P. D. Lebedev, Iterative methods for approximations constructing of optimal covering for nonconvex plane sets, *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2019, Volume 4, Issue 1, 5–17

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14101

МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, вып. 1. С. 5–17.

УДК 514.174.3 DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14101

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ АППРОКСИМАЦИЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ НЕВЫПУКЛЫХ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ

П. Д. Лебедев

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
pleb@yandex.ru

Предложены алгоритмы итерационного построения оптимальных покрытий невыпуклых плоских фигур наборами кругов. Их основу составляют процедуры разбиения фигуры на области влияния точек, служащих центрами элементов начальной упаковки, и отыскание чебышевских центров этих зон. Для генерации исходного массива точек применяются стохастические процедуры, использующие синтез оптимальных гексагональных сеток и случайных векторов.

Ключевые слова: *оптимальное покрытие, чебышевский центр, диаграмма Вороного, зона Дирихле, невыпуклый многоугольник.*

Введение

В различных областях математики требуется выполнять аппроксимацию множеств наборами однотипных элементов. Одним из самых простых и удобных её способов служит построение набора конгруэнтных шаров, отражающих геометрию множества. В случае плоских фигур можно говорить о двух типах аппроксимации: покрытиях (внешние аппроксимации, покрывающее множество) и упаковках (внутренние аппроксимации, вложенные во множество). В практических приложениях, как правило, более важную роль играют именно покрытия, поскольку они гарантируют, что для каждой точки фигуры найдётся элемент, её накрывающий. Это имеет большое значение, например, при построении сетей узлов связи, центров технического обслуживания или складов (подробнее см. [1]). Ранее теоретиками в основном изучались покрытия выпуклых фигур правильной формы (например, кругов [2] или правильных многоугольников [3]). Однако часто приходится иметь дело с невыпуклыми фигурами, особенно в задачах о построении транспортной сети в регионах [4] и построении распределительных сетей в архитектуре [5, гл. 3]. Возникает необходимость разработать алгоритмы, позволяющие строить покрытия для фигур достаточно общего вида, например, произвольных невыпуклых односвязных многоугольников. При этом требуется привлечение методов вычислительной геометрии [6] и негладкой оптимизации [7].

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 18-01-00221 и № 18-31-00018_мол_а и при поддержке Правительства Российской Федерации, постановление № 211, контракт № 02.A03.21.0006.

1. Задача о покрытии

Пусть M — замкнутое ограниченное односвязное множество в евклидовой плоскости. Назовём объединение из $n \in \mathbb{N}$ кругов $O(\mathbf{s}_i, r)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, равного радиуса $r > 0$ покрытием множества M, если выполняется условие

$$M \subseteq O(\mathbf{s}_1, r) \cup O(\mathbf{s}_2, r) \cup \ldots \cup O(\mathbf{s}_n, r).$$

Будем считать оптимальным покрытие множества M, для которого значение r минимально. Рассмотрим задачу о нахождении оптимального покрытия для множества M при заданном n.

Введём ряд вспомогательных обозначений. Пусть A и B — замкнутые, ограниченные множества в $\mathbb{R}^2$. *Хаусдорфовым отклонением* A от B [8] называется величина $h(A, B) = \max\{\rho(\mathbf{a}, B) \colon \mathbf{a} \in A\}$, где $\rho(\mathbf{a}, B) = \min\{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \colon \mathbf{b} \in B\}$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{a}$ до множества B.

Чебышевским центром замкнутого ограниченного множества $M \in \mathbb{R}^2$ называется точка $\mathbf{c}(M)$, удовлетворяющая равенству

$$h(M, \{\mathbf{c}(M)\}) = \min\{h(M, \{\mathbf{x}\}) \colon \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}. \tag{1}$$

Подробнее о свойствах чебышевского центра см. работы А. Л. Гаркави, например, [9; 10]. Для любого компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ чебышевский центр $\mathbf{c}(M)$ существует, является единственным и принадлежит выпуклой оболочке $\mathrm{co}\, M$ множества M. Величина (1) называется чебышевским радиусом $r(M)$ множества M.

Будем называть *n-сетью* [9; 10] на плоскости $\mathbb{R}^2$ непустое множество, состоящее не более чем из n точек в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через Σ_n множество всех n-сетей пространства $\mathbb{R}^2$. n-сеть S^* называется *наилучшей чебышевской n-сетью множества* $M \in \mathbb{R}^2$, если $h(M, S^*) = \min\{h(M, S) \colon S \in \Sigma_n\}$. Решение задачи об оптимальном покрытии фигуры M набором из n сводится к построению её наилучшей n-сети. В наиболее простом случае, при $n = 1$, оптимальное покрытие состоит из круга с центром в $\mathbf{c}(M)$ радиуса, равного $r(M)$.

