А. А. Ельцов, А. И. Рубан, Робастная идентификация распределенных динамических объектов, описываемых нагруженными уравнениями, с применением оценок функций чувствительности,

Автомат. и телемех., 1993, выпуск 2, 140–148

https://www.mathnet.ru/at2902

УДК 62-501.72:517.987

© 1993 г. **А.А. ЕЛЬЦОВ, канд. техн. наук,**
А.И. РУБАН, д-р техн. наук

(Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники)

РОБАСТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ НАГРУЖЕННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ, С ПРИМЕНЕНИЕМ ОЦЕНОК ФУНКЦИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

На основе метода последовательной линеаризации построены алгоритмы робастной идентификации, использующие оценки функций чувствительности. Доказана сходимость алгоритмов. Алгоритмы применены для решения задачи идентификации распределенных динамических объектов, описываемых нагруженными дифференциальными уравнениями в частных производных. Приведен численный пример.

1. Введение

Задача параметрической идентификации, заключающаяся в определении параметров моделей объекта и его измерительного устройства по известным входу и выходу объекта, является одной из важных в теории управления. В серии измерений выхода объекта всегда присутствует помеха, которая содержит некоторый малый процент выбросов. Наличие выбросов в измерениях вынуждает при идентификации либо проводить предварительную обработку измерений с целью сглаживания выбросов, либо пользоваться алгоритмами, слабо реагирующими на эти выбросы, т.е. робастными алгоритмами. В [1] (см. приложение к монографии) синтезированы робастные алгоритмы метода последовательной линеаризации с использованием функционалов, построенных на экстремальных функциях с пониженной чувствительностью к большим отклонениям аргумента [2–4].

Большую сложность при реализации построенных алгоритмов вызывает процесс нахождения функций чувствительности. В [5] предложено в градиентных алгоритмах оптимизации использовать вместо функций чувствительности их приближенные значения. В данной работе на основе метода последовательной линеаризации аналогично [1] построены алгоритмы робастной идентификации, использующие вместо функций чувствительности их оценки, и доказана сходимость этих алгоритмов.

Построенные алгоритмы использованы в данной работе для параметрической идентификации объектов, описываемых нагруженными дифференциальными уравнениями в частных производных [6], являющихся естественным обобщением обычных дифференциальных уравнений в частных производных и отличающихся от них тем, что правые части нагруженных уравнений зависят не только от искомого решения, но и от преобразований этого решения.

2. Постановка задачи

Обозначим через $\vec{x}(\vec{t},\vec{\alpha})$, $\vec{t}\in\Omega\subset R^n$, $\vec{\alpha}\subset \mathrm{A}\subset R^m$ выход динамической модели объекта, известный с точностью до вектора неизвестных параметров $\vec{\alpha}$, $\vec{\eta}(\vec{t},\vec{\alpha})=\eta(\vec{x}(\vec{t},\vec{\alpha}),\vec{t},\vec{\alpha})$ – выход статической модели измерительного устройства объекта. В задаче параметрической идентификации требуется по известной серии измерений выходов объекта $\vec{\eta}^*(\vec{\tau})$, $\vec{\tau} \subset D \subseteq \Omega$, полученной при известных (обычно управляемых) входах объекта, подобрать параметры моделей динамического объекта и его измерительного устройства так, чтобы достигался минимум функционала

$$J(\alpha) = J(\vec{\eta}^*(\vec{\tau}), \vec{\eta}(\vec{\tau}, \vec{\alpha}), \vec{\alpha}).$$

Так как измерения всегда производятся с помехой, то $\vec{\eta}^*(\vec{\tau})$ можно представить в виде

(1) $$\vec{\eta}^*(\vec{\tau}) = \vec{\bar{\eta}}(\vec{\tau}) + \vec{\nu}(\vec{\tau}), \qquad \vec{\tau} \in D,$$

где $\vec{\bar{\eta}}(\vec{\tau})$ – истинное значение выхода измерительного устройства объекта, $\vec{\nu}(\vec{\tau})$ – помеха, включающая выбросы измерений, всегда присутствующие в $\vec{\eta}^*(\vec{\tau})$. Наличие выбросов вызывает необходимость при решении задачи идентификации параметров пользоваться функционалами, слабо реагирующими на выбросы измерений. Эти функционалы можно взять в форме

