ds \mid \tilde{\xi}_t = v \right\} \leq \\ & \leq e^{-2tA_1 \left(\frac{1}{2}u\right)^{2n} + 2tA_2} + a_5 e^{-\frac{(v-u)^2 a_4}{t} - \frac{(|u|-|v-u|)^2 a_4}{t}}, \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

где  $a_5 > 0$  — некоторая постоянная. Учитывая, что  $|v-u| < \frac{|u|}{3}$  и  $t < u^{-(n-1)}$ , из (3.3.14), (3.3.9), (3.3.8) и (3.3.6) находим:

$$\begin{aligned} & p(t, u, v) \leq \\ & \leq a_6 \frac{e^{\beta'' t}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(u-v)^2}{t} a'' + B(v) - B(u)} \{e^{-\alpha t u^{2n}} + e^{-\beta u^{n+1}}\} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

для некоторых  $a_6, \alpha, \beta, \beta'' > 0$ .

Если же  $|u-v| > \frac{1}{3}|u|$  и  $t < u^{-(n-1)}$ , то требуемая оценка (3.2.4) для плотности  $p(t, u, v)$  вытекает сразу из (3.2.6), (3.2.8) и (3.2.9).

Чтобы получить оценку (3.2.4) в случае  $t > u^{-(n-1)}$ , надо подставить в (3.2.10) оценку (3.2.12).

Случай  $|u| \leq u_0$  тривиален.

Аналогично доказывается утверждение (3.2.5) леммы, если учесть все ограничения на функцию  $\sigma$ .

Лемма доказана.

## 2. Экспоненциальность сходимости.

Теорема 3.2.1. Пусть  $\xi_t$  — решение уравнения (3.2.1), (3.2.1'),  $p(t, u, v)$  — плотность переходной вероятности процесса  $\xi_t$ .

Тогда для каждого  $t_0 > 0$  найдутся такие  $\Gamma, \gamma > 0$ , что для всех  $t \geq t_0, t' > 0, u, v, \omega \in \mathbb{R}$

$$p(t+t', u, \omega) - p(t, v, \omega) < \Gamma e^{-\gamma t} e^{B(\omega)} \max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\} \quad (3.2.16)$$

$$\int_{x > |\omega|} |p(t+t', u, x) - p(t, v, x)| dx < \Gamma e^{-\gamma t} e^{B(|\omega|)} \max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}, \quad (3.2.17)$$

$$\int_{x < -|\omega|} |p(t+t', u, x) - p(t, v, x)| dx < \Gamma e^{-\gamma t} e^{B(-|\omega|)} \max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}. \quad (3.2.18)$$

Доказательство. Идея здесь та же, что и в доказательстве теоремы 2 из [26].

Зафиксируем произвольно  $t_1, D > 0$  и введем в рассмотрение процесс  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$  на  $\mathbb{R}^2, t=0, t_1, 2t_1, \dots$ , заданный плотностями вероятностей переходов за время  $t_1$  из точки  $(u, v)$  в точку  $(u', v')$ :

$$p(t_1; u, v; u', v') = p(t_1, u, u') \delta_{u'v'},$$

если  $u=v$ ;

$$p(t_1, u, v; u', v') = [p(t_1, u, u') - \chi(u, v; u', u')] [p(t_1, v, v') - \chi(u, v; v', v')] \frac{1}{1-X(u, v)} + \chi(u, v; u', v') \delta_{u'v'},$$

если  $u \neq v$  и  $(u, v) \in [-D; D]^2$ ;

$$p(t_1; u, v; u', v') = p(t_1, u, u') p(t_1, v, v'),$$

если  $u \neq v$  и  $(u, v) \notin [-D, D]^2$ , где

$$\chi(u, v; u', v') = \min\{p(t_1, u, u'), p(t_1, v, v')\},$$

$$X(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \chi(u, v; u', u') du',$$

$\delta_{uv}$  —  $\delta$ -функция на  $\mathbb{R}$ , если одна из переменных ( $u$  или  $v$ ) фиксирована.

Отметим некоторые свойства процесса  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ :

$$1) \int_R p(t; u, v; u', v') dv' = p(t, u, u'), \int_R p(t; u, v; u', v') du' = \\ = p(t, v, v'), t = t_1, 2t_1, \dots; \\ 2) \text{ если } (u, v) \in [-D, D]^2, \text{ то } P\{\xi_1(t+t_1) = \xi_2(t+t_1) | (\xi_1(t), \xi_2(t)) = \\ = (u, v)\} = \int_R p(t_1, u, v; u', u') du' \geq \int_R \chi(u, v; u', u') du' > 0.$$

Лемма 3.2.2. Величину  $D > 0$  в определении процесса  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$  можно выбрать так, что

$$P\{\xi_1(\tau), \xi_2(\tau) \in [-D, D]^2, \tau = t_1, 2t_1, \dots, t - t_1, |\xi_1(t)| > U, \\ |\xi_2(t)| > V | \xi_1(0) = u, \xi_2(0) = v\} \leq \\ \leq A e^{-\alpha t} \max\{e^{B(\max\{U, V\})}, e^{B(-\max\{U, V\})}\} \times \quad (3.2.19) \\ \times \max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}$$

для некоторых  $A, \alpha > 0, t \in \{t_1, 2t_1, \dots\}$  всех  $u, v \in R, U, V > 0$ .

Доказательство. Пусть  $t = kt_1$ , для некоторого  $k \geq 1$ . Пусть  $D = [-D; D], D^2 = [-D; D]^2, D$  — произвольно фиксировано. Очевидна следующая оценка:

$$P \equiv P\{(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \bar{D}^2, \tau = t_1, \dots, (k-1)t_1, |\xi_1(t)| > U, \\ |\xi_2(t)| > V | (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v)\} \leq \\ \leq \sum_{k_0 = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k \sum_{\bar{s} = \bar{s}(k_0)} (P_1(\bar{s}) + P_2(\bar{s})), \quad (3.2.20)$$

где для каждого  $k_0$

$$\sum_{\bar{s}(k_0)} \text{— сумма по всем наборам}$$

$$\bar{s}(k_0) = \{s_1, \dots, s_{k_0}\} \subseteq \{t_1, \dots, kt_1\}$$

таким, что  $2t_1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{k_0} \leq (k-1)t_1$ ;

$$P_j(\bar{s}) = P\{\xi_j(\tau) \in \bar{D}, \tau \in \bar{s}(k_0); \xi_j(\tau) \in \bar{D}^2, \tau \in \{2t_1, \dots, (k-1)t_1\} \setminus \bar{s}; \\ (\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \bar{D}^2, \tau = t_1, \dots, (k-1)t_1; |\xi_1(t)| > U, \\ |\xi_2(t)| > V | (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v)\}.$$

Пусть  $u \neq v$ . Представим  $P_j(\bar{s})$  в виде

$$P_j(\bar{s}) = \iint_{(u^1, u^2) \in \bar{D}^2} p(t_1; u, v; u^1, u^2) P'_j(\bar{s}, u^1, u^2) du^1 du^2, \quad (3.2.21)$$

где обозначили

$$P'_j(\bar{s}, u^1, u^2) = P\{\xi_j(\tau) \in \bar{D}, \tau \in \bar{s}; \xi_j(\tau) \in \bar{D},$$

$$\tau \in \{2t_1, \dots, (k-1)t_1\} \setminus \bar{s}; (\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \notin \bar{D}^2, \tau = 2t_1, \dots, t-t_1;$$

$$|\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V |(\xi_1(t_1), \xi_2(t_1)) = (u^1, u^2)\rangle, j=1, 2.$$

Представим  $P'_j(\bar{s}, u^1, u^2)$  в виде суммы:

$$P'_j(\bar{s}, u^1, u^2) = P \{ \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau \in \bar{s}, \xi_j(\tau) \in \bar{D},$$

$$\tau \in \{2t_1, \dots, (k-1)t_1\} \setminus \bar{s}, \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, (\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \bar{D}^2,$$

$$\tau = 2t_1, \dots, (k-1)t_1, |\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V |(\xi_1(t_1), \xi_2(t_1)) =$$

$$= (u^1, u^2)\rangle + P \{ \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau \in \bar{s}, \xi_j(\tau) \in \bar{D}, \tau \in \{2t_1, \dots, (k-1)t_1\} \setminus \bar{s};$$

$$(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \bar{D}^2, \tau \in \{2t_1, \dots, t-t_1\}; \quad (3.2.22)$$

$$\exists t_1 \leq T \leq (k-1)t_1 : \xi_j(T) \in \bar{D}, \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau > T;$$

$$|\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V |(\xi_1(t_1), \xi_2(t_1)) = (u^1, u^2)\rangle, j=1, 2.$$

Отсюда, учитывая определение процесса  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ , получаем:

$$P'_j(\bar{s}, u^1, u^2) \leq \min_{j=1,2} (P \{ \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau \in \bar{s},$$

$$|\xi_j(t)| > V_j | \xi_j(t_1) = u^j \rangle, P \{ \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau = 2t_1, \dots, (k-1)t_1,$$

$$|\xi_j(\tau) > V_j | \xi_j(\tau) = u^j \rangle + \quad (3.2.23)$$

$$+ P \{ \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau \in \bar{s}, |\xi_j(t)| > V_j, |\xi_j(t_1) = u^j \rangle \cdot P \{ \xi_j(T) \in \bar{D},$$

$$\xi_j(\tau) \notin \bar{D}, T < \tau \leq (k-1)t_2, |\xi_j(\tau) > V_j | \xi_j(t_1) = u^j \rangle,$$

где для удобства обозначений положили  $V_1 = U, V_2 = V, \bar{j} =$

$$= \begin{cases} 1, & j=2, \\ 2, & j=1. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь

$$P \{ \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau \in \bar{s}, |\xi_j(t)| > V_j | \xi_j(t_1) = u^j \rangle =$$

$$= \int_{G_1} \dots \int_{G_{k-1} | v^k | > V_j} p(t_1, u^1, v^2) p(t_1, v^2, v^3) \dots \quad (3.2.24)$$

$$\dots p(t_1, v^{k-1}, v^k) dv^k \dots dv^2,$$

где

$$G_l = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \bar{D}, & \text{если } t_l \in \bar{s}, \\ \mathbb{R}, & t_l \in \bar{s}; l=1, \dots, k-1. \end{cases}$$

Подставляя в (3.2.24) оценку (3.2.4), находим, что

$$P \{ \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau \in \bar{s}, |\xi_j(t)| > V_j | \xi_j(t_1) = u^j \rangle \leq$$

$$\leq e^{\beta t} (A_1 e^{-\alpha' D^{n+1}})^k \max \{ e^{B(V_j)}, e^{B(-V_j)} \} e^{-B(u^j)}, \quad (3.2.25)$$

где  $A_1, a' > 0$  — некоторые константы, поскольку  $k_0 \geq \left[ \frac{k}{2} \right]$ .

Выберем  $D$  так, чтобы выполнялось

$$-a'D^{n+1} + \ln A_1 + \beta_1 t_1 < -\bar{\alpha} \quad (3.2.26)$$

для некоторой  $\bar{\alpha} > \ln 2$ .

Теперь из (3.2.25) получаем

$$\begin{aligned} P \{ \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau \in \bar{S}, |\xi_j(t)| > V_j | \xi_j(t_1) = u^j \} &\leq \\ &\leq \bar{A} e^{-\frac{\bar{\alpha}}{t_1} t} \max \{ e^{B(V_j)}, e^{B(-V_j)} \} e^{-B(u^j)}. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Заметим, что из (3.2.24) — (3.2.26) вытекают также следующие неравенства при  $V_j \geq 0$ :

$$P \{ \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau \in \bar{S}, \xi_j(t) > V_j | \xi_j(t_1) = u^j \} \leq \bar{A} e^{-\frac{\bar{\alpha}}{t_1} t} e^{B(V_j) - B(u^j)}, \quad (3.2.28)$$

$$P \{ \xi_j(\tau) \notin \bar{D}, \tau \in \bar{S}, \xi_j(t) < -V_j | \xi_j(t_1) = u^j \} \leq \bar{A} e^{-\frac{\bar{\alpha}}{t_1} t} e^{B(-V_j) - B(u^j)}.$$

С помощью (3.2.27) из (3.2.23) находим

$$P'_j(\bar{s}, u^1, u^2) \leq A_2 e^{-\frac{\bar{\alpha}}{t_1} t} \left( \min_{j=1,2} \max \{ e^{B(V_j)}, e^{B(-V_j)} \} + \right.$$

$$\left. + \exp \{ \max(B(U), B(-U)) \} \exp \{ \max(B(V), B(-V)) \} \right) \max_{j=1,2} e^{-B(u^j)}$$

для некоторой  $A_2 > 0$ , откуда

$$P'_j(\bar{s}, u^1, u^2) \leq A_3 e^{-\frac{\bar{\alpha}}{t_1} t} \max \{ e^{B(\max\{U, V\})}, e^{B(-\max\{U, V\})} \} \max_{j=1,2} e^{-B(u^j)}$$

для некоторой  $A_3 > 0$ .