2. Алгоритмы решения задачи

Рассмотрим компактное множество M, в общем случае невыпуклое. Полагаем, что изначально задана некоторая n-сеть S, возможно, сгенерированная с помощью генератора случайных чисел или взятая как набор точек из решётки, наложенной на фигуру M. На её базе можно строить новую n-сеть $\widehat{S}$, для которой $h(M, \widehat{S}) \leqslant h(M, S)$. Для описания алгоритмов в свою очередь введём ряд определений.

Ячейкой Вороного [11, гл. 3] точки $\mathbf{s}_i \in S$ n-сети S называется множество

$$W_i(S) = \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\mathbf{w} - \mathbf{s}_i\| = \min\{\|\mathbf{w} - \mathbf{s}_i\| \colon \mathbf{s}_j \in S\}\right\}.$$

Заметим, что по построению ячейка Вороного есть либо выпуклый многоугольник, либо неограниченная выпуклая часть плоскости, границей которой являются отрезки и лучи прямых, либо полуплоскость.

Пусть заданы компактное множество $M \in \mathbb{R}^2$ и n-сеть S. *Областью Дирихле* [12, с. 305] точки $\mathbf{s}_i \in S$ в множестве M называется $D_i(M, S) = M \cap W_i(S)$.

Новая сеть строится по схеме, предложенной в [13]:

$$\widehat{\mathbf{s}}_i = \begin{cases} \mathbf{c}\big(D_i(M, S)\big), \ D_i(M, S) \neq \varnothing, \\ \mathbf{s}_i, \ D_i(M, S) = \varnothing, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}.$$

В работе [1] показано, что схема (2) даёт новую n-сеть, хаусдорфово отклонение множества M от которой по крайней мере не меньше, чем у предыдущей. В работе [14] приведены методы вычисления чебышевского центра многоугольника, а в [15] — построения областей Дирихле.

Заметим, что построение областей Дирихле для невыпуклых множеств существенно затруднено тем, что они могут быть не только невыпуклыми, но и несвязными. Поэтому для удобства надо подменить множество $D_i(M,S)$ набором $H_i = \{\mathbf{h}_i^{(j)}\}_{j=1}^{J}$ конечного числа J точек, таких, чтобы выполнялось условие $\mathbf{c}\big(D_i(M,S)\big) = \mathbf{c}(H_i)$. В его качестве можно рассмотреть объединение точек множества $\mathbf{h}_i^{(j)} \in D_i(M,S)$, удовлетворяющих одному из трёх условий:

- $\mathbf{h}_i^{(j)}$ есть вершина многоугольника M;
- $\mathbf{h}_i^{(j)}$ принадлежит границе ∂M многоугольника M и как минимум ещё одной области Дирихле $D_k(M,S)$, $k \neq i$;
- $\mathbf{h}_i^{(j)}$ принадлежит как минимум ещё двум областям Дирихле $D_k(M,S)$ и $D_l(M,S)$, $k \neq i$, $l \neq i$.

По построению множество H_i есть объединение всех вершин многоугольников, из которых состоит область Дирихле $D_i(M,S)$, поэтому их чебышевские центры и радиусы совпадают. Более того, во множестве H_i найдётся набор не более чем из трёх элементов (то есть симплекс на плоскости), такой, что все они лежат на окружности $\partial O\left(\mathbf{c}\big(D_i(M,S)\big), r\big(D_i(M,S)\big)\right)$ чебышевского радиуса, с центром, совпадающим с $\mathbf{c}\big(D_i(M,S)\big)$. Заметим, что точки из множеств H_i по построению включают в себя возможные максимумы функции $f(\mathbf{x}) = h(\{\mathbf{x}\}, S)$ на компакте M. Поэтому для отыскания радиуса кругов покрытия при заданном массиве их центров достаточно вычислить максимальное значение $f(\mathbf{x})$ на H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, подробнее см. [12; 16].

Важным элементом рассматриваемых алгоритмов является построение чебышевского центра компакта H_i. В общем случае для множества чебышевский центр можно построить только численными методами. Поэтому важно знать, насколько найденное программным комплексом значение близко к точному. Особенно это актуально для итерационных алгоритмов, где нужно иметь условия окончания его работы.

Теорема 1. *Пусть заданы компакты в $\mathbb{R}^2$: M и $M_0 \subseteq M$. Если найден чебышевский центр $\mathbf{c}(M_0)$ компакта M, то выполняется оценка*

$$\|\mathbf{c}(M) - \mathbf{c}(M_0)\| \leqslant \sqrt{2h\left(M, \{\mathbf{c}(M_0)\}\right)\left(h\left(M, \{\mathbf{c}(M_0)\}\right) - r(M_0)\right)}. \tag{3}$$