(2) $$J(\vec{\alpha}) = \sum_{\vec{\tau} \in D} \varphi(\vec{\eta}(\vec{\tau}, \vec{\alpha}) - \vec{\eta}^*(\vec{\tau}))p(\vec{\tau}),$$

где $p(\vec{\tau})$ – весовой коэффициент, $\varphi(\cdot)$ – экстремальная функция, обладающая пониженной чувствительностью к большим отклонениям аргумента. Примеры таких функций и соответствующих им функционалов (2) содержатся в [1–4]. Основные из них являются недифференцируемыми в ряде точек, имеют нулевые или отрицательные вторые производные. Эти свойства либо существенно ограничивают область сходимости алгоритмов идентификации, либо делают их неприменимыми. Для устранения этого недостатка в [1] предложено использовать квадратичную аппроксимацию функционала (2)

$$J(\vec{\alpha}^l + \Delta\vec{\alpha}^{l+1}) = J(\vec{\alpha}^l) + (\nabla_\alpha J(\vec{\alpha}^l))^T \Delta\vec{\alpha}^{l+1} + 0,5(\Delta\vec{\alpha}^{l+1})^T B^l \Delta\vec{\alpha}^{l+1}$$

с матрицей B^l, выбираемой в виде

(3) $$B^l = \sum_{\vec{\tau} \in D} p(\tau) K(|\eta(\vec{\tau}, \vec{\alpha}) - \eta^*(\vec{\tau})|) \nabla_{\vec{\alpha}} \eta(\vec{\tau}, \vec{\alpha}) (\nabla_\alpha \eta(\vec{\tau}, \vec{\alpha}))^T,$$

где $K(|\eta(\vec{t}, \vec{\alpha}) - \eta^*(\vec{t})|)$ – неотрицательная функция, связанная с конкретным видом функционала (2), $\nabla_{\vec{\alpha}} \eta(\vec{t}, \vec{\alpha}) = (d\eta(\vec{t}, \vec{\alpha}) / d\vec{\alpha})^T = (\partial\eta / \partial\vec{x} \cdot W + \partial\eta / \partial\vec{\alpha})^T$ – градиент от $\eta(t, \vec{\alpha})$ по $\vec{\alpha}$, $W = d\vec{x} / d\vec{\alpha}$ – матрица функций чувствительности. Вид матрицы B^l, функций K и $\nabla_{\vec{\alpha}} J = (dJ / d\vec{\alpha})^T$ для некоторых функционалов, используемых в робастной идентификации, приведен в [1].

Реализация градиентных алгоритмов идентификации, в частности метода последовательной линеаризации, требует вычисления функций чувствительности, которые можно находить, или составляя и решая уравнения чувствительности, или, приближенно, обработкой варьированных выходов модели, например по симметричным или односторонним конечно-разностным формулам, с помощью ортогональных планов первого порядка и т.д.

Для сложных динамических систем задача построения уравнений чувствительности является достаточно трудной. Для многих классов динамических систем, например для разрывных распределенных динамических объектов, уравнения чувствительности еще не построены. При большом количестве параметров нахождение функций чувствительности из уравнений чувствительности приводит к построению большого числа этих уравнений, что при реализации градиентных методов идентификации на ЭВМ вызывает необходимость составления большого числа подпрограмм, требует дополнительных затрат на программирование, увеличения используемой памяти ЭВМ, затрудняет составление универсальных программ идентификации.

Объем вычислений при нахождении функций чувствительности из уравнений чувствительности и обработкой варьированных выходов модели объекта может быть сделан примерно одинаковым за счет выбора схемы обработки выходов модели. Поэтому представляют интерес построения градиентных алгоритмов идентификации, в которых функции чувствительности $W(\vec{t},\vec{\alpha})$ заменены их оценками $V(\vec{t},\vec{\alpha},h) = (V_1,V_2,\ldots,V_m) = W(\vec{t},\vec{\alpha}) + hW_1(\vec{t},\vec{\alpha},h)$, где $W_1(\vec{t},\vec{\alpha},h)$, h – соответственно ограниченная матрица и константа, связанные с точностью аппроксимации.

Подстановка в алгоритм метода последовательной линеаризации вместо функций чувствительности $W(\vec{t},\vec{\alpha})$ их оценок $V(\vec{t},\vec{\alpha},h)$ приводит к изменению алгоритма и требует доказательства сходимости вновь полученного алгоритма.