Подставив последнюю оценку в (3.2.21), получаем:

$$P_j(\bar{s}) \leq A_4 e^{-\frac{\bar{\alpha}}{t_1} t} \max \{ e^{B(\max\{U, V\})}, e^{B(-\max\{U, V\})} \} \max \{ e^{-B(u)}, e^{-B(v)} \}.$$

С использованием последней оценки из (3.2.20), находим:

$$\begin{aligned} P &\leq \left( \frac{k}{2} + 1 \right) 2^k 2 \max_{\substack{s \in \left( \frac{k}{2}, k \right), \\ \frac{k}{2} < k_0 < k}} P_j(\bar{s}) \leq A e^{-\alpha t} \max e^{B(\pm \max\{U, V\})} \times \\ &\times \max \{ e^{-B(u)}, e^{-B(v)} \} \end{aligned}$$

для некоторых  $A, \alpha > 0$  (т. к.  $k = \frac{t}{t_1}$ ,  $\bar{\alpha} > \ln 2$ ), что и доказывает утверждение леммы при  $u \neq v$ . Доказательство в случае  $u = v$  тривиально следует из рассуждений при  $u \neq v$ .

Лемма доказана.

Лемма 3.2.3. Пусть  $\lambda$  — момент первого попадания процесса  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$  на множество  $d = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = v\}$ . Тогда найдутся такие  $\gamma', \Gamma' > 0$ , что

$$P\{\lambda > t, |\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v)\} \leq \Gamma' e^{-\gamma' t} \times \\ \times \max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\} \max\{e^{B(\max\{U, V\})}, e^{B(-\max\{U, V\})}\}, \quad (3.2.28)$$

$u, v \in \mathbb{R}, \quad UV > 0,$

в частности,

$$P\{\lambda > t, \xi_1(t) > U \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v)\} \leq \\ \leq \Gamma' e^{-\gamma' t} e^{B(U)} \max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}, \quad (3.2.28')$$

$$P\{\lambda > t, \xi_1(t) < -U \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v)\} \leq \\ \leq \Gamma' e^{-\gamma' t} e^{B(-U)} \max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}.$$

Доказательство. Пусть  $t = mt_1$  для некоторого  $m \geq 1$ . Положим

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; u, v; T_1, \dots, T_k) \equiv \\ \equiv \begin{cases} \int_{G_1} \dots \int_{G_{m-1}} \left[ \prod_{i=1}^m p(t_i; u_{i-1}, v_{i-1}; u_i, v_i) \right] \prod_{j=1}^{m-1} du_j dv_j, & u \neq v, \\ 0, & u = v, \end{cases}$$

где  $k \in \{1, \dots, m\}$ ;  $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k \leq t$ ;  $u_m \equiv u$ ,  $v_m \equiv v$ ;

$$G_i = \begin{cases} (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}^2) \setminus d, & \text{если } it_i \notin \{T_1, \dots, T_k\}, \\ \bar{D}^2 \setminus d, & \text{если } it_i \in \{T_1, \dots, T_k\}; \end{cases}$$

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; u, v) \equiv \sum_{k=1}^m \sum_{0 < T_1 < \dots < T_k < t} \bar{p}(t; u_0, v_0; u, v; T_1, \dots, T_k),$$

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; G, T_1, \dots, T_k) \equiv$$

$$\equiv \int_{G \setminus d} \bar{p}(t; u_0, v_0; u, v; T_1, \dots, T_k) dudv, \quad G \subseteq \mathbb{R}^2,$$

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; G) \equiv \sum_{k=1}^m \sum_{0 < T_1 < \dots < T_k < t} \bar{p}(t; u_0, v_0; G, T_1, \dots, T_k) = \\ = \int_{G \setminus d} \bar{p}(t; u_0, v_0; u, v) dudv.$$

Покажем, что для всех  $(u_0, v_0) \in \bar{D}^2$

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; \bar{D}^2) \leq \Gamma_1 e^{-\gamma_1 t} \quad (3.2.29)$$

для некоторых  $\Gamma_1, \gamma_1 > 0$ .

В силу леммы 3.2.2 и определения процесса  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$  для любых  $U, V > 0$  и  $(u, v) \in \bar{D}^2$  имеет место оценка:

$$P \{ (\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \bar{D}^2, t_1 \leq \tau \leq (m-1)t_1, |\xi_1(t)| > U, \\ |\xi_2(t)| > V | (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v) \} \leq \\ \leq Ae^{-\alpha t} \max \{ e^{B(\max\{U, V\})}, e^{B(-\max\{U, V\})} \} \max \{ e^{-B(u)}, e^{-B(v)} \}. \quad (3.2.30)$$

Пусть  $(u, v) \in \bar{D}^2$ . Тогда из (3.2.30) и свойств процесса  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$  выводим:

$$P \{ (\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \bar{D}^2, t_1 \leq \tau \leq (m-1)t_1, |\xi_1(t)| > U, \\ |\xi_2(t)| > V | (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v) \} \leq \\ \leq \iint_{(u^1, v^1) \in \bar{D}^2} p(t_1, u, v; u^1, v^1) P \{ (\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \bar{D}^2, \\ 2t_1 \leq \tau \leq (m-1)t_1, |\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V | (\xi_1(t_1), \xi_2(t_1)) = \\ = (u^1, v^1) \} du^1 dv^1 \leq Ae^{-\alpha(t-t_1)} \max \{ e^{B(\max\{U, V\})}, e^{B(-\max\{U, V\})} \} \times \\ \times \max \{ e^{-B(u)}, e^{-B(v)} \}. \quad (3.2.30')$$

Из свойств процесса  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$  следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}(kt_1; u_0, v_0; \bar{D}^2, kt_1) \leq 1 - \varepsilon$$

для некоторого  $0 < \varepsilon < 1$ , причем из (3.2.30) и (3.2.30') следует существование таких  $z > 1, 0 < \varepsilon_1 < 1$ , что

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \bar{p}(kt_1; u_0, v_0; \bar{D}^2, kt_1) \leq 1 - \varepsilon_1 \quad (3.2.31)$$

для всех  $(u_0, v_0) \in \bar{D}^2$ .

Используя (3.2.31), получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \bar{p}(kt_1, u_0, v_0; \bar{D}^2 \setminus d) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_l=1}^{\infty} \dots \sum_{m_l=k}^{\infty} \sum_{m_l=1}^{\infty} \\ \int_{(\bar{D}^2 \setminus d)^l} \left\{ \prod_{i=1}^l z^{m_i} \bar{p}(m_i t_1; u_{i-1}, v_{i-1}; u_i, v_i; m_i t_1) du_i dv_i \right\} \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_k=1}^{\infty} \int_{(\bar{D}^2 \setminus d)^k} \prod_{l=1}^k z^{m_l} \bar{p}(m_l t_1; u_{l-1}, v_{l-1}; u_l, v_l;$$

$$m_i t_i) du_i dv_i \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_{k-1}=1}^{\infty} \int_{(\bar{D}^2 \setminus d)^{k-1}} (1 - \varepsilon_1) \times \\ \times \prod_{i=1}^{k-1} z^{m_i} \bar{p}(m_i t_i; u_{i-1}, v_{i-1}; u_i, v_i; m_i t_i) du_i dv_i.$$

Проделаем аналогичную выкладку еще  $(k-1)$  раз, находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \bar{p}(k t_i; u_0, v_0; \bar{D}^2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_1)^k < \infty,$$

что и доказывает оценку (3.2.29).

Рассмотрим теперь

$$P \{ \lambda > t, |\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v) \} = \\ = \int_{|x| > U} \int_{|y| > V} \bar{p}(t; u, v; x, y) dx dy.$$

Пусть  $\tau = l t_i$  (для некоторого  $l \geq 1$ ) — момент последнего попадания процесса  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$  в  $\bar{D}^2$  в моменты времени  $0, t_1, \dots, m t_1 = t$ . Тогда из (3.2.29) — (3.2.30') следует:

$$P \{ \lambda > t, |\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v) \} \leq \\ \leq A e^{-\alpha t} \max \{ e^{B(\max\{U, V\})}, e^{B(-\max\{U, V\})} \} \max \{ e^{-B(u)}, e^{-B(v)} \} + \\ + \sum_{i=1}^{m-1} \iint_{\bar{D}^2 \setminus d} \bar{p}(\tau; u, v; u', v') A e^{-\alpha(t-\tau)} \times \\ \times \max \{ e^{B(\max\{U, V\})}, e^{B(-\max\{U, V\})} \} \max \{ e^{-B(u)}, e^{-B(v)} \} \leq \\ \leq \Gamma' e^{-\gamma' t} \max \{ e^{B(\max\{U, V\})}, e^{B(-\max\{U, V\})} \}$$

для некоторых  $\Gamma', \gamma' > 0$ , и всех  $(u, v) \in \bar{D}^2$ .

Пусть теперь  $\tau_1 = l_1 t_1$  — момент первого попадания процесса  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$  из  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  в  $\bar{D}^2$ . Из последней выкладки и (3.2.30); (3.2.30') вытекает:

$$P \{ \lambda > t, |\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v) \} \leq \\ \leq \int_{|x| > U} \int_{|y| > V} \bar{p}(t; u, v; x, y) dx dy \leq A e^{-\alpha(t-t_1)} \max \{ e^{-B(u)}, e^{-B(v)} \} \times \\ \times \max \{ e^{B(\max\{U, V\})}, e^{B(-\max\{U, V\})} \} + \\ + \sum_{i=1}^{m-1} A e^{\alpha t_i} e^{-\alpha \tau_i} \max \{ e^{-B(u)}, e^{-B(v)} \} \Gamma' e^{-\gamma'(t-\tau_i)} \max e^{B(\pm \max\{U, V\})}$$

для всех  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Отсюда и следует утверждение (3.2.28).

Аналогично доказываем утверждение (3.2.28').

Лемма доказана.

Теперь на основании лемм 3.2.2 и 3.2.3 проведем доказательство теоремы.

Пусть  $t = kt_1$  для некоторого  $k \geq 1$  и пусть  $t_1 \leq \tau \leq 2t_1$ . Заметим, что из свойств процесса  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$  вытекает:

$$\begin{aligned} & |p(t, u, w) - p(t, v, w)| = \\ & = \left| \int_{\mathbb{R}} p(t; u, v; w, w') d w' - \int_{\mathbb{R}} p(t; u, v; w', w) d w' \right| \ll \\ & \ll \int_{\mathbb{R}} \bar{p}(t, u, v; w, w') d w' + \int_{\mathbb{R}} \bar{p}(t; u, v; w', w) d w'. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу леммы 3.2.3

$$\begin{aligned} \int_{x > |w|} |p(t, u, x) - p(t, v, x)| d x & \ll \int \int_{x \vee y > |w|} |\bar{p}(t; u, v; w', w) d w' \ll \\ & \ll 2\Gamma e^{-\nu t} e^{B(|w|)} \max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}. \end{aligned}$$

Далее для  $0 < \tau \leq 2t_1$

$$\begin{aligned} & \int_{x > |w|} |p(t + \tau, u, x) - p(t, v, x)| d x \ll \\ & \ll \int_{x > |w|} \int_{\mathbb{R}} p(\tau, u, y) |p(t, y, x) - p(t, v, x)| d y d x \ll \\ & \ll \Gamma' e^{-\nu t} e^{B(|w|)} \exp(\max\{-B(u), -B(v)\}) \quad (3.2.32) \end{aligned}$$

для некоторой  $\Gamma' > 0$ , что следует из предыдущей выкладки и оценки (3.2.4).

