А. А. Фонарёв, О проекционно-итерационном методе решения некоторых нелинейных уравнений, *Изв. вузов. Матем.*, 1981, номер 9, 54–55

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 9 (232)

А. А. Фонарёв УДК 517.988.8

О ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается проекционно-итерационный процесс, сочетающий в себе метод Галёркина (см. [1], [2]) и итерационный процесс. При этом в отличие от [3] (с. 127) не применяется дуальное отображение.

С использованием вложения пространств доказывается слабая сходимость проекционно-итерационного процесса для слабо непрерывного потенциального оператора из вещественного сепарабельного рефлексивного банахова пространства E в сопряженное пространство E^*. Отметим, что изучение слабо непрерывных операторов представляет самостоятельный интерес (см. [2], гл. 1, § 1; [4]).

Пусть вещественное рефлексивное банахово пространство E такое, что существует вещественное сепарабельное гильбертово пространство H с ортонормированным базисом $\{\varphi_i\}$ (здесь и далее не указываем, как изменяется индекс, если он изменяется от 1 до ∞), которое плотно вложено в E (H вложено в E, если каждый вектор $x\in H$ принадлежит также пространству E и тождественное отображение H в E непрерывно, т. е. $\|x\|_E\leqslant a\|x\|_H$ для любого $x\in H$ (постоянная $a\geqslant 1$), где $\|\cdot\|_E$—норма в пространстве E, $\|\cdot\|_H$—норма в пространстве H; H плотно вложено в E, если H вложено в E и образ H при тождественном отображении H в E всюду плотен в E). Тогда сужение на образ H при тождественном отображении H в E непрерывного линейного функционала y на E, т. е. $y\in E^*$, порождает непрерывный линейный функционал на H, при этом функционалы, не равные на E, порождают не одинаковые функционалы на H, ибо H плотно вложено в E. Таким образом, пространство E^* взаимно однозначно с сохранением алгебраических операций отображается в H, и это отображение непрерывно (далее будем обозначать его через J). Следовательно, для значения функционала $y\in E^*$ на элементе $x\in E$, т. е. $\langle y, x\rangle$, имеем $\langle y, x\rangle=(Jy, x)$ для любого $x\in H$, где $(\cdot,\cdot)$—скалярное произведение в H.

Пусть F—оператор из пространства E в E^*. Рассмотрим проекционно-итерационный процесс

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_n y_n,\ y_n=\sum_{i=1}^{n+1}\langle F(x_n),\ \varphi_i\rangle\varphi_i,\ \varepsilon_n>0\ (n=1,\ 2,\dots),\tag{1}$$

где $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^n\varphi_i$, $x_1=c_1^1\varphi_1$, c_1^1—произвольное вещественное число. Процесс (1) является итерационным аналогом метода Галёркина (см. [1], [2]).

Введем обозначение $t_n=\sum\limits_{i=1}^{n+1}(\langle F(x_n),\ \varphi_i\rangle)^2$ для $n=1,\ 2,\dots$, где $\{x_n\}$—последовательность процесса (1).

Далее будем пользоваться терминологией из [1].

Лемма 1. *Пусть*: 1) *потенциальный оператор F из всего пространства E в E^* с потенциалом f такой, что $\langle F(u)-F(v),\ u-v\rangle\leqslant M(r)\|u-v\|_E^2$ для $\|u\|_E$, $\|v\|_E\leqslant r$, где $M(r)$—неубывающая функция, заданная для $r\geqslant 0$;* 2) *$\{\delta_n\}$—произвольная ограниченная последовательность неотрицательных чисел. Тогда если в* (1) *ε_n такие, что $\varepsilon_n M_n a^2\leqslant 2^{-1}$, где $M_n=\max(1,\ M(R_n))$, $R_n\geqslant\delta_n+\|x_n\|_E+\|y_n\|_E$, то $f(x_n)\geqslant f(x_{n+1})$ для $n=1, 2,\dots$*