В связи с автоматизацией распределенных в пространстве объектов повысился интерес к решению различных задач для систем с распределенными параметрами, в том числе и задачи идентификации при неполной наблюдаемости переменных объекта. Широкий класс распределенных объектов описывается системой нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\vec{F}\left(\vec{t},\ \frac{\partial\vec{x}}{\partial t_1},\ \frac{\partial\vec{x}}{\partial t_2},\ldots,\ \frac{\partial\vec{x}}{\partial t_n},\ \vec{\alpha}\right) = f(\vec{t},\vec{x},P\vec{x},\vec{\alpha}) \tag{4}$$

с соответствующими краевыми условиями

$$\vec{\varphi}(\vec{t},\vec{x},Q\vec{x},\vec{\alpha})\big|_{t\in\delta\Omega} = 0, \tag{5}$$

где $\vec{F},\vec{f},\vec{\varphi}$ – вектор-функции своих аргументов, $\delta\Omega$ – граница области Ω, P – оператор, определенный на множестве $C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ непрерывно дифференцируемых в Ω и непрерывных в его замыкании $\overline{\Omega}=\Omega\cup\delta\Omega$ функций, Q – оператор, определенный на множестве $C(\delta\Omega)$ непрерывных на $\delta\Omega$ функций. Областью значений операторов P и Q будем считать множества функций, заданных на подмножествах множеств Ω и $\delta\Omega$ соответственно. Оператором P определяется нагруженность уравнения (4), а нагруженность краевых условий (5) определяется оператором Q. Нагруженные уравнения включают в себя обычные дифференциальные уравнения в частных производных, интегро-дифференциальные уравнения в частных производных и т.д. Вопросы чувствительности нагруженных уравнений рассмотрены в [7, 8] и др., что делает корректным применение алгоритмов идентификации с приближенным вычислением функций чувствительности к моделям (4), (5).

3. Алгоритм идентификации

Вариант алгоритма метода последовательной линеаризации, полученный заменой матрицы функций чувствительности $W(\vec{t},\vec{\alpha})$ ее оценкой $V(\vec{t},\vec{\alpha},h)$ имеет следующий вид.

Выберем значение h и начальное приближение параметров $\vec{\alpha}^0$. Следующее приближение $\vec{\alpha}^{l+1}$, $l=0,1,\ldots$ находим по формуле

$$\vec{\alpha}^{l+1} = \vec{\alpha}^l + \gamma^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}, \tag{6}$$

где γ^l выбирается из условия

(7) $$J(\vec{\alpha}^{l+1}) \leqslant J(\vec{\alpha}^l) - \gamma^l \varepsilon (\Delta\vec{\alpha}^{l+1})^T B_1^l \Delta\vec{\alpha}^{l+1}$$

($0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ – заранее выбранное число), например, делением единицы пополам ($\gamma^l = 2^{-i_0}$, i_0 – минимальное целое при котором выполняется неравенство (7)), а $\Delta\vec{\alpha}^{l+1}$ является решением задачи квадратичного программирования

(8) $$(G(\vec{\alpha}^l, h))^T \Delta\vec{\alpha}^{l+1} + 0{,}5(\Delta\vec{\alpha}^{l+1})^T B_1^l \Delta\vec{\alpha}^{l+1} = \min_{\Delta\vec{\alpha}^{l+1}}.$$

В неравенстве (7) и задаче (8) матрица B_1^l для функционалов вида (2) получается из матрицы B^l, определяемой выражением (3), подстановкой в $\nabla_\alpha \vec{\eta}(\vec{t},\vec{\alpha}) = (\partial\vec{\eta}/\partial\vec{x}\cdot W + \partial\vec{\eta}/\partial\vec{\alpha})^T$ вместо $W(t,\vec{\alpha}^l)$ оценок $V(\vec{t},\vec{\alpha}^l,h)$, и $G(\vec{\alpha}^l,h)$ есть оценка $\nabla_{\vec{\alpha}} J$, получаемая аналогично B_1^l.

Применение для идентификации параметров алгоритма (6)–(8) при фиксированном h приводит к попаданию в окрестность экстремума, зависящую от h. Для попадания в точку экстремума необходимо устремить h к нулю, например, по следующему алгоритму: проверяем выполнение неравенства

$$h \leqslant \min(1, ((\Delta\vec{\alpha}^{l+1})^T B_1^l \Delta\vec{\alpha}^{l+1})^{1/2}),$$

если оно выполнено, то переходим к проверке неравенства (7), в противном случае полагаем

$$h = \min(h/2, ((\Delta\vec{\alpha}^{l+1})^T B_1^l \Delta\vec{\alpha}^{l+1})^{1/2})$$

переходим к решению задачи (8).