Пусть  $t' > 2t_1$ . Положим  $T = \left[ \frac{t'}{2t_1} \right] + 1$ . Тогда из (3.2.32) находим:

$$\begin{aligned} & \int_{x > |w|} |p(t + t', u, x) - p(t, v, x)| d x \ll \\ & \ll \int_{x > |w|} \sum_{k=1}^T \left| p\left(t + k \frac{t'}{T}, u, x\right) - p\left(t + (k-1) \frac{t'}{T}, v, x\right) \right| d x \ll \\ & \ll \Delta_1 e^{-\nu t}, e^{B(|w|)} \max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\} \quad (3.2.32') \end{aligned}$$

для некоторой  $\Delta_1 > 0$ .

Таким образом оценка (3.2.17) доказана. В точности так же получаем оценку (3.2.18).

Пусть  $t_0 > 0$  произвольно фиксировано. При  $t > t_0$ ,  $t' > 0$  имеем:

$$\begin{aligned} & |p(t+t', u, \omega) - p(t, v, \omega)| \leq \\ & \leq \int_{\mathbf{R}} \left| p\left(t+t' - \frac{t_0}{2}, u, x\right) - p\left(t - \frac{t_0}{2}, v, x\right) \right| p\left(\frac{t_0}{2}, x, \omega\right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом оценок (3.2.17), (3.2.18') и леммы 3.2.1 и следует неравенство (3.2.16).

Теорема доказана.

**3. Некоторые свойства плотности.** Как следствие теоремы 3.2.1 получим некоторые оценки для переходной плотности.

Лемма 3.2.4. Для каждого  $t_0 > 0$  найдутся такие  $A, \alpha, q > 0$ , что

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} p(t, u, v) \right| < A e^{-\alpha t} e^{B(v) - B(u) - qu^{n+1}}, \quad (3.2.33)$$

$$p(t, u, v) < A e^{B(v) - B(u) - qu^{n+1} - \frac{(u-v)^2}{t} \beta_1} \quad (3.2.34)$$

для всех  $t \geq t_0$ ,  $u, v \in \mathbf{R}$ .

Доказательство. Фиксируем произвольно  $t_0 > 0$ . Рассмотрим при  $t \geq t_0$

$$\frac{\partial}{\partial u} p(t, u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \int_{\mathbf{R}} p\left(\frac{t_0}{2}, u, u'\right) \left[ p\left(t - \frac{t_0}{2}, u', v\right) - p(t, 0, v) \right] du'.$$

Ясно, что мы можем перейти к дифференцированию справа под знаком интеграла. Тогда, применяя оценки (3.2.5) и (3.2.16), из неравенства

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} p(t, u, v) \right| \leq \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\partial}{\partial u} p\left(\frac{t_0}{2}, u, u'\right) \right| \left| p\left(t - \frac{t_0}{2}, u', v\right) - p(t, 0, v) \right| du'$$

выводим (3.2.33).

Оценка (3.2.34) следует из леммы 3.2.1 и теоремы 3.2.1, если рассмотреть неравенство

$$p(t, u, v) \leq p\left(\frac{t_0}{2}, u, v\right) + \left| p(t, u, v) - p\left(\frac{t_0}{2}, u, v\right) \right|$$

при  $t \geq t_0$

Лемма доказана.

Лемма 3.2.5. Для каждого  $t_0 > 0$  найдутся такие  $A, \alpha > 0$ , что

$$\int_{\mathbf{R}} p(t, u, v) |v|^{n-\delta} e^{-B(v)} dv \leq A e^{-B(u)}, \quad (3.2.35)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial u} p(t, u, v) \right| |v|^{n-\delta} e^{-B(v)} dv \leq A e^{-B(u) - \alpha t} \quad (3.2.36)$$

при всех  $t \geq t_0$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Доказательство очевидным образом следует из леммы 3.2.4.

Доказательство закончено.

## Глава 4

### ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В этой главе мы докажем сходимость кластерных разложений конечномерных распределений процессов  $\xi_t = (\xi_t(z), z \in Z^v)$ , построенных во второй главе, с помощью оценок для каждого независимого (при  $\varepsilon = 0$ ) процесса  $\xi_t(z)$ ,  $z \in Z^v$ , выведенных в третьей главе.

#### § 1. Локально взаимодействующие процессы

**1. Кластерные оценки.** Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  — конечное подмножество  $Z^v$ . Определим для любой ограниченной функции  $g: U^{|X|} \rightarrow \mathbb{R}$  величины

$$K_A(g, X, t) = Mg(u_X) K_A(u_X, t), \quad t > 0, \quad (4.1.1)$$

где  $A$  —  $(X, t)$ -кластер и величины  $K_A(u_X, t)$  определены в (2.2.3').

Тогда из (2.2.3) получаем

$$Mg(\xi_t(x), x \in X) = \sum_{k=0}^{N_t} \varepsilon^k \sum_{\substack{A-(X,t)\text{-кластер} \\ \text{мощности } k}} \bar{K}_A(g, X, t), \quad (4.1.2)$$

$$N_t = \left| \bigcup_{x \in X} \Lambda_0(x, t) \right|.$$

Положим далее

$$C_k(g, X, t) = \begin{cases} \sum_{\substack{A-(X,t)\text{-кластер} \\ \text{мощности } k}} K_A(g, X, t), & 0 \leq k \leq N_t, \\ 0, & k > N_t. \end{cases}$$

Рассмотрим для каждого  $h > 0$  функцию

$$g_h: U^{|X|} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad g_h(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ h \sum_{j=1}^n f(u_j) \right\},$$

где  $f$  — функция Ляпунова для цепи  $L$  из условия  $(A_1)$ .

Лемма 4.1.1. Существуют такие постоянные  $h, c_1, b_1, \kappa_1 > 0$ , что для каждого конечного  $X \subset Z^v$ , каждого  $k \geq 1$  и любых  $t, t' \in Z_+$

$$|C_k(g_h, X, t)| \leq c_1^{|X|} b_1^k, \quad (4.1.3)$$

$$|C_k(g, X, t)| \leq b_1^k c_1^{|X|} |g|_\infty, \quad (4.1.3')$$

$$|C_k(g, X, t) - C_k(g, X, t+t')| \leq b_1^k c_1^{|X|} e^{-\kappa_1 t} |g|_\infty, \quad (4.1.4)$$

$g$  — произвольная ограниченная функция,

$$g: U^{|X|} \rightarrow \mathbb{R}, \quad |g|_\infty = \sup_{u_1, \dots, u_{|X|}} |g(u_1, \dots, u_{|X|})|.$$

Для доказательства леммы 4.1.1 нужна

Лемма 4.1.2. Существуют такие  $h, c_2, b_2, \kappa_2 > 0$ , что для каждого конечного  $X \subset Z^v$ , любых  $t, t' \in Z_+$ , любого  $(X, t)$ -кластера  $A$  мощности  $k$

$$1) |K_A(g_h, X, t)| \leq c_2^{|X|} b_2^k \exp\{-\kappa_2 \Sigma^1(\tau' - \tau)\}, \quad |K_A(g, X, t)| \leq c_2^{|X|} b_2^k |g|_\infty \exp\{-\kappa_2 \Sigma^1(\tau' - \tau)\};$$

$$2) |K_{A'}(g, X, t+t') - K_A(g, X, t)| \leq C_2^{|X|} b_2^k |g|_\infty \times \exp\{-\kappa_2 \Sigma^1(\tau' - \tau)\}, \quad g: U^{|X|} \rightarrow \mathbb{R} \text{ — произвольная ограниченная функция,}$$

$\Sigma^1$  — сумма по всем главным отрезкам  $I(y, \tau, \tau')$  диаграммы  $D_1(t, A)$ ,

$$A' = \{(z, \tau + t') \mid (z, \tau) \in A\}.$$

Доказательство леммы 4.1.2 опирается на следующие две леммы.

Лемма 4.1.3. Существуют такие  $h_3, \kappa_3, b_3, q_3 > 0$ , что для всех  $u_Q \in U^{|Q|}$ ,  $t > q_3 f(u_0)$ ,  $t \in Z_+$ , выполнены неравенства:

$$\sum_{v \in U} \left| \sum_{u \in U} c(u_Q, u) p^{(t)}(u, v) \right| e^{h_3 f(v)} \leq b_3 e^{-\kappa_3 t},$$

и

$$\sum_{v \in U} |p^{(t)}(u, v) - \pi_0(v)| e^{h_3 f(v)} \leq b_3 e^{-\kappa_3 t},$$

где  $f: U \rightarrow \mathbb{R}_+$  — функция Ляпунова для цепи  $L$  из условия  $(A_1)$ ,  $\pi_0$  — стационарное распределение вероятностей для цепи  $L$ .

Доказательство. Эти неравенства очевидным образом следуют из утверждения 3.1.6, поскольку в силу условия  $(A_4)$

$$\left| \sum_{u \in U} c(u_Q, u) p^{(t)}(u, v) \right| \leq \sum_{u \in U} p^{(\tau)}(u_0, u) |p^{(t)}(u, v) - \pi_0(v)|.$$

Доказательство закончено.

Лемма 4.1.4. Обозначим цепь  $L$  через  $\{\eta_i\}_{i \geq 0}$ . Тогда для любого  $h > 0$  и любого  $q > 1$  можно указать такие  $\kappa_5, b_5 > 0$ , что для любого  $u \in U$ , для любого набора  $t_j, t'_j \in \mathbf{Z}_+, j=0, \dots, N, N \in \mathbf{Z}_+, 0 \leq t_0 \leq t'_0 \leq \dots \leq t_N \leq t'_N$ , имеет место неравенство

$$P\{f(\eta_{t_j}) \geq q^{-1}(t'_j - t_j), j=0, \dots, N \mid \eta_0 = u\} \leq b_5^N \exp \left\{ h f(u) - \kappa_5 \sum_{j=0}^N (t'_j - t_j) \right\}.$$

Доказательство. Эта оценка следует из утверждения 3.1.3 в силу ограниченности скачков цепи (условие  $A_1, b$ )).

Доказательство закончено.

Доказательство леммы 4.1.2. Зафиксируем произвольно  $t \in \mathbf{Z}_+, X \subset \mathbf{Z}^n, |X| < \infty, A - (X, t)$ -кластер мощности  $|A| < \infty$ .

Пусть  $\sigma \in \{0, 1\}^{|A|}$ . Определим на множестве конфигураций

$$u_B = \{u(z, \tau) \in U \mid (z, \tau) \in B\}, \text{ где } B \supseteq D_1(A),$$

конфигурацию  $u_B(\sigma) = \{u(z, \tau) \in U \mid (z, \tau) \in B\}$ , и  $q_3 f(u_{y+Q}^{\tau-1}) < \tau' - \tau$ , если  $\sigma(y, \tau) = 0, q_3 f(u_{y+Q}^{\tau-1}) \geq \tau' - \tau$ , если  $\sigma(y, \tau) = 1$ , для всех главных отрезков  $I(y, \tau, \tau')$  диаграммы  $D_1(t, A)$ , где  $q_3$  — константа из леммы 4.1.3.

Для каждого  $\sigma \in \{0, 1\}^{|A|}$  и для любой ограниченной функции  $g: U^{|X|} \rightarrow \mathbf{R}$  положим

$$K_A^\sigma(g, X, t) = \sum_{\Lambda(A)(\sigma)} \left[ \prod^1 \left( \sum_{u \in U} c(u_{y+Q}^{\tau-1}, u) p^{(\tau'-\tau)}(u, u_y^{\tau'}) \right) \right] \times \\ \times \left[ \prod^2 p^{(\tau'-\tau)}(u_y^\tau, u_y^{\tau'}) \right] P\{\xi_0(y) = u_y^0, (y, 0) \in G(A) \cup \{X \times \{0\}\}, \quad (4.1.5)$$

где  $\Lambda(A) = D_1(A) \cup G(A) \cup \{X \times \{0\}\}$ ,  $\prod^1, \prod^2$  — произведения, определенные в (2.2.3').

