В. П. Ильин, Некоторые неравенства между нормами частных производных функций многих переменных, *Докл. АН СССР*, 1963, том 152, номер 2, 262–265

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 152, № 2

МАТЕМАТИКА

В. П. ИЛЬИН

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НОРМАМИ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 III 1963)

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция, заданная в области Ω n-мерного эвклидова пространства E^n точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, имеющая непрерывные производные любого порядка. Пусть заданы $n+1$ целых неотрицательных векторов $\mathbf{r}_i = (l_1^i, \ldots, l_n^i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ $(l_j^i \geqslant 0$ целые). Ставится задача нахождения целых неотрицательных векторов $\vec{\rho} = (v_1, \ldots, v_n)$ и чисел $q \geqslant p \geqslant 1$, для которых справедливо неравенство

$$\|D^{\vec{\rho}} f\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C \sum_{i=0}^{n} \|D^{\mathbf{r}_i} f\|_{L_p(\Omega)}, \tag{1}$$

где C — константа, не зависящая от f,

$$D^{\mathbf{r}} f = \frac{\partial^{l_1}}{\partial x_1^{l_1}} \cdots \frac{\partial^{l_n} f}{\partial x_n^{l_n}} \qquad (\mathbf{r} = (l_1, \ldots, l_n)).$$

Результаты настоящей заметки являются развитием результатов заметки ([1]) в этом вопросе. Некоторые из приводимых ниже неравенств можно рассматривать как обобщение в определенном направлении известных неравенств С. Л. Соболева ([2]) и С. М. Никольского ([3]); приводятся также некоторые новые неравенства.

I. Будем говорить, что область D пространства E^n принадлежит классу $C(\mathcal{H}^k)$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, если для каждой точки $\mathbf{x} \in D$ существует k-мерный куб с вершиной в $\mathbf{x}$ и с ребрами длины $\mathcal{H}$, параллельными координатным осям $x_{n-k+1}, \ldots, x_n$, содержащийся в Ω. Будем далее говорить, что S^m — m-мерная поверхность пространства E^n — является поверхностью класса $C^{(1)}$, если она задается уравнениями $x_1 = x_1, \ldots, x_m = x_m$, $x_{m+1} = \varphi_{m+1}(x_1, \ldots, x_m), \ldots, x_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)$, где функции $\varphi_i(x_1, \ldots, x_m)$ определены в некоторой области Ω^m пространства E^m точек $\mathbf{x}^m = (x_1, \ldots, x_m)$ и имеют непрерывные ограниченные частные производные первого порядка в Ω^m.

II. Пусть заданы натуральные числа $s \leqslant n$ и n_i $(i = 1, \ldots, s)$, для которых $n_1 + \ldots + n_s = n$.

Рассмотрим следующую таблицу чисел, состоящую из $s+1$ строк (закон образования чисел ясен из таблицы):

i	
0	1
1	$1, n_1$
2	$1, n_1, n_2, n_1 n_2$
3	$1, n_1, n_2, n_3, n_1 n_2, n_1 n_3, n_2 n_3, n_1 n_2 n_3$
.	. . . .
.	. . . .
s	$1, n_1, n_2, \ldots, n_s, n_1 n_2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_s$

(2)

Через α_i обозначим произвольное число, взятое из i-й строки; α_i равно либо 1 (первое число строки), либо есть число вида $\alpha_i = n_{i_1} \dots n_{ik_i}$, где k_i обозначает число множителей в α_i, а индексы $i_1, \dots, i_{k_i}$ обозначают, какие именно сомножители входят в α_i ($i_1, \dots, i_{k_i}$ — некоторые натуральные числа, не превосходящие i). Числу α_i приведем в соответствие α_i векторов, для которых введем обозначения: $\mathbf{r}_{i;0}$, если α_i равно первому числу i-й строки ($\alpha_i = 1$); $\mathbf{r}_{i;j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}}$ ($j_{i_t} = 1, \dots, n_{i_t}$; $t = 1, \dots, k_i$), если $\alpha_i = n_{i_1} \dots n_{i_{k_i}}$.