Доказательство сходимости полученного алгоритма аналогично доказательству сходимости в [1] в силу положительной определенности матрицы B_1^l при малых h и приведено в приложении.

4. Пример

Имитируем поведение объекта уравнением

(9) $$b^{-2}\partial^2 x(t_1,t_2)/\partial t_2^2 - \partial^2 x(t_1,t_2)/\partial t_1^2 = $$
$$= x(t_1,t_2) - 6\int_0^1 x(t_1,t_2)dt_1 + 6a\sin 1$$

с краевыми условиями

$$x(0,t_2) = a\cos(-1), \quad x(1,t_2) = \exp(-bt_2) + a,$$

(10) $$x(t_1,0) = t_1^2 + a\cos(t_1 - 1), \qquad \partial x(t_1,0)/\partial t_2 = -bt_1^2.$$

Наблюдаемые значения выхода объекта возьмем в виде

$$\eta_{ij}^* = x^*(t_{1i},t_{2j}) + d_{ij}x^*(t_{1i},t_{2j}),$$
$$t_{1i} = 0{,}1i, \qquad t_{2j} = 0{,}1j, \qquad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant 10,$$

т.е. в виде (2) с $\eta_{ij} = x^*(t_{1i},t_{2j})$, $\nu = d_{ij}x^*(t_{1i},t_{2j})$, где $x^*(t_{1i},t_{2j})$ – решение краевой задачи (9), (10) при $a = 3$, $b = 0$; d_{ij} – значения случайной величины, принимающей два значения d и 0 с вероятностями p и $1-p$ соответственно, т.е. $p100$ – это процент выбросов в измерениях. Расчеты проводились в $d=1$ и $d=4$ при различных вероятностях появления выбросов.

Модель объекта имеет вид краевой задачи (9), (10), в которой вместо a и b стоят неизвестные параметры α и β. Выходы модели в критерий входят в тех же точках, что и выходы объекта.

Подстройка параметров проводилась по методу последовательной линеаризации с точным и приближенным вычислением функций чувствительности. При этом использовались следующие критерии качества:

1) квадратичный

$$J_1(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} e_{ij}^2,$$

2) модульный

$$J_2(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} \left|e_{ij}\right|,$$

3) квадратично-модульный

$$J_3(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} z_{ij}^1,$$

4) экспоненциальный

$$J_4(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} z_{ij}^2,$$

где

$$e_{ij} = x(t_{1i}, t_{2j}) - \eta_{ij}^*,$$

$$z_{ij}^1 = \begin{cases} e_{ij}^2, & \text{если } \left|e_{ij}\right| \leqslant \delta, \\ 2\delta e_{ij}, & \text{если } \left|e_{ij}\right| > \delta, \end{cases}$$

$$z_{ij}^2 = \begin{cases} 1-\exp(-e_{ij}^2), & \text{если } \left|e_{ij}\right| \leqslant \delta, \\ 1, & \text{если } \left|e_{ij}\right| > \delta, \end{cases}$$

δ – некоторое число, выбираемое исследователем.

В таблице приведены результаты расчетов для одной реализации при 5% уровне выбросов ($p=0{,}05$) и $d=1$ с приближенным вычислением функций чувствительности. В таблице Кр – номер критерия качества в порядке, приведенном выше. В первой строке дано начальное приближение параметров α^0, β^0. Далее, для каждого критерия качества приведены: в первой строке – предельное значение параметров модели, во второй – модуль относительной ошибки расчета параметров в процентах, в третьей – количество итераций, за которое достигается требуемая точность идентификации.

Аналогичные результаты получаются при использовании алгоритмов с точным вычислением функций чувствительности.

