Дж. Э. Аллахвердиев, Р. М. Джабарзаде, О спектре многопараметрической системы и спектральная теорема,
Докл. АН СССР, 1988, том 300, номер 1, 11–13

Доклады Академии наук СССР
1988. Том 300, № 1

УДК 517.984 МАТЕМАТИКА

Дж.Э. АЛЛАХВЕРДИЕВ, Р.М. ДЖАБАРЗАДЕ

О СПЕКТРЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

(Представлено академиком Н.Н. Моисеевым 9 X 1985)

В данной работе рассматривается многопараметрическая система

$$A_i(\lambda)x_i = \left(A_{0i} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_{ki}\right)x_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где A_{ki} – ограниченные нормальные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H_i. При каждом фиксированном i операторы A_{ki} попарно коммутируют. Для такой системы доказываются теорема о разделении спектра и спектральная теорема.

Пусть $H = H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ – тензорное произведение пространств H_i, а $\widetilde{H} = H \otimes H$ – тензорное произведение двух пространств H. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ называют собственным значением системы (1), если на некотором разложимом тензоре $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \neq 0$ выполнено (1).

Рассмотрим операторы δ_i, $i = 0, 1, \ldots, 2n$, определенные с помощью равенства (2), где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ – любые комплексные числа, а именно: на разложимом тензоре $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2n} \in \widetilde{H}$

$$\delta x = \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i \delta_i x = \tag{2}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{2k} & \alpha_{2k+1} & \ldots & \alpha_{2n} \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{A_{01}+A_{01}^*}{2}x_1 & \frac{A_{11}+A_{11}^*}{2}x_1 & \ldots & \frac{A_{k1}^*-A_{k1}}{2i}x_1 & \frac{A_{k+1,1}+A_{k+1,1}^*}{2}x_1 & \ldots & \frac{A_{n1}^*-A_{n1}}{2i}x_1 \\ \frac{A_{02}+A_{02}^*}{2}x_2 & \frac{A_{12}+A_{12}^*}{2}x_2 & \ldots & \frac{A_{k2}^*-A_{k2}}{2i}x_2 & \frac{A_{k+1,2}+A_{k+1,2}^*}{2}x_2 & \ldots & \frac{A_{n2}^*-A_{n2}}{2i}x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{-A_{01}+A_{01}^*}{2i}x_{n+1} & \frac{A_{11}^*-A_{11}}{2i}x_{n+1} & \ldots & \frac{A_{k1}^*+A_{k1}}{2}x_{n+1} & \frac{A_{k+1,1}^*-A_{k+1,1}}{2i}x_{n+1} & \ldots & \frac{A_{n1}+A_{n1}^*}{2}x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{0n}^*-A_{0n}}{2i}x_{2n} & \frac{A_{1n}^*-A_{1n}}{2i}x_{2n} & \ldots & \frac{A_{kn}+A_{kn}^*}{2}x_{2n} & \frac{A_{k+1,n}^*-A_{k+1,n}}{2i}x_{2n} & \ldots & \frac{A_{nn}+A_{nn}^*}{2}x_{2n} \end{vmatrix} \end{array},$$

а на всех других элементах $\widetilde{H}$ операторы δ_i определяются по линейности и непрерывности.

Обозначим через γ_k оператор $\delta_0^{-1}\delta_{2k-1} + i\delta_0^{-1}\delta_{2k}$, $E_k(\lambda)$ – разложение единицы оператора γ_k, $\lambda \in C^n$, $E(\lambda) = E_1(\lambda_1)E_2(\lambda_2) \ldots E_n(\lambda_n)$ – разложение единицы системы (1) в пространстве $\widetilde{H} = H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ с нормой $[f, g] = (\delta_0 f, g)$, где

$$\inf_{\|x\|=1} \det(\delta_0 x, x) > 0. \tag{3}$$

Пусть T_{ki}^+ и S_{ki}^+ – операторы, индуцированные операторами $T_{ki} = (A_{ki} + A_{ki}^*)/2$ и $S_{ki} = (A_{ki} - A_{ki}^*)/2i$ в тензорном произведении $\widetilde{H}$.

Полагаем, что для любого элемента $f \in \widetilde{H}$ существуют элементы $g_1, \ldots, g_n$ из $\widetilde{H}$ такие, что

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&T_{0i}^{+}f + \sum_{k=1}^{n} T_{ki}^{+}g_k - \sum_{k=1}^{n} S_{ki}^{+}g_{n+k} = 0,\\
&S_{0i}^{+}f + \sum_{k=1}^{n} S_{ki}^{+}g_k + \sum_{k=1}^{n} T_{ki}^{+}g_{n+k} = 0.
\end{aligned}
$$

Теорема 1. *Пусть выполнено* (3) *и* (4). *Тогда операторы* $\gamma_k = \delta_0^{-1}\delta_{2k-1} + i\delta_0^{-1}\delta_{2k}$ *удовлетворяют следующим условиям*:

а) *операторы* γ_i *нормальны и попарно коммутируют,*

б) *если* $\lambda \in C^n$ *есть собственное значение системы* (1), $E(\lambda) \neq 0$, *то* $\gamma_k\widetilde{x} = \lambda_k\widetilde{x}$, $\widetilde{x} = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, *и, обратно, если* $\gamma_k\widetilde{x} = \lambda_k\widetilde{x}$, $k = 1, \ldots, n$, *то* $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ *есть собственный вектор системы* (1) *с собственным значением* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Доказательство. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ есть собственное значение системы (1), а $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ – разложимый тензор, ему соответствующий. Тогда имеем

$$A_i(\lambda)x_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Так как операторы $A_i(\lambda)$ нормальны, то из последнего равенства следует, что при каждом i

$$\left(A_{0i} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_{ki}\right) x_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\left(A_{0i}^{*} + \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k A_{ki}^{*}\right) x_i = 0.$$