Координаты произвольного вектора $\mathbf{r}$ будем обозначать через $\mathbf{r}_{\lambda,\mu}$ ($\lambda = 1, \dots, s$; $\mu = 1, \dots, n_\lambda$), т. е. $\mathbf{r} = (l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}; \dots; l_{s,1}, \dots \dots, l_{s,n_s})$, в частности, координаты $\mathbf{r}_{i;j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}}$ — через $l_{\lambda,\mu}^{i;j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}}$.

Теперь мы приведем теорему несколько более общую, из которой, в частности, будут вытекать достаточные условия справедливости неравенства (1) при $q = p$.

Теорема 1. *Пусть заданы натуральные числа* $s \leqslant n$ *и* n_i ($i=1,\dots \dots, s$), *для которых* $n_1 + \dots + n_s = n$, *и соответствующая им таблица* (2), *а также числа* α_i ($i = 0, 1, \dots, s$), $\sum_{i=0}^{s} \alpha_i = N$. *Пусть, далее, заданы* N *целых неотрицательных векторов* $\mathbf{r}_{i;j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}}$ (*или* $\mathbf{r}_{i;0}$), *соответствующих числам* α_i, *и целый неотрицательный вектор* $\vec{\rho} = (\nu_{1,1}, \dots, \nu_{s,n_s})$, *координаты которых удовлетворяют условиям*:

1. $\mathbf{r}_{i;0}$: $l_{\lambda,\mu}^{i;0} = v_{\lambda,\mu}$ ($\lambda = 1, \dots, i, i+2, \dots, s$; $\mu = 1, \dots, n_\lambda$),

$$l_{i+1,\mu}^{i;0} \leqslant v_{i+1,\mu} \quad (\mu = 1, \dots, n_{i+1});$$

$\bar{\mathbf{r}}_{i,j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}}$: $l_{\lambda,\mu}^{i;j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}} = v_{\lambda,\mu}$ *при* $\lambda = 1, \dots, s$, *но* $\lambda \neq i_1, \dots, \lambda \neq i_{k_i}$,

$$\lambda \neq i+1, \mu = 1, \dots, n_\lambda;$$

$$l_{i_t,j_{i_t}}^{i;j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}} > v_{i_t,j_{i_t}} \quad (t = 1, \dots, k_i);$$

$$l_{i_t,\mu}^{i;j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}} \leqslant v_{i_t,\mu} \quad (\mu = 1, \dots, n_{i_t}, \mu \neq j_{i_t}; t = 1, \dots, k_i);$$

$$l_{i+1,\mu}^{i;j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}} \leqslant v_{i+1,\mu} \quad (\mu = 1, \dots, n_{i+1}).$$

2. *Для всех* $\lambda = i_1, \dots, i_{k_i}$ ($i = 1, \dots, s$) *и* $\mu = 1, \dots, n_\lambda$ *существуют числа* $\varkappa_{\lambda,\mu} > 0$ *такие, что*

$$\sum_{\mu=1}^{n_{i_t}} v_{i_t,\mu} \varkappa_{i_t,\mu} < \sum_{\mu=1}^{n_{i_t}} l_{i_t,\mu}^{i;j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}} \varkappa_{i_t,\mu} \quad (t = 1, \dots, k_i)$$

для всех векторов $\mathbf{r}_{i;j_{i_1},\dots,j_{i_{k_i}}}$ ($j_{i_t} = 1, \dots, n_{i_t}$, $t = 1, \dots, k_i$, $i = 1, \dots, s$).

Предположим, что $D^{\mathbf{r}_i} f \in L_p(\Omega)$ ($i = 1, \dots, N$) ($p \geqslant 1$), *где* $\mathbf{r}_i$ — *заново перенумерованные заданные* N *векторов*, $\Omega \in C(\mathscr{H}^n)$.