Как видно из таблицы, при наличии выбросов измерений наименьшую ошибку дают алгоритмы идентификации с применением модульного, квадратично-модульного и экспоненциального критериев качества. При этом наименьшую скорость сходимости имеют алгоритмы с использованием модульного критерия. Картина не меняется при

Кр	Значения параметров					
	α	β	α	β	α	β
	1,00000	1,00000	2,00000	2,00000	4,00000	4,00000
1	3,18950 6,31667	2,35238 21,58733	3,18918 6,30600	2,33947 22,01766	3,18909 6,30300	2,33541 22,15300
	9		4		6	
2	2,99999 0,00033	2,99925 0,02500	3,00000 0,00000	3,00002 0,00067	3,00000 0,00000	3,00009 0,00300
	10		8		9	
3	3,00824 0,27467	2,97422 0,85933	3,00824 0,27467	2,97424 0,85866	3,00827 0,27533	2,97329 0,89033
	7		6		5	
4	3,00240 0,08000	3,05559 1,85300	3,00240 0,08000	3,05561 1,85367	3,00249 0,08300	3,04221 1,40700
	11		6		7	

увеличении процента выбросов, а также при наложении на выход объекта дополнительно к выбросам аддитивной помехи различной интенсивности, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием.

5. Заключение

На основе метода последовательной линеаризации с помощью функционалов, слабо реагирующих на выбросы измерений, разработаны новые алгоритмы робастной идентификации, использующие приближенные значения функций чувствительности. Доказана сходимость построенных алгоритмов, подтвержденная иллюстративным примером. Показана принципиальная возможность применения синтезированных алгоритмов для идентификации параметров нагруженных распределенных динамических моделей.

Полученные алгоритмы могут быть использованы при создании пакетов прикладных программ адаптивной и ретроспективной робастной идентификации параметров линейных и нелинейных моделей. Алгоритмы не требуют составления и решения уравнений чувствительности и поэтому более универсальны по отношению к алгоритмам с точным вычислением функций чувствительности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство сходимости алгоритма. Приводимое ниже доказательство сходимости построенного алгоритма близко к доказательству варианта метода линеаризации с приближенным вычислением производных, предложенного в [9] для решения общей задачи математического программирования.

Предварительно сделаем некоторые построения. Пусть вместо функций чувствительности $W(\vec{t},\vec{\alpha})$ находятся их оценки $V(\vec{t},\vec{\alpha},h)$. При этом имеет место соотношение

(11) $$V(\vec{t},\vec{\alpha},h) = W(\vec{t},\vec{\alpha}) + hW_1(\vec{t},\vec{\alpha},h),$$

где $W_1(\vec{t},\vec{\alpha},h)$, h – соответственно ограниченная матрица и константа, связанные с точностью аппроксимации. Соотношение (11) выполнено всякий раз, когда функции чувствительности удовлетворяют условию Липшица, а оценки $V(\vec{t},\vec{\alpha},h)$ получены по конечноразностным формулам с шагом h. Подставив (11) в $\nabla_{\vec{\alpha}}J$, получим

$$(\nabla_{\vec{\alpha}}J)^T = \frac{dJ}{d\vec{\alpha}} = \frac{\partial J}{\partial\vec{\eta}}\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}W + \frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{\alpha}}\right) + \frac{\partial J}{\partial\vec{\alpha}} =$$

$$= \frac{\partial J}{\partial\vec{\eta}}\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}(V - hW_1) + \frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{\alpha}}\right) + \frac{\partial J}{\partial\vec{\alpha}} =$$

$$= \frac{\partial J}{\partial\vec{\eta}}\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}V + \frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{\alpha}}\right) + \frac{\partial J}{\partial\vec{\alpha}} - h\frac{\partial J}{\partial\vec{\eta}}\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}W_1 =$$

$$= (G(\vec{t},\vec{\alpha},h))^T = h\frac{\partial J}{\partial\vec{\eta}}\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}W_1.$$

Таким образом, $\nabla_{\vec{\alpha}}J$ и ее оценка $G(\vec{t},\vec{\alpha},h)$ связаны соотношением

(12) $$G(\vec{t},\vec{\alpha},h) = \nabla_{\vec{\alpha}}J + hJ_1$$

и при ограниченных $\partial J/\partial\vec{\eta}$, $\partial\vec{\eta}/\partial\vec{x}$, W_1 выполнено неравенство

(13) $$\|J_1\| = \|\partial J/\partial\vec{\eta}\cdot\partial\vec{\eta}/\partial\vec{x}\cdot W_1\| \leqslant K_2,$$

где K_2 – некоторая константа. Заметим, что соотношению (12) с ограниченным J_1 удовлетворяет любая оценка $\nabla_{\vec{\alpha}}J$, полученная заменой конечно-разностными аналогами каких-либо производных, входящих в $\nabla_{\vec{\alpha}}J$: $\partial J/\partial\vec{x}$, $\partial\vec{\eta}/\partial\vec{x}$, W, $\partial\vec{\eta}/\partial\vec{\alpha}$, $\partial J/\partial\vec{\alpha}$ и удовлетворяющих условию Липшица.