Тогда для любой ограниченной функции  $g: U^{|X|} \rightarrow \mathbf{R}$

$$K_A(g, X, t) = \sum_{\sigma \in \{0, 1\}^{|A|}} K_A^\sigma(g, X, t). \quad (4.1.6)$$

Из (4.1.5) следует, что при любом фиксированном  $\sigma \in \{0, 1\}^{|A|}$

$$|K_A^\sigma(g, X, t)| \leq \sum_{\Lambda(A)(\sigma)} |g(u_x^\tau, x \in X)| \times \\ \times \left\{ \prod^1 \left| \sum_{u \in U} c(u_{y+Q}^{\tau-1}, u) p^{(\tau'-\tau)}(u, u_y^{\tau'}) \right| \right\} \left\{ \prod^2 p^{(\tau'-\tau)}(u_y^\tau, u_y^{\tau'}) \right\} \times \\ \times P\{\xi_0(y) = u_y^0, (y, 0) \in G(A) \cup \{X \times \{0\}\}. \quad (4.1.7)$$

Рассмотрим произведение  $\prod^1$  в (4.1.7). Каждый множитель здесь соответствует некоторому главному отрезку  $I(y, \tau, \tau')$

диаграммы  $D_1(t, A)$  и, если  $\sigma(y, \tau) = 1$ , для его оценки мы воспользуемся оценкой

$$\left| \sum_{u \in U} c(u_Q, u) p^{(t)}(u, v) \right| \leq p^{(t+\tau)}(u_0, v) \quad (4.1.8)$$

для всех  $u_Q \in U^{|Q|}$ ,  $v \in U$ ,  $t \in \mathbb{Z}_+$ , которая следует из условия  $(A_4)$ , а затем — леммой 4.1.4, положив  $q = q_3$  и выбрав  $h > 0$  так, что  $h < \alpha_0$ ,  $h < h_3$  ( $q_3, h_3$  — константы из леммы 4.1.3,  $\alpha_0$  — константа из условия  $(A_5)$ ). В результате получаем:

$$\begin{aligned} |K_A^q(g, X, t)| &\leq \tilde{C}^{|\lambda|} \sup_{f_x, x \in X} \sup_{u_x \in U^{|\lambda|}; f(u_x) = f_x} |g(u_x)| e^{-h \sum_{x \in X} f_x} \times \\ &\times \left( \Pi' \sup_{u_Q^{\tau-1} \in U^{|Q|}} \left\{ \sum_{v \in U} \left| \sum_{u \in U} c(u_Q^{\tau-1}, u) p^{(\tau-\tau)}(u, v) \right| e^{hf(v)} \right\} \right) \times \\ &\times \{ \Pi'' b_5 e^{-\kappa_6(\tau-\tau)} \} M \exp \left\{ \sum_{(y,0)} hf(\xi_0(y)) \right\}, \quad (4.1.9) \end{aligned}$$

где  $\sup_{f_x, x \in X}$  берется по всем  $f_x \in f(U)$ ,  $x \in X$ ;  $f(U)$  — множество значений функции  $f$ ;  $\Pi'$  — произведение по всем главным отрезкам  $I(y, \tau, \tau')$  диаграммы  $D_1(t, A)$  таким, что  $\sigma(y, \tau) = 0$ ;  $\Pi''$  — произведение по всем остальным главным отрезкам диаграммы;  $\sum_{(y,0)}$  — сумма по всем  $(y, 0) \in G(A) \cup \{X \times \{0\}\}$ ;  $h = \min\{h, \kappa_5 q\}$ ;

$b_5, \kappa_6$  — постоянные из леммы 4.1.4;  $\tilde{C} > 0$  — некоторая константа.

Далее для оценки множителей  $\Pi'$  в (4.1.9) воспользуемся леммой 4.1.3. В силу условия  $(A_5)$  тогда из (4.1.9) получаем:  $|K_A^q(g, X, t)| \leq c_2^{|\lambda|} b_2^{|\lambda|} |g|_\infty \exp\{-\kappa_2 \sum^1(\tau' - \tau)\}$  для некоторых  $c_2', b_2', \kappa_2' > 0$ , не зависящих от  $\sigma \in \{0, 1\}^{|\lambda|}$ .

Из последней оценки в силу (4.1.6) следует первое утверждение леммы. Докажем второе.

Рассмотрим при произвольно фиксированном  $t' \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} |K_{A'}(g, X, t+t') - K_A(g, X, t)| &\leq \sum_{u_{A(A)}} |g|_\infty \left\{ \Pi^{(1)} \left| \sum_{u \in U} c(u_{y+Q}^{\tau-1}, u) \times \right. \right. \\ &\times p^{(\tau'-\tau)}(u, u_y^\tau) \left. \right\} \{ \Pi^{(2)} p^{(\tau'-\tau)}(u_y^\tau, u_y^{\tau'}) \} \{ \Pi^{(3)} p^{(\tau)}(u_y^0, u_y^\tau) - \\ &- \Pi^3 p^{(t'+\tau)}(u_y^0, u_y^\tau) \} P \{ \xi_0(y) = u_y^0, (y, 0) \in G(A) \cup \{X \times \{0\}\} \}, \quad (4.1.10) \end{aligned}$$

где  $\Pi^{(1)}$  — произведение по всем главным отрезкам  $I(y, \tau, \tau')$  диаграммы  $D_1(t, A)$ ;

$\Pi^{(2)}$  — произведение по всем остальным отрезкам  $I(y, \tau, \tau')$  диаграммы  $D_1(t, A)$  таким, что

$$(y, \tau') \in D_1(A) \cup \{X \times \{t\}\};$$

$\Pi^{(3)}$  — произведение по всем точкам  $(y, \tau)$  таким, что либо  $I(y, 0, \tau)$  — отрезок диаграммы  $D_1(t, A)$ , либо

$$(y, \tau) \in \{(x, t) \mid (x, 0) \in \{X \times \{0\}\} \setminus G(A)\}.$$

Очевидна следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \left| \Pi^{(3)} p^{(\tau+t')} (u_y^0, u_y^\tau) - \Pi^{(3)} p^{(\tau)} (u_y^0, u_y^\tau) \right| \leq \\ & \leq \sum_{(y, \tau)} \left\{ \left| p^{(t'+\tau)} (u_y^0, u_y^\tau) - \pi_0 (u_y^\tau) \right| + \left| p^\tau (u_y^0, u_y^\tau) - \pi_0 (u_y^\tau) \right| \right\} \times \\ & \quad \times \Pi'_{(y', \tau') : (y', \tau') \neq (y, \tau)} \max_{s \in \{t'+\tau, \tau'\}} p^{(s)} (u_{y'}^0, u_{y'}^{\tau'}), \end{aligned}$$

где  $\sum_{(y, \tau)}$  — сумма по всем точкам  $(y, \tau)$ , по которым берется произведение  $\Pi^{(3)}$ ,  $\Pi'$  — произведение по тем же точкам, что и произведение  $\Pi^{(3)}$ , но без точки  $(y, \tau)$ .

Рассуждая далее так же, как и при доказательстве первого утверждения леммы и учитывая, что число точек, по которым берется произведение  $\Pi^{(3)}$ , не превосходит величины

$$|Q| \cdot |A| + |X|,$$

для любого  $t \in \mathbb{Z}_+$  получим:

$$|K_{A, t'}(g, X, t+t') - K_A(g, X, t)| \leq \bar{C}_2^{|X|} \bar{b}_2^{|A|} e^{-\tilde{\kappa}_2 \Sigma^1(\tau'-\tau) - \tilde{\kappa}_2 \tau_{\min}},$$

где  $\tau_{\min} = \min \{\tau > 0 \mid \text{существует отрезок } I(y, 0, \tau) \text{ диаграммы, } D_1(t, A)\}$ ;  $\tilde{\kappa}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2 > 0$  — некоторые постоянные.

Для завершения доказательства достаточно заметить, что

$$\Sigma^1(\tau'-\tau) + \tau_{\min} \geq t - |A| - 1.$$

Лемма 4.1.2 доказана.

Из результатов [25] нетрудно вывести, что число  $(X, t)$  — кластеров мощности  $k \geq 1$  при любом  $X \subset \mathbb{Z}^r$ ,  $|X| < \infty$ ,  $t > 0$  не превосходит величины

$$\mu^{|X|+|Q| \cdot k}, \quad (4.1.11)$$

где  $\mu > 0$  — некоторая постоянная.

В силу (4.1.11), неравенства (4.1.3) — (4.1.4) следуют из леммы 4.1.2.

Лемма доказана.

**2. Предельный переход при  $t \rightarrow \infty$ .** Докажем теперь, используя кластерное разложение и кластерные оценки, теорему 1.1.1.

Предварительно докажем следующие два утверждения.

**Утверждение 4.1.1.** Существуют такие  $\varepsilon_1, h > 0$ , что для всех  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ , для любого конечного  $X \subset \mathbb{Z}^r$

$$M \exp \left\{ h \sum_{x \in X} f(\xi_t(x)) \right\} \leq C^{|X|} \quad (4.1.11)$$

при всех  $t \in \mathbb{Z}_+$ , где  $C > 0$  — некоторая постоянная,  $f$  — функция Ляпунова из условия  $(A_1)$ .

Доказательство. Представим  $M \exp \left\{ h \sum_{x \in X} f(\xi_t(x)) \right\}$

(формально) в виде ряда (4.1.2).

Тогда в силу неравенств (4.1.3), (4.1.10), если  $0 < \varepsilon_1 < b_1^{-1}$ , ряд сходится абсолютно и равномерно по  $t > 0$ . Отсюда и следует оценка (4.1.11).

Утверждение доказано.

Утверждение 4.1.2. Пусть  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ . Тогда существует такая последовательность  $t_m \in \mathbb{Z}_+$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ , что

$$t_m \rightarrow \infty \text{ при } m \rightarrow \infty,$$

и для любого конечного  $X \subset \mathbb{Z}^v$ , любой ограниченной функции  $g: U^{|X|} \rightarrow \mathbb{R}$

$$Mg(\xi_{t_m}(x), x \in X) \rightarrow Mg(\xi_\infty(x), x \in X),$$

где  $\xi_\infty = (\xi_\infty(z), z \in \mathbb{Z}^v)$  — некоторое случайное поле со значениями в  $U^v$  и для некоторого  $h > 0$

$$M \exp \left\{ h \sum_{x \in X} f(\xi_\infty(x)) \right\} \leq C^{|X|}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что для каждого  $X \subset \mathbb{Z}^v$ ,  $|X| < \infty$ , функция

$$\exp \left\{ h \sum_{x \in X} f(u_x) \right\}, \quad u_x \in U, \quad x \in X,$$

компактна при  $h > 0$ , поскольку компактна (в силу условия  $(A_1a)$ ) функция  $f: U \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Затем, используя утверждение 4.1.1, надо воспользоваться критерием слабой компактности [3].

Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 1.1.1. В силу (4.1.2) при  $|\varepsilon| < b_1^{-1}$  ( $b_1$  — константа из леммы (4.1.1))

$$Mg(\xi_t(x), x \in X) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\substack{A-(X,t)\text{-кластер} \\ \text{мощности } k}} K_A(g, X, t) \quad (4.1.12)$$

для каждого конечного  $X \in \mathbb{Z}^v$ ,  $t \in \mathbb{Z}^v$ , для любой ограниченной функции  $g: U^{|X|} \rightarrow \mathbb{R}$ .

В силу леммы 4.1.1 при  $|\varepsilon| < b_1^{-1}$  ряд (4.1.12) сходится абсолютно и равномерно по  $t \in \mathbb{Z}_+$ .

Следовательно, в формуле

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Mg(\xi_t(x), x \in X) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_A K_A(g, X, t)$$

справа можем перейти к пределу по  $t \rightarrow \infty$  почленно для каждого  $k \geq 1$  и получить

$$\begin{aligned} Mg(\xi_{\infty}(x), x \in X) &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} Mg(\xi_t(x), x \in X) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{A-(X,t)\text{-кластер}} K_A(g, X, t). \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Для каждого  $k \geq 0$  предел справа существует в силу эргодичности  $L$ , и ряд в (4.1.14) сходится абсолютно при  $|\varepsilon| < b_1^{-1}$ . Следовательно, существует и предел слева.