Действительно, для $n=1, 2,\dots$ по обобщенной формуле Лагранжа ([1], с. 32) существует $\theta_n\in(0,\ 1)$ такое, что $\alpha_n=f(x_n)-f(x_{n+1})=\langle F(x_{n+1}+\theta_n(x_n-x_{n+1})),\ x_n-x_{n+1}\rangle$, что влечет $\alpha_n=\langle F(x_n),\ x_n-x_{n+1}\rangle-\langle F(x_{n+1}+\theta_n(x_n-x_{n+1}))-F(x_n),\ x_{n+1}-x_n\rangle\geqslant\varepsilon_n t_n-M_n\|x_n-x_{n+1}\|_E^2$. Отсюда вытекает, что $\alpha_n\geqslant\varepsilon_n t_n(1-\varepsilon_n M_n a^2)$. Значит, $\alpha_n\geqslant\varepsilon_n t_n/2$, что доказывает лемму 1.

Из леммы 1 вытекает

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и потенциал оператора* F, *т. е.* f, *является возрастающим функционалом. Тогда если в* (1) ε_n *такие же, как в лемме* 1, *то последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена в* E.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2, *оператор* F *ограниченный, потенциал оператора* F, *т. е.* f, *ограничен снизу. Тогда если в* (1) ε_n *такие, что* $4^{-1} \leqslant \varepsilon_n M_n a^2 \leqslant 2^{-1}$, *где* $M_n = \max(1, M(R_n))$, $R_n = \delta_n + \|x_n\|_E + \|y_n\|_E$, *то* $t_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и последовательность* $\{F(x_n)\}$ *слабо сходится к нулю в* E^*.

Действительно, из ограниченности последовательности $\{x_n\}$ в E вытекает ограниченность последовательности $\{F(x_n)\}$ в E^*. Но $\|y_n\|_E \leqslant a\|y_n\|_H = a\left\|\sum_{i=1}^{n+1}(z_n, \varphi_i)\varphi_i\right\|_H \leqslant a\|z_n\|_H$, где $z_n = JF(x_n)$, для $n = 1, 2, \ldots$, что влечет ограниченность последовательности $\{y_n\}$ в E. Значит, существует постоянная M_0 такая, что $1 \leqslant M_n \leqslant M_0$, и $\varepsilon_n \geqslant \varepsilon_0 = (4M_0a^2)^{-1}$, что влечет $f(x_n) - f(x_{n+1}) \geqslant \varepsilon_0 t_n/2$ для $n = 1, 2, \ldots$ Далее, $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, ибо функционал f ограничен снизу. Для $x = \sum_{i=1}^{m} a_i\varphi_i$ при $n \geqslant m$ имеем $q_n = |\langle F(x_n), x\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_i\langle F(x_n), \varphi_i\rangle\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)^{1/2} t_n^{1/2}$, что влечет $q_n \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, согласно [3] (гл. 1, теорема 5.5) лемма 3 справедлива.

Замечание 1. Леммы 1—3 справедливы, если оператор F задан только на образе H при тождественном отображении H в E.

Из лемм 2 и 3 вытекает

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 3 *и оператор* F *слабо непрерывен, т. е. переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся. Тогда если в* (1) ε_n *такие же, как в лемме* 3, *то последовательность* $\{x_n\}$ *слабо компактна и любая ее слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к решению уравнения*

$$F(x) = 0 \quad (x \in E). \tag{2}$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и уравнение (2) может иметь не более одного решения. Тогда если в (1) ε_n такие же, как в лемме 3, то последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к решению уравнения (2).

Если оператор F из E в E^* строго монотонный, то уравнение (2) может иметь не более одного решения. Значит, учитывая [1] (теоремы 5.1 и 9.1), имеем

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и оператор F строго монотонный. Тогда если в (1) ε_n такие же, как в лемме 3, то последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к единственной точке минимума функционала f.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.—М., 1972.—416 с.

2. Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения.—В сб.: Соврем. пробл. матем. Т. 9. М., 1976, с. 5—130.

3. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.—М., 1978.—336 с.

4. Похожаев С. И. О нелинейных операторах, имеющих слабо замкнутую область значений, и квазилинейных эллиптических уравнениях.—Матем. сб., 1969, т. 78 (120) : 2, с. 237—259

г. Москва

Поступила
14 III 1979