Подставив теперь (11) в (3), получим

$$B^l = \sum_{\vec{t}\in D} p(\vec{t})K\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}(V - hW_1) + \frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{\alpha}}\right)^T\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}(V - hW_1) + \frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{\alpha}}\right) =$$

$$= \sum_{\vec{t}\in D} p(\vec{t})K\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}V + \frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{\alpha}}\right)^T\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}V + \frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{\alpha}}\right) -$$

$$- h\sum_{\vec{t}\in D} p(\vec{t})K\left[\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}W_1\right)^T\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}V + \frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{\alpha}}\right) + \left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}V + \frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{\alpha}}\right)^T\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}W_1\right] +$$

$$+ h^2\sum_{\vec{t}\in D} p(\vec{t})K\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}W_1\right)^T\left(\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\vec{x}}W\right) = B_1^l - hB_0$$

или, переписывая крайние члены, имеем

(14) $$B^l = B_1^l - hB_0.$$

Матрица B_0 в выражении (14) будет ограниченной, если ограничены $\partial\vec{\eta}/\partial\vec{x}$, $\partial\vec{\eta}/\partial\vec{\alpha}$, W_1. В этом случае имеет место оценка

(15) $$\|B_0\| \leqslant K_1,$$

где K_1 – некоторая константа.

В силу положительной определенности матрицы B^l существуют константы m, M, такие, что для матрицы B^l выполнены неравенства

$$m\left\|\Delta\vec{\alpha}^{l+1}\right\|^2 \leqslant (\Delta\vec{\alpha}^{l+1}, B^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}) \leqslant M\left\|\Delta\vec{\alpha}^{l+1}\right\|^2,$$

откуда с учетом (14), (15) для матрицы B_1^l получаем

$$(m-hK_1)\left\|\Delta\vec{\alpha}^{l+1}\right\|^2 \leqslant (\Delta\vec{\alpha}^{l+1}, B_1^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}) \leqslant (M+hK_1)\left\|\Delta\vec{\alpha}^{l+1}\right\|^2, \tag{16}$$

что доказывает положительную определенность матрицы B_1^l при $h < m / K_1$.

Предположим далее, что $\nabla_{\vec{\alpha}} J$ удовлетворяет вблизи точки $\vec{\alpha}^l$ условию Липшица

$$\left\|\nabla_{\vec{\alpha}} J(\vec{\alpha}_1) - \nabla_{\vec{\alpha}} J(\vec{\alpha}_2)\right\| \leqslant L\left\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\right\|. \tag{17}$$

Найдем теперь приращение функционала качества J при переходе из точки $\vec{\alpha}^l$ в точку $\vec{\alpha}^{l+1} = \vec{\alpha}^l + \gamma^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}$. Имеем

$$J(\vec{\alpha}^{l+1}) = J(\vec{\alpha}^l + \gamma^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}) =$$
$$= J(\vec{\alpha}^l) + \gamma^l(\nabla_{\vec{\alpha}} J(\vec{\alpha}^l), \Delta\vec{\alpha}^{l+1}) + \gamma^l(\nabla_{\vec{\alpha}} J(\mu) - \nabla_{\vec{\alpha}} J(\vec{\alpha}^l), \Delta\vec{\alpha}^{l+1}),$$

где μ – некоторая точка отрезка $[\vec{\alpha}^l, \vec{\alpha}^l + \gamma^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}]$.

Учитывая (12), (13), (17), последнее равенство можем переписать в виде

$$J(\vec{\alpha}^l + \gamma^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}) \leqslant J(\vec{\alpha}^l) + \gamma^l(G(\vec{t}, \vec{\alpha}^l, h), \Delta\vec{\alpha}^{l+1}) + \tag{18}$$
$$+ (\gamma^l)^2 L\nu\left\|\Delta\vec{\alpha}^{l+1}\right\|^2 + \gamma^l hK_2\left\|\Delta\vec{\alpha}^{l+1}\right\|,$$

где $0 < \nu < 1$ такое, что $\mu = \vec{\alpha}^l + \gamma^l\nu\Delta\vec{\alpha}^{l+1}$.