Легко видеть, что вероятностная мера на  $(V^{\mathbb{Z}^v}, B)$ , соответствующая случайному полю  $\xi_{\infty} = (\xi_{\infty}(z), z \in \mathbb{Z}^v)$ , является стационарной для процесса  $\xi_t = (\xi_t(z), z \in \mathbb{Z}^v)$ . Отсюда следует первое утверждение теоремы 1.1.1.

Аналитичность конечномерных распределений  $\xi_{\infty}$  при  $|\varepsilon| < b_1^{-1}$  сразу следует из абсолютной сходимости ряда (4.1.14) при всех  $|\varepsilon| < b_1^{-1}$ , всех конечных  $X \subset \mathbb{Z}^v$  и любой ограниченной функции  $g: U^{|X|} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Пусть  $|\varepsilon| < b_1^{-1}$ . Для оценки скорости сходимости рассмотрим

$$\begin{aligned} &|Mg(\xi_t(x), x \in X) - Mg(\xi_{t+t'}(x), x \in X)| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{N_t} |\varepsilon|^k |C_k(g, X, t) - C_k(g, X, t+t')| + \\ &+ \sum_{k > N_t} |\varepsilon|^k |C_k(g, X, t)|, \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

где  $t, t' \in \mathbb{Z}_+$ ,  $X$  — конечное подмножество  $\mathbb{Z}^v$ ,  $g: U^{|X|} \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченная функция, — произвольны.

В силу леммы 4.1.1. первая сумма в (4.1.15) справа не превосходит величины

$$C_1^{|X|} |g|_{\infty} \sum_{k=0}^{N_t} |\varepsilon|^k b_1^k \exp\{-\alpha_1 t\},$$

а вторая — величины

$$C_1^{|X|} |g|_{\infty} \sum_{k > N_t} |\varepsilon|^k b_1^k.$$

Отсюда, поскольку  $N_t = \left| \bigcup_{x \in X} \Lambda_0(x, t) \right| \geq t - 1$ , вытекает: при  $|\varepsilon| < b_1^{-1}$

$$|Mg(\xi_t(x), x \in X) - Mg(\xi_{t+t'}(x), x \in X)| \leq C^{|\Lambda|} e^{-\kappa t} |g|_\infty,$$

где  $\kappa = \min \left\{ \kappa_1, \ln \frac{1}{|\varepsilon| b_1} \right\}$ ,  $C > 0$  — некоторая постоянная.

Отсюда очевидным образом следует утверждение теоремы 1.1.1 об экспоненциальной скорости сходимости конечномерных распределений.

Теорема доказана.

## § 2. Системы стохастических уравнений

1. **Существование плотности.** Прежде всего докажем справедливость разложения (2.2.10).

Лемма 4.2.1. Ряд (2.2.10) сходится при всех  $t > 0$ ,  $X \subset Z^v$ ,  $|X| < \infty$  равномерно по  $\Lambda \subset Z^v$ ,  $v_x \in \mathbb{R}^{|\Lambda|}$ , начальному распределению  $\eta_\Lambda$ , если  $\eta_\Lambda \in [-C; C]^{|\Lambda|}$ .

Существует такое  $\varepsilon_1 > 0$ , что при всех  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$  сходимость также равномерна по  $t \in [T, \infty)$  для любого фиксированного  $T > 0$ .

Доказательство. Зафиксируем произвольно  $t > 0$ . Оценим  $k$ -й ( $k \geq 1$ ) член ряда (2.2.10). Воспользуемся условием на функцию  $b$

$$|b(u_1, \dots, u_N)| \leq B \sum_{i=1}^N |u_i|^{n-\delta}, \quad (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N,$$

находим

$$\begin{aligned} |\Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X)| &\leq |\varepsilon B|^k \sum_{z \in X\text{-кластер}} \sum_{i_1 \in Q} \int_0^{s_1} \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} \int_{\mathbb{R}} \dots \\ &\dots \int_{\mathbb{R}} \left[ \prod_{(y, s_j) \in \Lambda(z) \setminus \Lambda} \delta(u_y^j) \right] \times \left[ \prod_{i=1}^k |u_{z_i + i_i}^i|^{n-\delta} \right] \times \\ &\times \left[ \Pi_1 \left| \frac{\partial}{\partial u_y^j} p_0(s_{j-1} - s_j, u_y^j, u_y^{j-1}) \right| \right] [\Pi_2 p_0(s_i - s_j, u_y^j, u_y^j)] \times \\ &\times [\Pi_3 du_y^j] \left[ \prod_{y \in X - \Lambda(\bar{z})} p_0(t, u_y^{k+1}, v_y) \right] P_{\eta_\Lambda}(du_\Lambda^{k+1}) ds_k \dots ds_1, \end{aligned}$$

где  $\Lambda(\bar{z}) = \bigcup_{i=1}^k \{z_i + Q\}$  и  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  — произведения, определенные в (2.2.10).

Положим далее  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \in \{0, 1\}^{k+1}$ . Пусть  $t_0 > 0$  —

произвольно фиксировано. Определим множества

$$U_\alpha = \{ \bar{s} = (s_1, \dots, s_k) : t \equiv s_0 > s_1 > \dots > s_k > s_{k+1} \equiv 0, \\ s_{i-1} - s_i \leq t_0, \text{ если } \alpha_i = 0, \\ s_{i-1} - s_i > t_0, \text{ если } \alpha_i = 1, i = 0, \dots, k+1 \}.$$

Обозначим через  $\varphi$  следующую функцию

$$\varphi(t, \bar{z}, \bar{l}, \bar{\alpha}, v_X) = \int_{U_\alpha} \left\{ \prod_{y \in \{z_i, z_i + l_i, i = \overline{1, k}\}} \dots \right. \\ \dots \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{1 \leq i \leq k; z_i + l_i = y} |u_y^i|^{n-\delta} \right\} \times \left\{ \Pi'_1 \left| \frac{\partial}{\partial u_y^j} p_0(s_{j-1} - s_j, u_y^j, u_y^{j-1}) \right. \right\} \times \\ \times \{ \Pi'_2 p_0(s_i - s_j, u_y^j, u_y^i) \} \{ \Pi'_3 du_y^j \} \times \\ \times \left\{ \prod_{y \in X \setminus \{z_i, z_i + l_i, i = \overline{1, k}\}} p_0(t, u_y^{k+1}, v_y) \right\} P_{\eta_A}(du_A^{k+1}) \Big\} ds_k \dots ds_1, \quad (4.2.2)$$

где  $l = (l_1, \dots, l_k)$  и для каждого  $y$   $v_y \equiv u_y^0$ ;  $\Pi'_1$  — произведение по всем главным отрезкам  $I(y, s_j, s_{j-1})$  диаграммы  $D_2(t, (\bar{z}, \bar{s}))$ ;  $\Pi'_2$  — произведение по всем остальным отрезкам  $I(y, s_j, s_i)$  диаграммы  $D_2(t, (\bar{z}, \bar{s}))$  таким, что

$$(y, s_i) \in D_2((\bar{z}, \bar{s})) \cup \{X \times \{t\}\};$$

$\Pi'_3$  — произведение по всем точкам  $(y, s_j)$  диаграммы  $D_2(t, (\bar{z}, \bar{s}))$

Используя лемму 3.2.4, находим при  $\bar{\alpha} = (1, \dots, 1)$

$$\varphi(t, \bar{z}, \bar{l}, \bar{\alpha}, v_X) \leq C_1^k \frac{t^{k/2}}{\left[ \frac{k}{2} \right]^1} M \prod_{y \in \Lambda(\bar{z}, \bar{l})} p_0(t, \eta_y, v_y) \quad (4.2.3)$$

для некоторой  $C_1 = C_1(C) > 0$ , где  $\Lambda(\bar{z}, \bar{l}) = X \setminus \{z_i, z_i + l_i, i = \overline{1, k}\}$ .

Из леммы 3.2.4 следует также, что при  $t > T$ ,  $T > 0$  — произвольно фиксировано,

$$\varphi(t, \bar{z}, \bar{l}, \bar{\alpha}, v_X) \leq C_2^k C_2'^{|X|} \quad (4.2.3')$$

для некоторых  $C_2 = C_2(C)$ ,  $C' = C'(C) > 0$ , если  $\alpha = (1, \dots, 1)$ .

Наибольшую сложность представляет оценка  $\varphi$ , если  $z_1 = \dots = z_k$ ,  $\bar{l} = (0, \dots, 0)$ ,  $\bar{\alpha} = (0, \dots, 0)$ . В этом случае, учитывая лемму 3.2.1, имеем

$$\varphi(t, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{l}, v_X) \leq$$

$$\leq C_3^k \int_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{1}{V s_k} e^{-\frac{(u_z - u^k)^2}{2s_k} \beta_2 - B(u_z) + B(u^k)} \left[ \prod_{y \in X \setminus \{z_k\}} p_0(t, u_y, v_y) \right] \times$$

$$\times \left[ \prod_{i=k}^1 \frac{|u^i|^{n-\delta}}{s_{i-1} - s_i} \exp \left\{ -\frac{(u^i - u^{i-1})^2}{2(s_{i-1} - s_i)} \beta_2 - \alpha (s_{i-1} - s_i) |u^i|^{2n} \right\} \right] \times$$

$$\times P(du_\Lambda) du^k \dots du^1 d\bar{s},$$

для некоторой  $C_3 = C_3(C) > 0$ ;  $d\bar{s} = ds_k \dots ds_1$ .

Отсюда, используя очевидную оценку

$$|u|^{n-\delta} e^{-\tau \alpha u^{2n}} \leq A \tau^{-\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2n}}$$

для всех  $u \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \tau \leq t_0$ , где  $A > 0$  — постоянная, получаем:

$$\varphi(t, \bar{z}, \bar{l}, \bar{\alpha}, v_X) \leq C_4^k \int_0^t \dots \int_0^{s_{k-1}} \left[ \prod_{i=1}^k (s_{i-1} - s_i)^{-1 + \frac{\delta}{2n}} \right] ds_k \dots$$

$$\dots ds_1 M p_0(t, \eta_{X \setminus \{z_k\}}, v_{X \setminus \{z_k\}}) \quad (4.2.4)$$

для некоторой  $C_4 = C_4(C) > 0$ .

С помощью формулы Дирихле

$$\int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n \leq 1}} x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n + 1)},$$

$p_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 1$ ,  $\Gamma(p)$  — гамма-функция, из (4.2.4) находим:

$$\varphi(t, \bar{z}, \bar{l}, \bar{\alpha}, v_X) \leq C_5^k \frac{t^{\frac{k\delta}{2n}}}{\left[ \frac{k\delta}{2n} \right]_1} M p_0(t, \eta_{X \setminus \{z_k\}}, v_{X \setminus \{z_k\}})$$

для некоторой  $C_5 = C_5(C) > 0$ .

Аналогично рассуждая в остальных случаях, из (4.2.2) и (4.2.1) выводим

$$|\Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X)| \leq |\varepsilon B|^k \sum_{\bar{z} - X\text{-кластер } \bar{l}, \bar{\alpha}} \sum \varphi(t, \bar{z}, \bar{l}, \bar{\alpha}, v_X) \leq$$

$$\leq |\varepsilon B|^k C_6^k \left( \frac{t^{k/2}}{\left[ \frac{k}{2} \right]_1} + \frac{t^{\frac{k\delta}{2n}}}{\left[ \frac{k\delta}{2n} \right]_1} \right) \max_{\bar{z}, \bar{l}} M p_0(t, \eta_{X \setminus \{z_i, z_{i+l}, i=1, \bar{k}\}}, v_{X \setminus \{z_i, z_{i+l}, i=1, \bar{k}\}}) \quad (4.2.5)$$

для некоторой  $C_6 = C_6(C) > 0$ .