Тогда справедливо неравенство:

$$\| D^{\vec{\rho}} f \|_{L_p(\Omega)} \leqslant C \sum_{i=1}^{N} \| D^{\mathbf{r}_i} f \|_{L_p(\Omega)}, \tag{3}$$

где C — *константа, не зависящая от* f.

Из неравенства (3) вытекает неравенство (1) в том случае, когда $N = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i \leqslant n + 1$. В частности, при $n_1 = \ldots = n_{s-1} = 1$, $n_s = n + 1 - s$ $\sum_{i=0}^{s} \alpha_i$ не будет превосходить $n + 1$ при любом выборе α_i. Этому случаю отвечает следующая более простая теорема.

Теорема 1'. *Пусть заданы натуральное число $s \leqslant n$ и целые неотрицательные векторы r_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и $\vec{\rho} = (v_1, \ldots, v_n)$, координаты которых удовлетворяют условиям:*

1. r_i $(i = 0, 1, \ldots, s-2)$: $l_j^i \geqslant v_j$ $(j = 1, \ldots, i)$, $l_{i+1}^i \leqslant v_{i+1}$, $l_j^i = v_j$ $(j = i+2, \ldots, n)$;

$$\mathrm{r}_{s-1}\colon\ l_j^i \geqslant v_j\ (j = 1, \ldots, s-1),\ l_j^i \leqslant v_j\ (j = s, \ldots, n); \tag{A}$$

r_i $(i = s, \ldots, n)$: *для каждого фиксированного* $j = 1, \ldots, s-1$ *или* $l_j^i > v_j$ $(i = s, \ldots, n)$ *или* $l_j^i = v_j$ $(i = s, \ldots, n)$ *и либо* а) $l_i^i > v_i$ $(i = s, \ldots, n)$, $l_j^i \leqslant v_i$ $(j = s, \ldots, n;\ j \neq i;\ i = s, \ldots, n)$, *либо* б) $l_j^i = v_j$ $(i = s, \ldots, n;\ j = s, \ldots, n)$.

2. *Если векторы* r_i $(i = s, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям* а), *то пусть существуют числа* $\varkappa_i > 0$ $(i = s, \ldots, n)$ *такие, что* $\sum_{j=s}^{n} v_j \varkappa_j < \sum_{j=s}^{n} l_j^i \varkappa_j$ $(i = s, \ldots, n)$.

Пусть, далее, $D^{\mathrm{r}_i} f \in L_p(\Omega)$ $(p \geqslant 1)$, $\Omega \in C(\overline{\mathscr{H}^n})$.
Тогда

$$\| D^{\vec{\rho}} f \|_{L_p(\Omega)} \leqslant C \sum_{i=0}^{n} \| D^{\mathrm{r}_i} f \|_{L_p(\Omega)}, \tag{4}$$

где C — константа, не зависящая от f.

При конкретном выборе параметров в теореме 1' будут получаться различные неравенства. Например, при $s = n$, $l_i > v_i$, $0 \leqslant k_i \leqslant v_i$ $(i=1, \ldots, n)$ получаем неравенство

$$\| D^{v_1+\ldots+v_n} f \|_{L_p(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C \left(\| D^{l_1+\ldots+l_n} f \|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| D^{v_1+\ldots+v_{i-1}+k_i+v_{i+2}+\ldots+v_n} f \|_{L_p(\Omega)} \right).$$

III. Из результатов работы ([1]) вытекает, что неравенство (1) для произвольной области класса $C(\overline{\mathscr{H}^n})$ при $q > p$ возможно лишь тогда, когда координаты векторов r_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и $\vec{\rho}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &l_j^0 \leqslant v_j\ (j = 1, \ldots, n) && \text{при } i = 0, \\ &l_j^i \leqslant v_j\ (j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n),\ l_i^i > v_i && \text{при } i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{Б}$$

получающимся из условий (А) при $s = 1$. При этих условиях имеют место обычные теоремы вложения.