Доказательство. Допустим, оценка (3) не выполняется. Обозначим расстояние между чебышевскими центрами $d = \|\mathbf{c}(M) - \mathbf{c}(M_0)\|$. Допустим, что $d > 0$. Тогда можно провести через $\mathbf{c}(M)$ прямую, перпендикулярную отрезку $[\mathbf{c}(M), \mathbf{c}(M_0)]$. Она делит окружность $\partial O\big(\mathbf{c}(M), r(M)\big)$ на две половины. При этом согласно свойствам чебышевского центра замкнутого множества на обеих половинах окружности $\partial O\big(\mathbf{c}(M), r(M)\big)$ должны быть точки множества M (иначе можно найти круг радиуса, меньшего, чем $r(M)$, в который можно вложить M). Обозначим через $\mathbf{m}^*$ произвольную точку, которая принадлежит M и той половине окружности $\partial O\big(\mathbf{c}(M), r(M)\big)$, которая не содержит $\mathbf{c}(M_0)$. Рассмотрим треугольник, образованный точками $\mathbf{m}^*$, $\mathbf{c}(M)$, $\mathbf{c}(M_0)$. Угол при вершине $\mathbf{c}(M)$ по построению не меньше $\pi/2$, значит, из теоремы косинусов следует оценка

$$\|\mathbf{m}^* - \mathbf{c}(M_0)\|^2 \geqslant \|\mathbf{m}^* - \mathbf{c}(M)\|^2 + \|\mathbf{c}(M) - \mathbf{c}(M_0)\|^2.$$

Её можно переписать в виде $d^2 \leqslant \|\mathbf{m}^* - \mathbf{c}(M_0)\|^2 - \|\mathbf{m}^* - \mathbf{c}(M)\|^2$. Из определения чебышевского центра следует, что $\|\mathbf{m}^* - \mathbf{c}(M)\| = r(M)$. Из определения хаусдорфова отклонения вытекает неравенство $\|\mathbf{m}^* - \mathbf{c}(M_0)\| \leqslant h\left(M, \{\mathbf{c}(M_0)\}\right)$. Получаем оценку $d^2 \leqslant h\left(M, \{\mathbf{c}(M_0)\}\right)^2 - r(M)^2$. Из вложения $M_0 \subseteq M$ вытекают оценки $r(M_0) \leqslant r(M)$ и $r(M_0) \leqslant h\left(M, \{\mathbf{c}(M_0)\}\right)$, а значит, можно записать

$$d^2 \leqslant h\left(M, \{\mathbf{c}(M_0)\}\right)^2 - r(M_0)^2 \leqslant 2h\left(M, \{\mathbf{c}(M_0)\}\right) \cdot \left(h\left(M, \{\mathbf{c}(M_0)\}\right) - r(M_0)\right).$$

После извлечения квадратных корней из первой и последней части равенства получаем оценку (3). □

При построении областей Дирихле требуется строить срединные перпендикуляры к отрезкам, соединяющим точки из S, и искать их пересечения друг с другом и со сторонами многоугольника M. Данная процедура требует больших затрат вычислительных ресурсов, особенно в случае невыпуклого множества M. Это связано с необходимостью выполнять проверку, принадлежит ли точка многоугольнику, что требует дополнительных построений. Поэтому важно сократить перебор точек, которые могут быть вершинами многоугольников, входящих в области Дирихле.

Теорема 2. *Пусть задан компакт M в $\mathbb{R}^2$ и n-сеть S. Тогда две области Дирихле $D_i(M,S)$, $i \leqslant n$, и $D_j(M,S)$, $j \leqslant n$, могут иметь общие точки, только если*

$$\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| \leqslant 2h\left(M, S\right). \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{m}^* \in D_i(M,S) \cap D_j(M,S)$. В силу неравенства треугольника $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| \leqslant \|\mathbf{s}_i - \mathbf{m}^*\| + \|\mathbf{s}_j - \mathbf{m}^*\|$. Поскольку $\mathbf{m}^*$ принадлежит $D_i(M,S)$ и $D_j(M,S)$, то $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{m}^*\| = \|\mathbf{s}_j - \mathbf{m}^*\|$. Тогда можно записать неравенство $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{m}^*\| \geqslant \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|/2$. Если оценка (4) не выполняется, то, следовательно, имеет место соотношение $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{m}^*\| > h\left(M, S\right)$. Поскольку по определению области Дирихле точка $\mathbf{s}_i$ является одной из ближайших к любой точке из $D_i(M,S)$, то это значит, что $\rho(\mathbf{m}^*, S) > h\left(M, S\right)$. Получилось противоречие. □