Отсюда в силу леммы 3.2.1 и следует первое утверждение леммы. Второе утверждение доказывается аналогично, если использовать оценки типа (4.2.3').

Лемма доказана.

Следовательно, плотность  $p^\Lambda(t, v_X)$  действительно представляема в виде ряда (2.2.10) для всех  $t > 0$ ,  $X \subset \Lambda \subset Z^V$ ,  $|\Lambda| < \infty$ ,  $v_X \in \mathbb{R}^{|\Lambda|}$ .

Теорема 4.2.1. Существует

$$p(t, v_X) = \lim_{\Lambda \uparrow Z^V} p^\Lambda(t, v_X)$$

для каждого  $X \subset Z^V$ ,  $|X| < \infty$ ,  $v_X \in \mathbb{R}^{|\Lambda|}$ ,  $t > 0$ .

Доказательство. В силу леммы 4.2.1 в формуле

$$\lim_{\Lambda \uparrow Z^V} p^\Lambda(t, v_X) = \lim_{\Lambda \uparrow Z^V} \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X)$$

можем перейти к пределу почленно:

$$\lim_{\Lambda \uparrow Z^V} p^\Lambda(t, v_X) = M p_0(t, \eta^X, v_X) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{kt} \lim_{\Lambda \uparrow Z^V} \Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X). \quad (4.2.6)$$

Положим

$$\Lambda_0(k, X) = \bigcup_{\bar{z}-X\text{-кластер мощности } k} \bigcup_{i=1}^k \{z_i + Q\}, \quad k \geq 1.$$

Тогда из (2.2.10) следует, что

$$\Phi_\Lambda^k p_0^\Lambda(t, v_X) = \Phi_{\Lambda_0}^k(k, X) p_0^{\Lambda_0}(t, v_X), \quad k \geq 1, \quad (4.2.7)$$

для всех  $\Lambda \geq \Lambda_0(k, X)$ , что влечет существование пределов справа в (4.2.6) для каждого  $k \geq 1$  и, следовательно, предела слева.

Теорема доказана.

Таким образом мы получили систему согласованных конечномерных распределений процесса  $\xi_t$ , удовлетворяющего уравнению (1.1.2), (1.1.2'), т. е. фактически построили процесс  $\xi_t$ .

Следствие 4.2.1. Пусть  $X \subset Z^V$ ,  $|X| < \infty$ . Для каждого  $t > 0$ ,  $v_X \in \mathbb{R}^{|\Lambda|}$  плотность процесса  $(\xi_t(x), x \in X)$ ,  $\xi_t$  — из уравнения (1.1.2) с начальным условием  $\xi_0 = \eta$ ,  $\eta \in [-C, C]^{Z^V}$  можно выразить в виде ряда:

$$p(t, v_X) = M p_0(t, \eta^X, v_X) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{kt} \sum_{\substack{\bar{z}-X\text{-кластер} \\ \text{в } Z^V \text{ мощности } k}} \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \dots \int_0^{s_{k-1}} \Psi_t(s, \bar{z}, k, v_X) ds, \quad (4.2.8)$$

где  $\eta^X = (\eta(z), z \in X)$ ,

$$\Psi_t(\bar{s}, \bar{z}, k, v_X) = \int_R \dots \int_R \left\{ \Pi_1 b(u_{y+Q}^j) \frac{\partial}{\partial u_{y^j}} p_0(s_{j-1} - s_j, u_{y^j}^j, u_{y^j}^{j-1}) \right\} \times \\ \times \left\{ \Pi_2 p_0(s_l - s_j, u_{y^j}^j, u_{y^j}^j) \right\} \left\{ \prod_{X \setminus \Lambda(\bar{z})} p_0(t, u_{y^j}^{k+1}, v_y) \right\} \times \\ \times P_{\eta_{\Lambda(\bar{z}) \cup X}(du_{\Lambda(\bar{z}) \cup X}^{k+1})} \Pi_3 du_{y^j}^j,$$

$\Pi_1$  — произведение по всем главным отрезкам  $I(y, s_j, s_{j-1})$  диаграммы  $D_2(t, (\bar{z}, \bar{s}))$ ;  $\Pi_2$  — произведение по всем остальным отрезкам  $I(y, s_j, s_l)$  таким, что

$$(y, s_l) \in D_2(t, (\bar{z}, \bar{s})) \cup \{X \times \{t\}\};$$

$\Pi_3$  — произведение по всем точкам  $(y, s_j)$  диаграммы  $D_2(t, (\bar{z}, \bar{s}))$ ;

$$\Lambda(\bar{z}) = \bigcup_{i=1}^k \{z_i + Q\}.$$

Доказательство. Формула (4.2.8) следует из (4.2.7) и (2.2.10).

Доказательство закончено.

**2. Доказательство теоремы 1.1.2.** Пусть  $0 < t_0 \leq t, t' > 0$ ,  $X \subset Z'$ ,  $|X| < \infty$ , произвольно фиксированы. Обозначим через  $p_\eta(t, v_X)$  и  $p_{\eta'}(t, v_X)$  плотности процессов, заданных системой (1.1.2) с начальными распределениями  $\eta$  и  $\eta'$  соответственно. (Считаем, что  $\eta$  и  $\eta'$  удовлетворяют условию теоремы).

Из формулы (4.2.8) следует

$$p_\eta(t+t', v_X) - p_{\eta'}(t, v_X) = M(p_0(t+t', \eta_X, v_X) - p_0(t, \eta'_X, v_X)) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{z \in X\text{-классер}} \left( \int_0^{t+t'} \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} \psi_{t+t'}(\bar{s}, \bar{z}, k, v_X) d\bar{s} - \right. \\ \left. - \int_0^t \dots \int_0^{s_{k-1}} \psi_t(\bar{s}, \bar{z}, k, v_X) d\bar{s} \right). \quad (4.2.9)$$

Обозначим через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  следующие функции:

$$\sigma_1(k, \bar{z}, t, t', v_X) = \int_0^t \dots \int_0^t \int_R \dots \int_R \left\{ \int_R p_0(t+t' - s_1, u_{\Lambda(\bar{z})}^1, u_{\Lambda(\bar{z})}^1) \times \right. \\ \times p_0(t+t', u_{X \setminus \Lambda(\bar{z})}, v_{X \setminus \Lambda(\bar{z})}) P_\eta(du_{X \cup \Lambda(\bar{z})}) - \\ - \int_{R(x \cup \Lambda(\bar{z}))} p_0(t - s_1, u_{\Lambda(\bar{z})}^1, u_{\Lambda(\bar{z})}^1) p_0(t, u_{X \setminus \Lambda(\bar{z})}^1, v_{X \setminus \Lambda(\bar{z})}) \times \\ \times P_{\eta'}(du_{X \cup \Lambda(\bar{z})}^1) \left. \right\} \left\{ \Pi^1 b(u_{y+Q}^j) \frac{\partial}{\partial u_{y^j}} p_0(s_j - s_{j+1}, u_{y^j}^j, u_{y^j}^{j+1}) \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \{\Pi^2 p_0(s_1 - s_j, u_y^j, u_y^j)\} \{\Pi^3 p_0(s_j - s_l, u_y^j, u_y^j)\} \times \\ & \times \{\Pi^4 du_y^j\} ds_k \dots ds_1, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

где для каждого  $\bar{s}, \bar{z}$ :  $\Lambda(\bar{z}) = \bigcup_{i=1}^k \{z_i + Q\}$ ;  $\Pi^1$  — произведение по всем главным отрезкам  $I(y, t - s_j, t - s_{j+1})$  диаграммы  $D_2(t, \{(z_i, t - s_i), i = \bar{1}, \bar{k}\})$ ;  $\Pi^2$  — произведение по всем отрезкам  $\{y\} \times [t - s_1, t - s_j]$  таким, что  $(y, t - s_j) \in D_2(\{(z_i, t - s_i), i = \bar{1}, \bar{k}\}) \cup \{X \times t\}$ ;  $\Pi^3$  — произведение по всем остальным отрезкам  $I(y, t - s_j, t - s_i), j > 1$ , диаграммы  $D_2(t, \{(z_i, t - s_i), i = \bar{1}, \bar{k}\})$  таким, что их верхний конец либо является точкой диаграммы, либо принадлежит множеству  $\{X \times t\}$ ;  $\Pi^4$  — произведение по всем точкам  $(y, t - s_j)$  той же диаграммы, включая точки  $(y, t - s_1), y \in \Lambda(\bar{z})$ .

$$\sigma_2(k, \bar{z}, t, t', v_x) = \int_0^{t+t'} \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} \Psi_{t+t'}(\bar{s}, \bar{z}, k, v_x) d\bar{s}.$$

Сделав в (4.2.9) справа преобразование  $s_i \rightarrow t - s_i, i = \bar{1}, \bar{k}$ , нетрудно получить

$$\begin{aligned} p_\eta(t+t', v_x) - p_{\eta'}(t, v_x) &= M p_0(t+t', \eta_x, v_x) - M p_0(t, \eta'_x, v_x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\substack{\bar{z}=(z_k, \dots, z_1) \\ -X\text{-кластер}}} (\sigma_1(k, \bar{z}, t, t', v_x) + \sigma_2(k, \bar{z}, t, t', v_x)). \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Оценим сверху  $|\sigma_1|$  и  $|\sigma_2|$ .

Преобразуем  $\sigma_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_1(k, \bar{z}, t, t', v_x) &= \int_0^{t+t'} \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} \int_R \dots \int_R M [p_0(t+t' - s_1, \eta_{\Lambda(\bar{z}) \cup X}, \\ & u_{\Lambda(\bar{z}) \cup X}^1 - p_0(t - s_1, \eta'_{\Lambda(\bar{z}) \cup X}, u'_{\Lambda(\bar{z}) \cup X})] p_0(s_1, u_{X \setminus \Lambda(\bar{z})}^1, v_{X \setminus \Lambda(\bar{z})}) \times \\ & \times \left\{ \Pi^1 b(u_{y+Q}^j) \frac{\partial}{\partial u_y^j} p_0(s_j - s_{j+1}, u_y^j, u_y^{j+1}) \right\} \{ \Pi^2 p_0(s_1 - s_j, u_y^j, u_y^j) \} \times \\ & \times \{ \Pi^3 p_0(s_j - s_l, u_y^j, u_y^j) \} \{ \Pi^4 du_y^j \} \{ \Pi_{y \in X \setminus \Lambda(\bar{z})} du_y^j \} d\bar{s}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Заметим, что для каждого  $t > 0, z \in \mathbb{Z}^d, v_z \in \mathbb{R}$  найдется такое значение  $\omega_z(t, v_z) \in [-C, C]$ , зависящее от распределения  $\eta_z$ , что

$$M p_0(t, \eta_z, v_z) = p_0(t, \omega_z(t, v_z), v_z).$$

Воспользовавшись этим замечанием и оценкой (3.2.34), из

(4.2.12) выводим:

$$\begin{aligned}
 & |\bar{\sigma}_1(k, \bar{z}, t, t', v_X)| \leq B^k \sum_{\bar{\alpha}} \sum_{\substack{\bar{l}=(l_1, \dots, l_k) \\ l_i \in \{z_i + Q\}, i=\bar{1}, k}} \int_{U_{\bar{\alpha}}} \int_{\bar{K}} \dots \\
 & \dots \int_{\bar{K}} \left\{ \sum_{y \in \Lambda(\bar{z}) \cup X} |Mp_0(t+t'-s_1, \eta_y, u_y^1) - Mp_0(t-s_1, \eta_y^1, u_y^1)| \times \right. \\
 & \quad \times \prod_{z \in \{\Lambda(\bar{z}) \cup X\} \setminus \{y\}} \max\{p_0(t+t'-s_1, \omega_z(t+t'-s_1, u_z^1, u_z^1), \\
 & \quad \left. p_0(t-s_1, \omega_z^1(t-s_1, u_z^1, u_z^1))\} A^{|\bar{X} \setminus \{z_i, l_i, i=\bar{1}, k\}|} \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left\{ \prod_{i: l_i=y} |u_{l_i}^i|^{n-\delta} \right\} |\Phi_y p_0(s_1 - s_m, u_y^1, u_y^m)| \times \right. \quad (4.2.13) \\
 & \quad \times \left. \left\{ \prod_y \left| \frac{\partial}{\partial u_y^j} p_0(s_j - s_{j+1}, u_y^j, u_y^{j+1}) \right| \right\} \{ \Pi_y^2 p_0(s_i - s_j, u_y^i, u_y^j) \} \times \right. \\
 & \quad \times \left. \{ \Pi_y^3 du_y^j \} \left\{ \prod_{y \in \Lambda(\bar{z}) \cup X} du_y^1 \right\} d\bar{s},
 \end{aligned}$$