Теорема 2. *Пусть заданы целые неотрицательные векторы* r_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *и* $\vec{\rho}$, *для которых справедливы условия* (Б), *и, кроме того, существуют числа* $\varkappa_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ *такие, что*

$$F_1 = \sum_{j=1}^{n} v_j \varkappa_j < \sum_{j=1}^{n} l_j^i \varkappa_j = F \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Пусть, далее:

1. *Заданы натуральное число m и числа p и q, удовлетворяющие неравенствам:* $1 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $F - F_1 - \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{m}\varkappa_j = \varepsilon_m \geqslant 0$.
2. $D^{\mathrm{r}_i} f \in L_p(\Omega)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $\Omega \in C(\overline{\mathscr{H}^n})$.
3. S^m — *m-мерная поверхность класса $C^{(1)}$, содержащаяся в Ω $(S^n \equiv \Omega)$.*

Тогда при одном из следующих условий: а) $\varepsilon_m > 0$, б) $\varepsilon_m = 0$, $1 < p < q < \infty$, *имеет место неравенство*

$$\| D^{\vec{\rho}} f \|_{L_q(S^m)} \leqslant C_1 h^{-\delta_m} \| D^{\mathrm{r}_0} f \|_{L_p(\Omega)} + C_2 h^{\varepsilon_m} \sum_{i=1}^{n} \| D^{\mathrm{r}_i} f \|_{L_p(\Omega)},$$

где $\delta_m = F - \varepsilon_m - \sum_{j=1}^{n} l_j^0 \varkappa_j$, $0 < h \leqslant \mathscr{H}^{1/\varkappa_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, C_1 *и* C_2 — *константы, не зависящие от f и h.*

Замечание. Если векторы r_i и $\vec{\rho}$ удовлетворяют условиям (Б), но среди коэффициентов $\varkappa_i$, удовлетворяющих (5), имеются и отрицательные, то неравенство (1) возможно лишь при $q = p$ и только в том случае, когда $k + 1$ векторов r_i $(1 \leqslant k < n)$ и вектор $\vec{\rho}$ удовлетворяют условиям 1 — 2 следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть целые неотрицательные векторы* r_i $(i = 0, n - k + 1, \ldots, n)$ *и* $\vec{\rho}$ *удовлетворяют условиям:*

1. $l_j^0 = v_j$ $(j = 1, \ldots, n - k)$, $l_j^0 \leqslant v_j$ $(j = n - k + 1, \ldots, n)$;

$$l_j^i = v_j \ (j = 1, \ldots, n - k), \ l_i^i > v_i,$$

$$l_j^i \leqslant v_j \ (j = n - k + 1, \ldots, n; \ j \neq i) \ \text{при} \ i = n - k + 1, \ldots, n.$$

2. *Существуют числа* $\varkappa_j > 0$ $(j = n - k + 1, \ldots, n)$ *такие, что*

$$F_1 = \sum_{j=n-k+1}^{n} v_j \varkappa_j < \sum_{j=n-k+1}^{n} l_j^i \varkappa_j = F \quad (i = n - k + 1, \ldots, n).$$

Пусть, далее:

3. $m \geqslant n - k$, $p \geqslant 1$, $F - F_1 - \frac{1}{p} \sum_{j=n-m+1}^{n} \varkappa_j > 0$.
4. $D^{\mathrm{r}_i} f \in L_p(\Omega)$ $(i = 0, n - k + 1, \ldots, n)$, $\Omega \in C(\overline{\mathscr{H}^k})$.
5. S^m — *m-мерная поверхность класса $C^{(1)}$, содержащаяся в Ω $(S^n \equiv \Omega)$.*

Тогда

$$\| D^{\vec{\rho}} f \|_{L_p(S^m)} \leqslant C \left(\| D^{\mathrm{r}_0} f \|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=n-k+1}^{n} \| D^{\mathrm{r}_i} f \|_{L_p(\Omega)} \right),$$

где C не зависит от f.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
19 III 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Ильин, ДАН, 150, № 5 (1963). [2] С. Л. Соболев, Матем. сборн., 4 (46), 3, 471 (1938). [3] С. М. Никольский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 38, 244 (1951).