Теорема 3. *Пусть задан компакт M в $\mathbb{R}^2$ и n-сеть S. Тогда три области Дирихле $D_i(M,S)$, $i \leqslant n$, $D_j(M,S)$, $j \leqslant n$, и $D_k(M,S)$, $k \leqslant n$, могут иметь общую точку, только если выполнено условие*

$$\min\{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|, \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\|, \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k\|\} \leqslant \sqrt{3}h\left(M, S\right). \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим точку $\mathbf{m}^* \in D_i(M,S) \cap D_j(M,S) \cap D_k(M,S)$. Из определения области Дирихле следует, что она равноудалена от точек $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{s}_j$, $\mathbf{s}_k$. Значит, последние три точки лежат на окружности радиуса r^* с центром в точке $\mathbf{m}^*$. Рассмотрим углы, образованные векторами $\mathbf{s}_i - \mathbf{m}^*$, $\mathbf{s}_j - \mathbf{m}^*$ и $\mathbf{s}_k - \mathbf{m}^*$. Сумма этих трёх углов не превышает 2π. Значит, наименьший из них не превышает $2\pi/3$. Без ограничения общности полагаем, что имеет место неравенство

$$\alpha = \angle\big(\mathbf{s}_i - \mathbf{m}^*, \mathbf{s}_j - \mathbf{m}^*\big) \leqslant 2\pi/3. \tag{6}$$

По построению $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| = 2r^* \sin(\alpha/2)$. Поскольку функция синуса возрастает на отрезке $[0, \pi/2]$, то из неравенства (6) вытекает оценка

$$\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| \leqslant 2r^* \sin((2\pi/3)/2) = 2r^* \sin(\pi/3) = \sqrt{3}r^*.$$

Из определения зоны Дирихле и хаусдорфова отклонения вытекает оценка $r^* \leqslant h(M,S)$, а значит, последнее неравенство влечёт за собой выполнение (5). □

Теоремы 2 и 3 могут применяться начиная со второго цикла корректировки сети S по формуле (2). Если известно хаусдорфово отклонение h_0 множества M от предыдущей сети S_0, то можно использовать для $h(M,S)$ оценку

$$h(M,S) \leqslant h(M,S_0) - (\sqrt{2}-1)\frac{d(S,S_0)^2}{h(M,S_0)},$$

где $d(A,B) \triangleq \max\{h(A,B), h(B,A)\}$ — хаусдорфово расстояние между множествами A и B, доказательство которой приведено в [15].

3. Примеры построения покрытий

В среде MATLAB автором разработан программный комплекс построения аппроксимаций оптимальных покрытий путём многократного улучшения сгенерированной случайным образом n-сети S с применением формулы (2). Изначальная чебышевская n-сеть строилась на базе наложения гексагональной решётки [17] на фигуру M со стохастическим изменением координат её узлов. Затем из числа массива точек выбиралось случайным образом ровно n элементов.

Пример 1. Рассматривается невыпуклый 12-угольник M с массивом вершин

$$(-1,-0.5), (-1,0.5), (-0.5,0.5), (-0.5,1), (0.5,1), (0.5,0.5), (1,0.5),$$

$$(1,-0.5), (0.5,-0.5), (0.5,-1), (-0.5,-1), (-0.5,-0.5).$$

Требуется построить его оптимальные покрытия кругами при числе элементов $n = 10$ и $n = 13$.

Результаты получены путём многократного запуска программного комплекса. При $n = 10$ массив центров кругов

$$S = \{(-0.25,-0.6952), (-0.6952,-0.25), (-0.6952,0.25), (-0.2502,0.7344),$$

$$(0.25,-0.6952), (0,-0.0548), (0.0002,0.2832),$$
$$(0.2498,0.7348), (0.6952,-0.25), (0.6952,0.25)\}.$$

Радиус $r \approx 0.3942$. Круги покрытия из 10 элементов (тонкими линиями), набор S их центров (в виде кружков) и множество M (жирными линиями) показаны на рис. 1.

При $n = 13$ массив центров кругов

$$S = \{(-0.2655,-0.7559), (-0.7544,-0.267), (-0.7919,0.233), (-0.1974,0.8509),$$

$$(0.2324,-0.7973), (0.2515,0.1613), (-0.2758,0.0851), (-0.2459,0.4799),$$
$$(-0.2337,-0.3027), (0.2737,-0.3466), (0.7576,0.2637),$$
$$(0.3016,0.7257), (0.7877,-0.2363)\}.$$

Радиус $r \approx 0.3385$. Круги покрытия из 13 элементов, набор S их центров и множество M показаны на рис. 2.

Пример 2. Рассматривается невыпуклый 8-угольник M с массивом вершин

$$(-1,1), (-0.5,0), (0.5,0), (1,1), (1,-1), (0.5,-0.5), (-0.5,-0.5), (-1,-1).$$

Требуется построить его оптимальные покрытия кругами при числе элементов $n = 11$ и $n = 13$.