Так как решение задачи квадратичного программирования (8) совпадает с решением системы уравнений

$$G(\vec{t}, \vec{\alpha}^l, h) = -B_1^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}, \tag{19}$$

то, подставляя $G(\vec{t}, \vec{\alpha}^l, h)$ из (19) в (18) и учитывая (16), получаем

$$J(\vec{\alpha}^l + \gamma^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}) \leqslant J(\vec{\alpha}^l) - \gamma^l(\Delta\vec{\alpha}^{l+1}, B_1^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}) \times \tag{20}$$
$$\times\left(1 - \gamma^l\frac{L\nu}{m-hK_1} - \frac{hK_2}{\sqrt{m-hK_1}\sqrt{(\Delta\vec{\alpha}^{l+1}, B_1\Delta\vec{\alpha}^{l+1})}}\right).$$

В неравенствах (18) и (20) L – константа Липшица из (17). Взяв h удовлетворяющим условию

$$h \leqslant \min(1, (\Delta\vec{\alpha}^{l+1}, B_1^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1})^{1/2})$$

и выбрав γ^l из условия

$$0 < \gamma^l < \frac{(m-K_2)(1-\varepsilon) - K_1\sqrt{m-K_2}}{L\nu},$$

где $0 < \varepsilon < 1$, неравенство (20) можем записать в виде

$$J(\vec{\alpha}^l + \gamma^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}) \leqslant J(\vec{\alpha}^l) - \gamma^l\varepsilon(\Delta\vec{\alpha}^{l+1}, B_1^l\Delta\vec{\alpha}^{l+1}),$$

что и доказывает сходимость алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рубан А.И.* Адаптивное управление с идентификацией. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983.
2. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // АиТ. 1980. № 10. С. 91–97.
3. *Цыпкин Я.З.* Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1985.
4. *Петрович М.Л., Шлег Г.К.* Робастная регрессия: оценки и сравнение методов Монте-Карло (обобщающая статья) // Заводская лаборатория. 1987. Т. 53. № 4. С. 41–48.
5. *Катковник В.Я.* О чувствительности градиентных схем // АиТ. 1970. № 12. С. 87–94.
6. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1.С. 86–94.
7. *Бородин А.В.* Решение нелинейных зависящих от параметра краевых задач для систем уравнений в частных производных второго порядка // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 17. № 2. С 270–277.
8. *Ельцов А.А., Рубан А.И.* Чувствительность нагруженных распределенных динамических систем. М., 1990. – Деп. в ВИНИТИ 05.12.90, № 6101-В90.
9. *Пшеничный Б.Н., Немченко К.И.* Метод линеаризации без аналитического вычисления производных // Кибернетика. 1983. № 2. С. 48–52.

Поступила в редакцию 19.03.92

УДК 62-506.1

© 1993 г. А.А. КРАСОВСКИЙ, академик РАН

(ВВИА им. Н.Е. Жуковского, Москва)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С АДАПТАЦИЕЙ ВРЕМЕНИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Рассматривается новый класс адаптивных регуляторов, оптимальных в смысле функционала обобщенной работы, с автоматическим изменением скользящего интервала T прогнозирования (экстраполяции) свободного движения объекта управления. В основе двух вариантов алгоритма: с прогнозированием посредством модели свободного движения в ускоренном времени и посредством собственно экстраполяции сигнала рассогласования лежит текущий поиск оптимального значения T. Аналитическим путем показываются широкие границы применимости, высокая устойчивость рассматриваемых процессов адаптации, простота программного обеспечения регуляторов данного класса.

1. Введение

Проблемы адаптации и робастности в оптимальных системах управления привлекают внимание многих исследователей. Это связано с потребностями в снижении необходимого объема априорной информации об объектах управления и окружающей среде, стремлением к универсальности и унификации управляющих систем, сокращению затрат на наладку и другими важными факторами.

К числу довольно общих подходов в создании оптимальных (субоптимальных) адаптивных систем относится сочетание в реальном времени процессов управления и параметрической идентификации [1–4]. Однако многопараметрическая идентификация сложных технологических процессов в режиме реального времени сопряжена с серьезными трудностями [5].

Другое направление связано с настройкой в процессе функционирования системы весовых коэффициентов целевого функционала оптимизации. Здесь трудности прежде всего связаны с критериями настройки, которые в принципе должны реализовываться