Очевидно, что

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{A_{0i} + A_{0i}^{*}}{2} + \operatorname{Re}\lambda_1 \frac{A_{1i} + A_{1i}^{*}}{2} + \operatorname{Im}\lambda_1 \frac{A_{1i}^{*} - A_{1i}}{2i} + \ldots\right.\\
&\left.\ldots + \operatorname{Re}\lambda_n \frac{A_{ni} + A_{ni}^{*}}{2} + \operatorname{Im}\lambda_n \frac{A_{n1}^{*} - A_{n1}}{2i}\right) x_i = 0,\\
&\left(\frac{A_{0i} - A_{0i}^{*}}{2i} + \operatorname{Re}\lambda_1 \frac{A_{1i} - A_{1i}^{*}}{2i} + \operatorname{Im}\lambda_1 \frac{A_{1i} + A_{1i}^{*}}{2} + \ldots\right.\\
&\left.\ldots + \operatorname{Re}\lambda_n \frac{A_{ni} - A_{ni}^{*}}{2i} + \operatorname{Im}\lambda_n \frac{A_{ni}^{*} - A_{ni}}{2}\right) x_i = 0.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим систему

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&B_i(\mu)x_i = (T_{0i} + \mu_1 T_{1i} - \mu_2 S_{1i} + \mu_3 T_{2i} - \mu_4 S_{2i} + \ldots\\
&\ldots + \mu_{2n-1} T_{ni} - \mu_{2n} S_{ni})x_i = 0,\\
&B_{i+n}(\mu)x_{i+n} = (S_{0i} + \mu_1 S_{1i} + \mu_2 T_{1i} + \mu_3 S_{2i} + \mu_4 T_{2i} + \ldots\\
&\ldots + \mu_{2n-1} S_{ni} + \mu_{2n} T_{ni})x_{i+n} = 0,
\end{aligned}
$$

где $T_{ki} = (A_{ki} + A_{ki}^{*})/2$, $S_k = (A_{ki} - A_{ki}^{*})/2$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{2n})$. Операторы $B_i(\mu)$ действуют в гильбертовом пространстве H_i.

Система (5) есть система с $2n$ параметрами. Она изучалась многими авторами, в частности, будем ссылаться на работу [1]. Так как все операторы T_{ki} и S_{ki} ограниченные и самосопряженные и выполнены условия (3) и (4) теоремы 1, то нетрудно видеть, что имеет место утверждение теоремы из [1].

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – собственное значение системы (1) с собственным вектором $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, тогда $(\mu_1, \ldots, \mu_{2n}) = (\operatorname{Re}\lambda_1, \operatorname{Im}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_n, \operatorname{Im}\lambda_n)$ является собственным значением (5) с собственным вектором $\tilde{x} = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$.

Для μ и $\tilde{x}$ имеем $\delta_0^{-1}\delta_i\tilde{x} = \mu_i\tilde{x}$, причем при четных $r = 2k$ имеем $\delta_0^{-1}\delta_r\tilde{x} = \operatorname{Im}\lambda_k\tilde{x}$, при нечетных $s = 2k - 1$ имеем $\delta_0^{-1}\delta_s\tilde{x} = \operatorname{Re}\lambda_k\tilde{x}$ и, следовательно,

$$(6) \qquad \gamma_k\tilde{x} = (\delta_0^{-1}\delta_{2k-1} + i\delta_0^{-1}\delta_{2k})\tilde{x} = \lambda_k\tilde{x}$$

и разделяющая система операторов в случае системы (1) есть γ_k.

В силу самосопряженности и попарной перестановочности операторов имеем, что операторы γ_k нормальны и попарно перестановочны.

Пусть теперь, обратно, $\tilde{x} = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ есть собственный вектор γ_k, $k = 1, \ldots, n$. Тогда самосопряженные операторы $\delta_0^{-1}\delta_{2k-1}$, $\delta_0^{-1}\delta_{2k}$ имеют совместные решения $\tilde{x} = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ с собственными значениями $\operatorname{Re}\lambda_k$ и $\operatorname{Im}\lambda_k$ соответственно.

$\tilde{x}$ есть собственный вектор системы (5), $(\operatorname{Re}\lambda_1, \operatorname{Im}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_n, \operatorname{Im}\lambda_n)$ – соответствующее ему собственное значение (5), тогда, как нетрудно видеть, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – собственное значение (1), а $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ – соответствующий собственный вектор.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* (1). *Тогда для любого элемента $f \in H$ имеет место разложение*

$$f = \int_\sigma E(d\lambda) f.$$

Институт кибернетики
и Институт математики и механики
Академии наук АзССР
Баку

Поступило
18 XI 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Browne P.J.* – Ind. Univ. Math., 1974, vol. 24, № 3, p. 249–257. 2. *Browne P.J.* – Math. Anal., Appl., 1977, vol. 60, p. 259–273; Z. Math. Anal. Appl., 1977, vol. 60, p. 274–279; 1980, vol. 73, p. 561–567. 3. *Heeman B.D.* – Res. Notes. Math. Pitnam, 1978, № 28. 4. *Atkinson F.V.* – Bull. Amer. Math. Soc., 1968, vol. 74, p. 1.