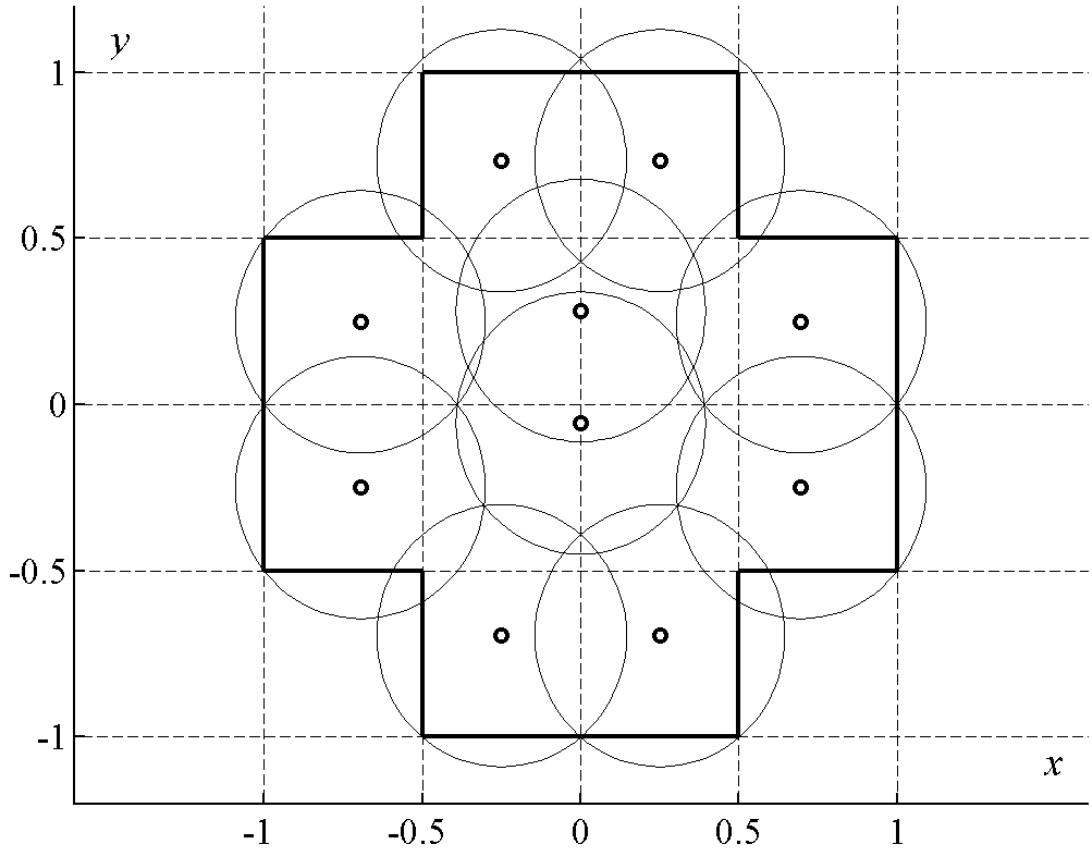

Рис. 1. Покрытие многоугольника M в примере 1 объединением 10 кругов

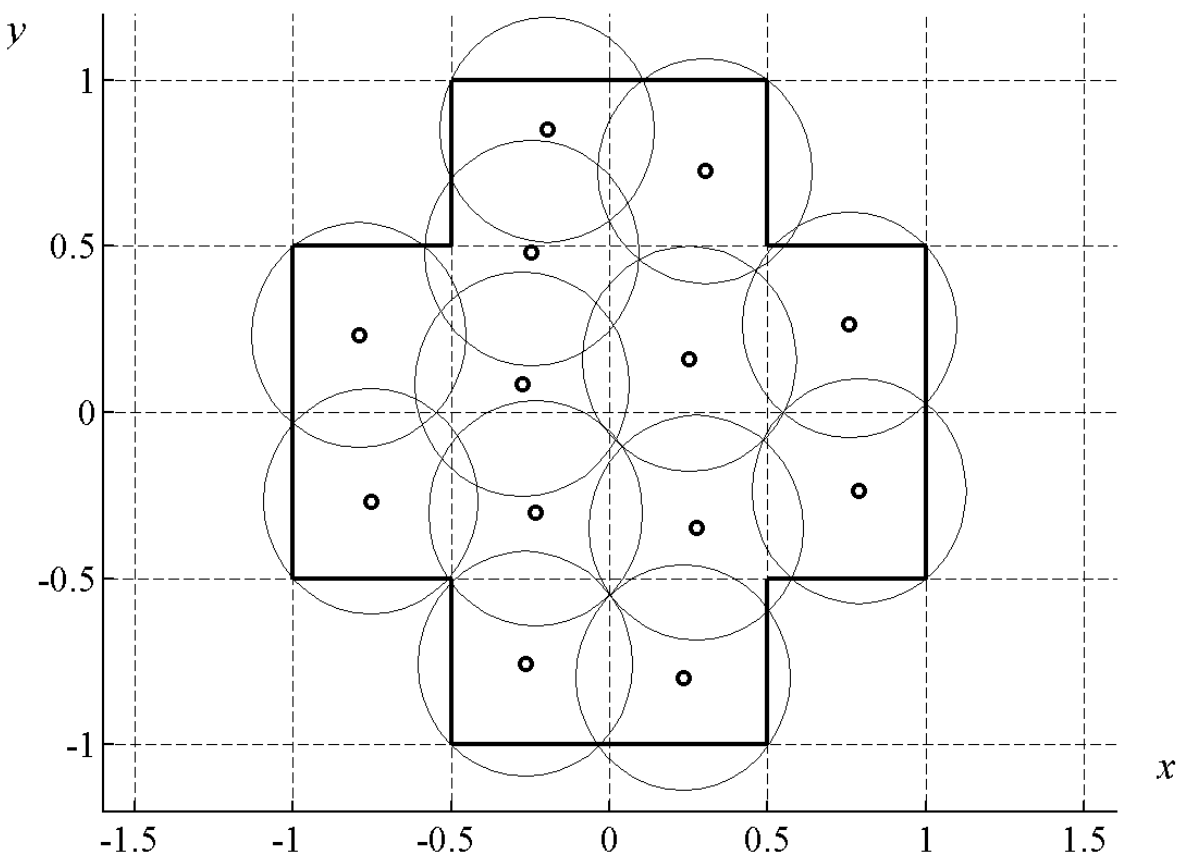

Рис. 2. Покрытие многоугольника M в примере 1 объединением 13 кругов

При $n = 11$ массив центров кругов

$$S = \{(-0.7661, -0.7661), (-0.8057, -0.3086), (-0.7750, 0.1569), (-0.9605, 0.6882),$$

$$(0.1692, -0.4378), (-0.3355, -0.2661), (0.1918, 0.0084), (0.8636, 0.6986),$$

$$(0.9096, -0.6818), (0.6818, -0.2731), (0.8407, 0.1072)\}.$$

Радиус $r \approx 0.3308$. Круги покрытия из 11 элементов, набор S их центров и множество M показаны на рис. 3.