где для каждого  $y \in \{z_i, l_i, i=1, \dots, k\}, \bar{s}$

$$\Phi_y = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_y^j}, & \text{если } y = z_1, \\ E, & \text{если } y \neq z_1; \end{cases}$$

индекс  $m$  таков, что множество  $\{y\} \times [0, t-s_m]$  является главным отрезком диаграммы  $D_2(t, \{z_i, t-s_i\}, i=\bar{1}, k\})$  и

$$(y, s_m) \in \{(l_i, t-s_i), (z_i, t-s_i), i=\bar{1}, k\};$$

$\Pi_y^1$  — произведение по всем главным отрезкам  $I(y, t-s_j, t-s_i)$  диаграммы  $D_2(t, \{(z_i, t-s_i), i=\bar{1}, k\})$ ;  $\Pi_y^2$  — произведение по всем остальным отрезкам  $I(y, t-s_i, t-s_j)$  диаграммы таким, что  $i \geq 1$  и

$$(y, t-s_j) \in \{(l_i, t-s_i), (z_i, t-s_i), i=\bar{1}, k\} \cup \{X \times t\};$$

$\Pi_y^3$  — произведение по всем точкам  $(y, t-s_j), j > 1$ , диаграммы таким, что  $(y, t-s_j) \in \{(l_i, t-s_i), (z_i, t-s_i), i=\bar{1}, k\}$ ;  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \in (0, 1)^{k+1}$  и  $U_{\bar{\alpha}}$  — множества, определенные выше.

Обозначив для каждого  $\bar{\alpha}, \bar{l}$  через  $\sigma_{\bar{\alpha}, \bar{l}}(k, \bar{z}, t, t', v_X)$  соответствующий член суммы в (4.2.13), получим

$$|\sigma_1(k, \bar{z}, t, t', v_X)| \leq B^k \sum_{\bar{\alpha}, \bar{l}} \sigma_{\bar{\alpha}, \bar{l}}(k, \bar{z}, t, t', v_X). \quad (4.2.14)$$

Воспользовавшись далее леммами 3.2.1 и 3.2.5, оценкой (3.2.16) (см. также вывод оценки (4.2.4)), нетрудно получить

$$\sigma_{\bar{\alpha}, \bar{t}}(k, \bar{z}, t, t', v_X) \leq A_1^k A_2^{k-1} \left\{ \sum_{\bar{\alpha} \in \{0,1\}^{k+1}} \int_{v_{\bar{\alpha}}: \bar{\alpha}_1=0} \left[ \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) \right] d\bar{s} + \right. \\ \left. + \sum_{\bar{\alpha}: \bar{\alpha}_1=1} \int_{v_{\bar{\alpha}}} e^{-\gamma(t-s_1)} \left[ \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) \right] d\bar{s} \right\}, \quad (4.2.15)$$

где

$$F(\tau) = \begin{cases} \tau^{-1+\frac{\delta}{2n}}, & 0 < \tau \leq t_0, \\ e^{-\gamma\tau}, & \tau > t_0; \end{cases}$$

$A_1 = A_1(C)$ ,  $A_2 = A_2(C) > 0$  — некоторые постоянные.

Рассмотрим каждую сумму в (4.2.15) справа отдельно:

$$\sum_{\bar{\alpha}: \bar{\alpha}_1=0} \int_{v_{\bar{\alpha}}} \left[ \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) \right] d\bar{s} \leq \\ \leq \sum_{j=0}^k C_k^j \int_{\substack{t-t_0 < \tau_1 + \dots + \tau_k < t \\ \tau_i < t_0, i=1, \dots, j; \\ \tau_i > t_0, i=j+1, \dots, k}} \dots \int e^{-\gamma \sum_{i=j+1}^k \tau_i} \left[ \prod_{i=1}^j \tau_i^{-1+\frac{\delta}{2n}} \right] d\bar{\tau},$$

где  $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ .

Используя формулу Дирихле, из последней оценки выводим:

$$\sum_{\bar{\alpha}: \bar{\alpha}_1=0} \int_{v_{\bar{\alpha}}} \left[ \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) \right] d\bar{s} \leq e^{-\gamma t} \sum_{j=0}^k e^{\gamma t_0(j+1)} C_k^j A_3^j \times \\ \times \int_{\substack{\tau_{j+1} + \dots + \tau_k < t \\ \tau_i > t_0, i=j+1, \dots, k}} \frac{\left( t - \sum_{i=j+1}^k \tau_i \right)^{\frac{j\delta}{2n}}}{\left[ \frac{j\delta}{2n} \right]!} d\tau_{j+1} \dots d\tau_k \leq \\ \leq e^{-\gamma t} A_4^k \sum_{j=0}^k \frac{t^{k-j(1-\frac{\delta}{2n})}}{\left[ k-j \left( 1 - \frac{\delta}{2n} \right) \right]!}$$

для некоторых  $A_3, A_4 > 0$ .

Отсюда получаем

$$\sum_{\alpha: \alpha_1=0} \int_{U_{\alpha}} \left[ \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) \right] d\bar{s} \leq e^{-\gamma t} A_5^k \left( \min \left\{ 1, \frac{\gamma}{2} \right\} \right)^{-k} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma}{2} \right)^j \frac{t^j}{j!} \leq e^{-\frac{\gamma}{2} t} A_6^k \quad (4.2.16)$$

для некоторых  $A_5, A_6 > 0$ .

Аналогичными рассуждениями находим оценку для второй суммы в (4.2.15):

$$\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \{0,1\}^k \cup (1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1})} \int e^{-\gamma(t-s_i)} \left[ \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) \right] d\bar{s} \leq$$

$$\leq e^{-\frac{\gamma}{2} t} A_7^k, \quad (4.2.17)$$

для некоторой  $A_7 > 0$ .

Таким образом, из (4.2.14) — (4.2.17) находим:

$$|\sigma_1(k, \bar{z}, t, t', v_X)| \leq B_1^k A_2^{|X|} e^{-\frac{\gamma}{2} t}, \quad (4.2.18)$$

где  $B_1 = B_1(C) > 0$  — некоторая постоянная.

Найдем оценку для  $|\sigma_2|$ .

Так же, как и в предыдущем случае, из результатов § 2 главы 3 выводим:

$$|\sigma_2(k, \bar{z}, t, t', v_X)| \leq B^k A_2^{|X|} A_8^k \int_t^{t+t'} \int_0^{s_1} \dots$$

$$\dots \int_0^{s_{k-1}} \left[ \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) \right] d\bar{s}, \quad (4.2.19)$$

где  $A_8 = A_8(C) > 0$  — некоторая постоянная.

Найдем оценку последнего интеграла. Выделим в области интегрирования множество:

$$U = \{s = (s_1, \dots, s_k) : s_1 - s_2 \leq t_0, \dots, s_k \leq t_0, s_1 \geq t,$$

$$t + t' > s_1 > \dots > s_k > 0\}$$

и обозначим

$$U_1 = \{\bar{s} : s_1 \geq t, t + t' > s_1 > \dots > s_k > 0\} \setminus U.$$

Тогда

$$\int_t^{t+t'} \dots \int_0^{s_{k-1}} \left[ \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) \right] d\bar{s} \leq \\ \leq \int_U \left[ \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) \right] d\bar{s} + \int_U \left[ \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) \right] d\bar{s}. \quad (4.2.20)$$

Рассмотрим последние два интеграла отдельно:

$$\int_U \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) ds_i \leq \left( \int_0^{t_0} \tau^{-1 + \frac{\delta}{2n}} d\tau \right)^k \leq (2nt_0^{\frac{\delta}{2n}})^k. \quad (4.2.21)$$

Заметим, что если  $k < \frac{t}{t_0}$ , то  $U = \emptyset$ , поскольку

$$(s_1 - s_2) + \dots + s_k \equiv s_1 \geq t.$$

В интеграле

$$\int_U \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) ds_i,$$

сделав необходимую замену переменных, легко получить:

$$\int_U \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) ds_i \leq k \int_t^{t+t'} \left\{ \int_{\substack{\tau_1 + \dots + \tau_{k-1} \leq s_1 \\ \tau_i > 0, i=1, \dots, k-1}} F(\tau_1) \dots \right. \\ \left. \dots F(\tau_{k-1}) e^{-\gamma \left( s_1 - \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \right)} d\tau \right\} ds_1. \quad (4.2.22)$$

Для выражения в фигурных скобках мы уже нашли оценку (см. (4.2.15)–(4.2.17)). Поэтому из (4.2.22) получаем:

$$\int_U \prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1}) ds_i \leq A_7^k \int_t^{t+t'} e^{-\frac{\gamma}{2} s_1} ds_1 \leq A_9^k e^{-\frac{\gamma}{2} t}, \quad (4.2.23)$$

где  $A_9 > 0$  — некоторая постоянная

Объединяя (4.2.23) и (4.2.21), из (4.2.10) и (4.2.19) выводим:

$$|\sigma_2(k, \bar{z}, t, t', v_X)| \leq A_2^k |B_2^k| \left( e^{-\frac{\gamma}{2} t} + g_t(k) \cdot t_0^{\frac{k\delta}{2n}} \right), \quad (4.2.24)$$

где  $B_2 = B_2(C) > 0$  — некоторая постоянная,

$$g_t(k) = \begin{cases} 0, & k < \left[ \frac{t}{t_0} \right], \\ 1, & k \geq \left[ \frac{t}{t_0} \right]. \end{cases}$$

Таким образом, подставляя в (4.2.11) оценки (4.2.24), (4.2.18), а также используя теорему 3.2.1, получаем:

$$\begin{aligned} & |p_n(t+t', v_X) - p_{n'}(t, v_X)| \leq \\ & \leq A_3^{|X|} \left\{ e^{-\gamma t} + \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon|^k B_3^k \left( e^{-\frac{\gamma}{2}t} + t_0^{\frac{k\delta}{2n}} g_t(k) \right) \right\} \end{aligned}$$

для некоторых  $A_3 = A_3(C)$ ,  $B_3 = B_3(C) > 0$ . Отсюда ясно, что, выбрав  $\varepsilon' > 0$  достаточно малым ( $\varepsilon' B_3 < 1$ ;  $\varepsilon' B_3 t_0^{\frac{\delta}{2n}} < 1$ ), при всех  $|\varepsilon| < \varepsilon'$  будем иметь:

$$|p_n(t+t', v_X) - p_{n'}(t, v_X)| \leq \theta^{|X|} e^{-\gamma t}$$

для некоторых  $\theta = \theta(C)$ ,  $\gamma > 0$ , не зависящих от распределений  $\eta$ ,  $\eta'$  и множества  $X$ .

Из этой оценки и последнего утверждения леммы 4.2.1 и следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

**3. Доказательство теоремы 1.1.3.** Предыдущее доказательство теоремы 1.1.2 полностью проходит, если везде считать  $\delta = 0$ ,  $n = 1$ , и вместо оценок (1.2.4) и (4.2.5) использовать следующую лемму.

**Лемма.** Для любых  $\alpha, \delta_0 > 0$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ ,  $k \geq 1$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{t=s_0 > s_1 > \dots > s_k > s_{k+1} = 0 \\ s_i - s_{i+1} < \delta_0, i=0, \dots, k}} \dots \int_{\mathbb{R}^k} \frac{e^{-\frac{(u-u_1)^2}{2(t-s_1)}}}{\sqrt{t-s_1}} \prod_{i=1}^k |u_i| e^{-(s_i - s_{i+1})u_i^2} \times \\ & \times \frac{e^{-\frac{(u_i - u_{i+1})^2}{2(s_i - s_{i+1})}}}{s_i - s_{i+1}} du_i ds_i \leq C^k e^{\alpha u^2} \end{aligned}$$

для некоторой  $C = C(\delta_0) > 0$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $f(\bar{u}, \bar{s})$  подынтегральную функцию в выражении слева,  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_k)$ ,  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_k)$ .