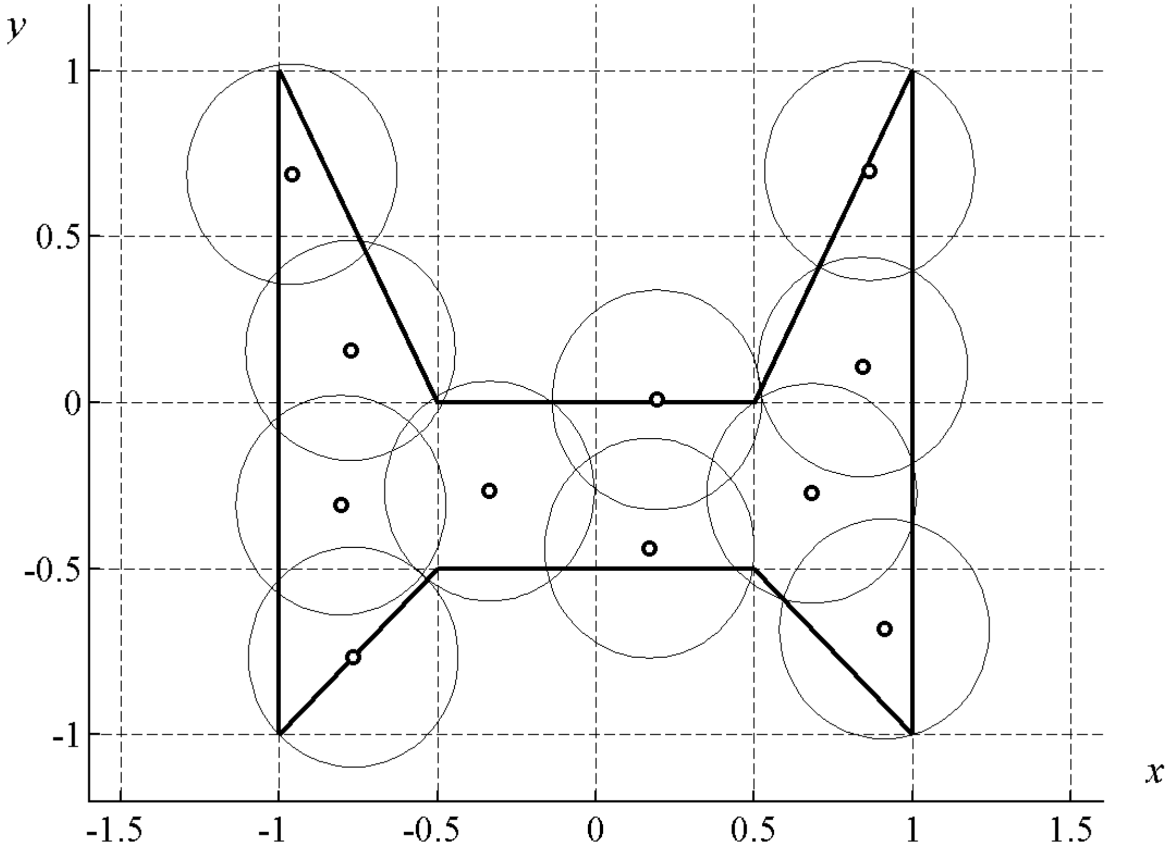

Рис. 3. Покрытие многоугольника M в примере 2 объединением 11 кругов

При $n = 13$ массив центров кругов

$$S = \{(-0.7959, -0.7785), (-0.7785, -0.3529), (-0.7081, -0.0744),$$

$$(-0.8689, 0.7379), (0.3190, -0.4704), (-0.2663, -0.4764), (-0.1689, -0.172),$$

$$(-0.8689, 0.2137), (0.8062, -0.3083), (0.8653, 0.1917),$$

$$(0.3717, -0.0684), (0.8653, 0.7306), (0.8062, -0.7694)\}.$$

Радиус $r \approx 0.3012$. Круги покрытия из 13 элементов, набор S их центров и множество M показаны на рис. 4.

Пример 3. Рассматривается невыпуклый 16-угольник M с массивом вершин

$$(-1, 1), (-0.5, 0.5), (0, 1), (0, 1), (1, 1), (0.5, 0), (1, 0), (1, -0.5), (0.5, -0.5),$$

$$(0.5, -1), (0, -0.5), (-0.5, -1), (-1, -0.5), (-0.5, -0.5), (-0.5, 0), (-1, 0).$$

Требуется построить его оптимальные покрытия кругами при числе элементов $n = 14$ и $n = 15$.

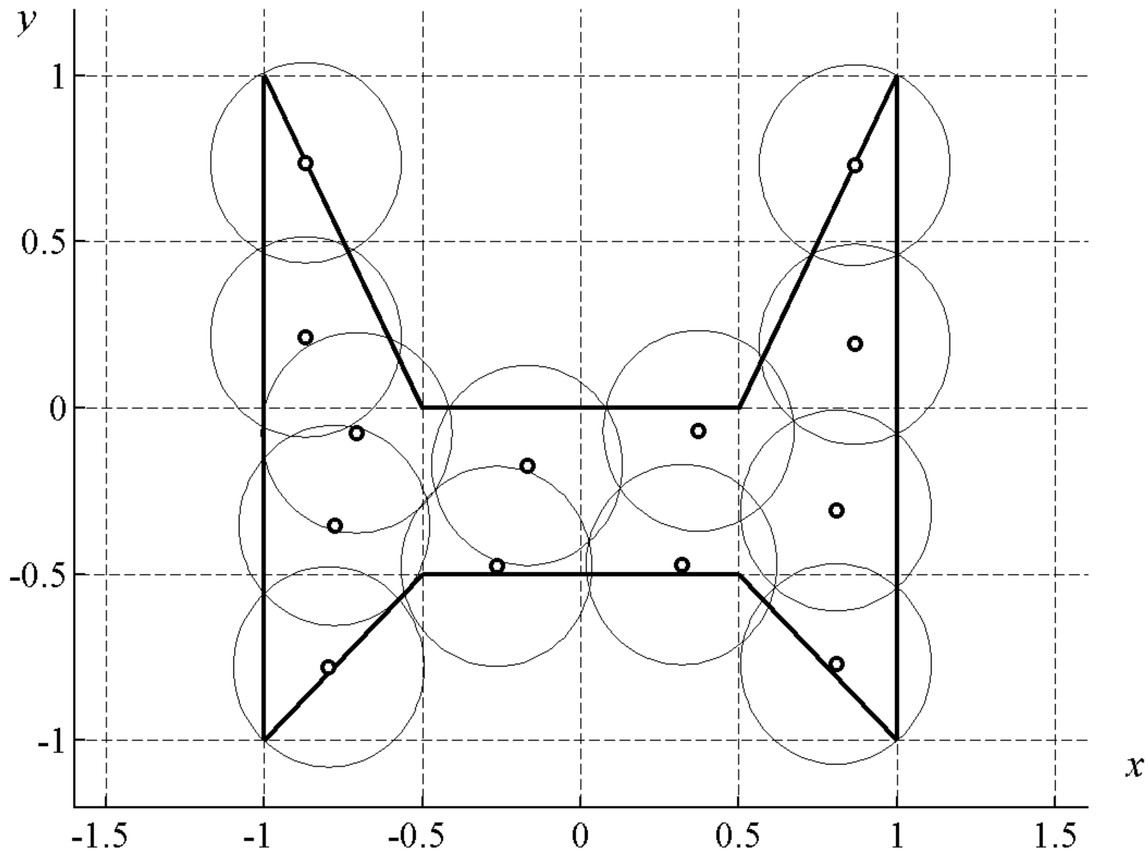

Рис. 4. Покрытие многоугольника M в примере 2 объединением 13 кругов

При $n = 14$ массив центров кругов

$$S = \{(-0.7914, -0.7086), (-0.6943, 0.3703), (-0.6847, 0.1110), (-0.9817, 0.6943),$$
$$(-0.4117, -0.6769), (-0.1769, -0.2655), (-0.1477, 0.2762), (-0.1391, 0.7377),$$
$$(0.3038, -0.7263), (0.3076, -0.1953), (0.3673, 0.3386), (0.3855, 0.8768),$$
$$(0.7744, -0.2500), (0.8494, 0.6988)\}.$$

Радиус $r \approx 0.3368$. Круги покрытия из 14 элементов, набор S их центров и множество M показаны на рис. 5.