Определим множества  $U_{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (0, 1)^k$ :

$$U_{\bar{\alpha}} = \{(\bar{u}, \bar{s}) = (u_1, \dots, u_k, s_1, \dots, s_k) : t \equiv s_0 > s_1 > \dots \\ \dots > s_k > s_{k+1} \equiv 0, \\ s_i - s_{i+1} < \delta_0, i = 0, \dots, k; \\ |u_i - u_{i+1}| \leq 1, \text{ если } \alpha_i = 0, \\ |u_i - u_{i+1}| > 1, \text{ если } \alpha_i = 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Ясно, что

$$\int_0^t \dots \int_0^{s_{k-1}} \int_{R^k} f(\bar{u}, \bar{s}) d\bar{u} d\bar{s} \leq \sum_{\bar{\alpha}} \int_{U_{\bar{\alpha}}} f(\bar{u}, \bar{s}) d\bar{u} d\bar{s}.$$

$s_i - s_{i+1} < \delta_0, i = 0, \dots, k$

Зафиксируем произвольно  $\bar{\alpha} \in (0, 1)^k$  и разобьем вектор  $\bar{\alpha}$  на серии из нулей и единиц:

$$(0, \dots, 0, \underset{l_1}{1}, \dots, \underset{l_1+j_1}{1}, 0, \dots, 0, \underset{l_2}{1}, \dots, \underset{l_2+j_2}{1}, 0, \dots).$$

Теперь, используя оценку

$$|u_i| \frac{e^{-(s_i - s_{i+1})u_i^2}}{s_i - s_{i+1}} e^{-\frac{(u_i - u_{i+1})^2}{2(s_i - s_{i+1})}} \leq A_1 \frac{e^{-\frac{(u_i - u_{i+1})^2}{4(s_i - s_{i+1})}}}{\sqrt{s_i - s_{i+1}}}$$

для некоторой  $A_1 > 0$  в случае  $\alpha_i = 1$ , в интеграле

$$\int_{U_{\bar{\alpha}}} f(\bar{u}, \bar{s}) d\bar{u} d\bar{s}.$$

произведем интегрирование по всем  $u_j, j \geq 1$ , таким, что  $\alpha_j = 1$ .

В результате получим оценку

$$\int_{U_{\bar{\alpha}}} f(\bar{u}, \bar{s}) d\bar{u} d\bar{s} \leq A_2^k \int_0^t \dots \int_0^{s_{k-1}} \int_{R^k} \dots \int_R \frac{e^{-\frac{(u-u_1)^2}{2(t-s_1)}}}{\sqrt{t-s_1}} \times \\ \times \left[ \prod_{l=1}^{l_1-2} (|u| + l) \frac{e^{-\frac{(u_l - u_{l+1})^2}{2(s_l - s_{l+1})}}}{s_l - s_{l+1}} \right] \frac{e^{-\frac{(u_{l_1-1} - u_{l_1+j_1})^2}{4(s_{l_1-1} - s_{l_1+j_1})}}}{\sqrt{s_{l_1-1} - s_{l_1+j_1}}} \times$$

$$\times \left[ \prod_{l=i_1+j_1}^{i_2-2} (|u_{l_1+j_1}| + l) \frac{e^{-\frac{(u_l - u_{l+1})^2}{2(s_l - s_{l+1})}}}{s_l - s_{l+1}} \right] \dots$$

$$\dots \left\{ \prod_{i:\alpha_i=0} du_i \right\} d\bar{s},$$

где интегрирование ведется по всем  $u_i$  таким, что  $\alpha_i = 0$ ,  $A_2 > 0$  — некоторая постоянная. Отсюда нетрудно получить, что

$$\int_{U_{\alpha}} f(\bar{u}, \bar{s}) d\bar{u} d\bar{s} \leq A_3 \int_0^t \dots \int_0^{s_{k-1}} \frac{1}{\sqrt{t-s_1}} \left[ \prod_{i:\alpha_i=0} \frac{1}{\sqrt{s_i - s_{i+1}}} \right] \times$$

$$\times \left( |u|^{k - \sum_{i=1}^k \alpha_i} + \left( k - \sum_{i=1}^k \alpha_i \right)! \right) \leq$$

$$\leq A_k^4 \frac{1}{k!} \left( |u|^{k - \sum_{i=1}^k \alpha_i} + \left( k - \sum_{i=1}^k \alpha_i \right)! \right)$$

для некоторых  $A_3 > 0$ ,  $A_4 = A_4(\delta) > 0$ .

Используя последнюю выкладку, находим, что

$$\int_{\substack{t > s_1 > \dots > s_k > 0 \\ s_1 - s_{l+1} < \delta_0, l=0, k}} \int_{\mathbb{R}^k} f(\bar{u}, \bar{s}) d\bar{u} d\bar{s} \leq \sum_{l=0}^k C_k^l A_k^k \frac{1}{k!} (|u|^{k-n} + (k-n)!),$$

где  $C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}$ , откуда и следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Басис В. Я. О стационарности и периодичности многокомпонентных марковских процессов с локальным взаимодействием // Многокомпонент. случайные системы. — М. — 1978. — С. 31—46 (РЖМат, 1978, 7В284)
2. Беляев Ю. К., Громак Ю. И., Мальшев В. А. Об инвариантных случайных булевских полях // Мат. заметки. — 1969. — 6, № 5. — С. 555—566 (РЖМат, 1970, 6В58)
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. — 351 с.
4. Васерштейн Л. Н. Марковские процессы на счетном произведении пространств, описывающие большие системы автоматов // Пробл. передачи инф. — 1969. — 5, № 3. — С. 64—72 (РЖМат, 1970, 2В388)
5. —, Леонтович А. М. Об инвариантных мерах некоторых марковских операторов, описывающих однородную случайную среду // Пробл. передачи инф. — 1970. — 6, № 1. — С. 71—80 (РЖМат, 1970, 10В49)

6. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. Пер. с англ. М.: Наука, 1986.— 445 с. (РЖМат, 1987, 3В2К)
7. Взаимодействующие марковские процессы и их применение в биологии // Сб. докл. шк.-семина., Пушино.— 1977, 1979, 1982, 1986
8. *Гиря Т. В.* Стабилизация стохастических решений нелинейного параболического уравнения с белым шумом // Успехи мат. наук.— 1981.— 36, № 2.— С. 177—178 (РЖМат, 1981, 10В117)
9. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.— 370 с. (РЖМат, 1983, 11В1002К)
10. *Добрушин Р. Л.* Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности // Теория вероятностей и ее применения.— 1968.— 13, № 2.— С. 201—229 (РЖМат, 1969, 7В119)
11. —, Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент — Существование предельного процесса и его эргодичность // Пробл. передачи инф.— 1971.— 7, № 2.— С. 70—87 (РЖМат, 1971, 12В460)
12. *Жалис А. И.* Гауссовские марковские случайные последовательности с локальным взаимодействием // Лит. мат. сб.— 1986.— 26, № 1.— С. 38—52
13. *Игнатьев И. А., Малышев В. А.* Кластерное разложение для локально взаимодействующих цепей Маркова // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1988.— № 5.— С. 3—7 (РЖМат, 1989, 3В233)
14. —, —, Процессы с локальным взаимодействием и сети связи // Пробл. передачи инф.— 1989.— 25, № 1.— С. 65—77 (РЖМат, 1989, 7В315)
15. —, —, *Молчанов С. А.* Моментно-замкнутые процессы с локальным взаимодействием / Препр. М. Ин-т пробл. передачи инф.— 1988.— 43 с. (РЖМат, 1988, 12В58)
16. —, *Турова Т. С.* Гауссовские процессы с локальным взаимодействием // Взаимодейств. марк. процессы и их применение в биол. Сб. докл. 4 шк.-семина., Пушино, 1984, Пушино.— 1986.— С. 13—25 (РЖМат, 1987, 11В33)
17. *Ильясов Я. Ш., Комеч А. И.* Теорема Гирсанова и эргодические свойства статистических решений нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. МГУ.— 1987.— № 12.— С. 90—117 (РЖМат, 1988, 5В376)
18. *Имайкин В. М., Комеч А. И.* О больших отклонениях решений нелинейных стохастических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— МГУ.— 1988.— № 13.— С. 177—196 (РЖМат, 1988, 9В395)
19. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. Перев. с англ.— М.: Мир, 1968.— 394 с. (РЖМат, 1968, 8В56К)
20. *Кельберт М. Я., Сухов И. М.* Условия существования и единственности случайного поля, описывающего состояния коммутационной сети // Пробл. передачи инф.— 1983.— 13, № 4.— С. 50—71
21. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. // ВИНТИ.— 1979.— 14.— С. 71—146 (РЖМат, 1980, 4В69)
22. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974.— 696 с. (РЖМат, 1974, 7В292К)
23. *Малышев В. А., Игнатьев И. А.* Локально взаимодействующие процессы с некомпактным множеством значений // Вест. МГУ. Сер. 1.— 1987.— № 2.— С. 3—6 (РЖМат, 1987, 6В59)
24. —, *Меньшиков М. В.* Эргодичность, непрерывность и аналитичность счетных цепей Маркова // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1979.— 39.— С. 3—48 (РЖМат, 1979, 9В47)
25. —, *Миглос Р. А.* Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений.— М.: Наука, 1985.— 288 с. (РЖМат, 1986, 1В420К)

26. —, Подорольский В. А., Турова Т. С. Эргодичность бесконечных систем стохастических уравнений // *Мат. заметки*.— 1989.— 45, № 4.— С. 78—88 (РЖМат, 1989, 7В96)
  27. Пирогов С. А. Кластерные разложения для систем автоматов // *Пробл. передачи инф.*— 1986.— 22, № 4.— С. 60—66 (РЖМат, 1987, 3Г42)
  28. Розовский Б. Л. Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов.— М.: Наука, 1983.— 208 с. (РЖМат, 1984, 2В1К)
  29. Ставская О. Н., Пятецкий-Шапиро И. И. Об однородных сетях из спонтанно активных элементов // *Пробл. кибернетики*. М., Наука, 1968.— 20.— С. 91—106 (РЖМат, 1969, 7В502)
  30. Турова Т. С. Диффузионные процессы с локальным взаимодействием. Автореферат дис. канд. физ.-мат. наук, М., 1989.— 14 с.
  31. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М.: Наука, 1969.— 367 с. (РЖМат, 1970, 6В94К)
  32. Штойян Д. Качественные свойства и оценки стохастических моделей. Пер. с нем.— М.: Мир, 1979.— 268 с. (РЖМат, 1980, 6В61)
  33. Holley R., Stroock D. Diffusions on an infinite dimensional torus // *J. Funct. Anal.*— 1981.— 42, № 1.— С. 29—63 (РЖМат, 1982, 1Б1223)
  34. Hsiao C. T. Stochastic processes with Gaussian interaction of components // *Z. Wahrsch. Gebiete.*— 1982.— 59.— С. 39—53
  35. Ignatyuk I. A., Malyshev V. A., Sidoravitchus V. Convergence of the method of stochastic quantization // *Proceedings of the Fifth Vilnius Conference of Probability NVS Science Press— 1989.— 1*
  36. Liggett T. Interacting particle systems. New York e. a.: Springer.— XVI. 488 с. (*Grundl. math. Wiss., Bd 276*) Лиггетт Т. Марковские процессы с локальным взаимодействием. Пер. с англ.— М.: Мир, 1989.— 550 с. (РЖМат, 1989, 7В312)
  37. Royer G. Processus de diffusion associe a certains modeles d'Asing a spin continus // *Z. Wahrsch. und Verw. Gebiete.*— 1979.— 46, № 2.— С. 165—176.
  38. Wick W. D. Convergence to equilibrium of the stochastic Helsenberg model // *Commun. Math. Phys.*— 1981.— 81, № 3.— С. 361—377 (РЖМат, 1982, 3В252)
-