При $n = 15$ массив центров кругов

$$S = \{(-0.7626, -0.7102), (-0.4047, -0.1680), (-0.7517, 0.2038), (-0.8758, 0.7038),$$
$$(-0.3150, -0.7374), (-0.1273, -0.1541), (-0.3105, 0.4480), (0.0593, 0.8806),$$
$$(0.1748, -0.3720), (0.4657, 0.0566), (0.1175, 0.3318), (0.6788, 1),$$
$$(0.4978, -0.6788), (0.7983, -0.2500), (0.5731, 0.6244)\}.$$

Радиус $r \approx 0.3212$. Круги покрытия из 15 элементов, набор S их центров и множество M показаны на рис. 6.

При решении задач производился запуск программного комплекса в пределах $10 \div 15$ раз с условием по выходу из итерационного цикла, заключающимся в том, что после применения формулы (2) координаты точек изменяются не более чем на $\Delta r = 10^{-4}$. Число циклов изменялось в пределах $200 \div 500$, время работы составляло от 10 до 20 минут.

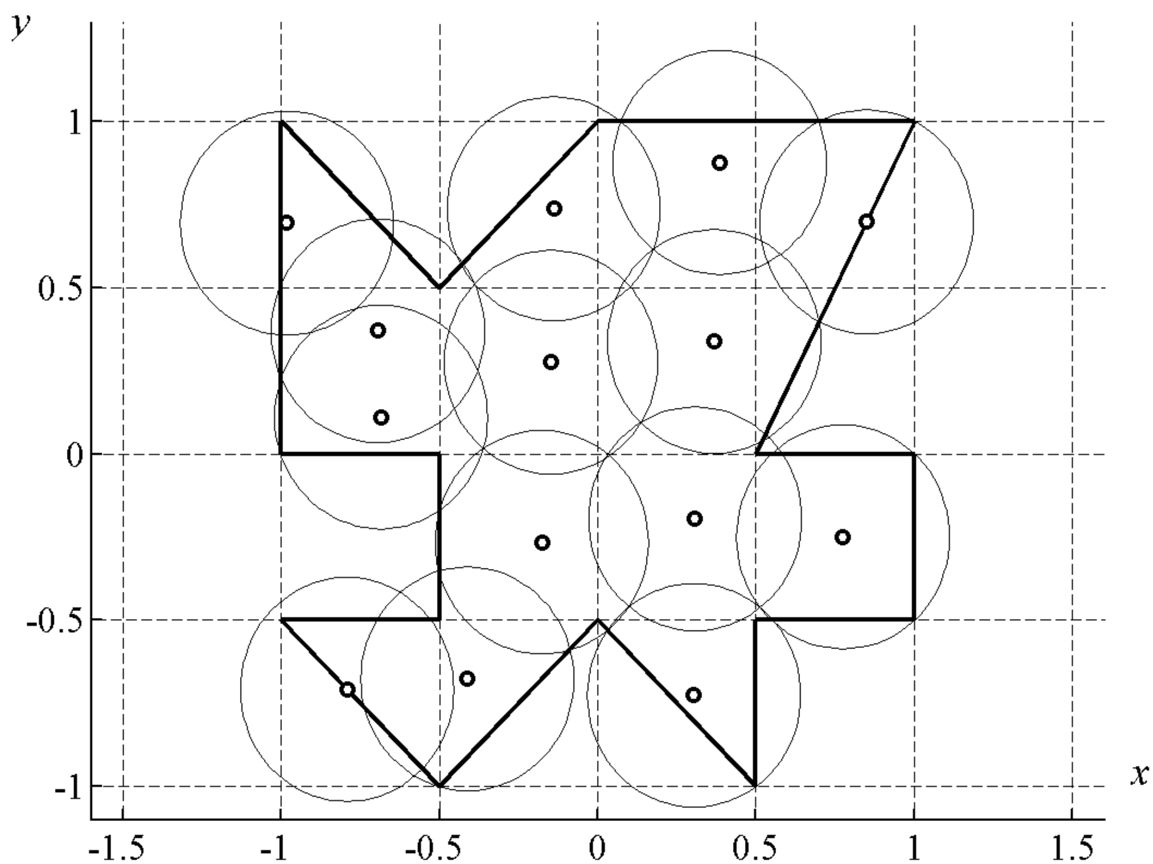

Рис. 5. Покрытие многоугольника M в примере 3 объединением 14 кругов

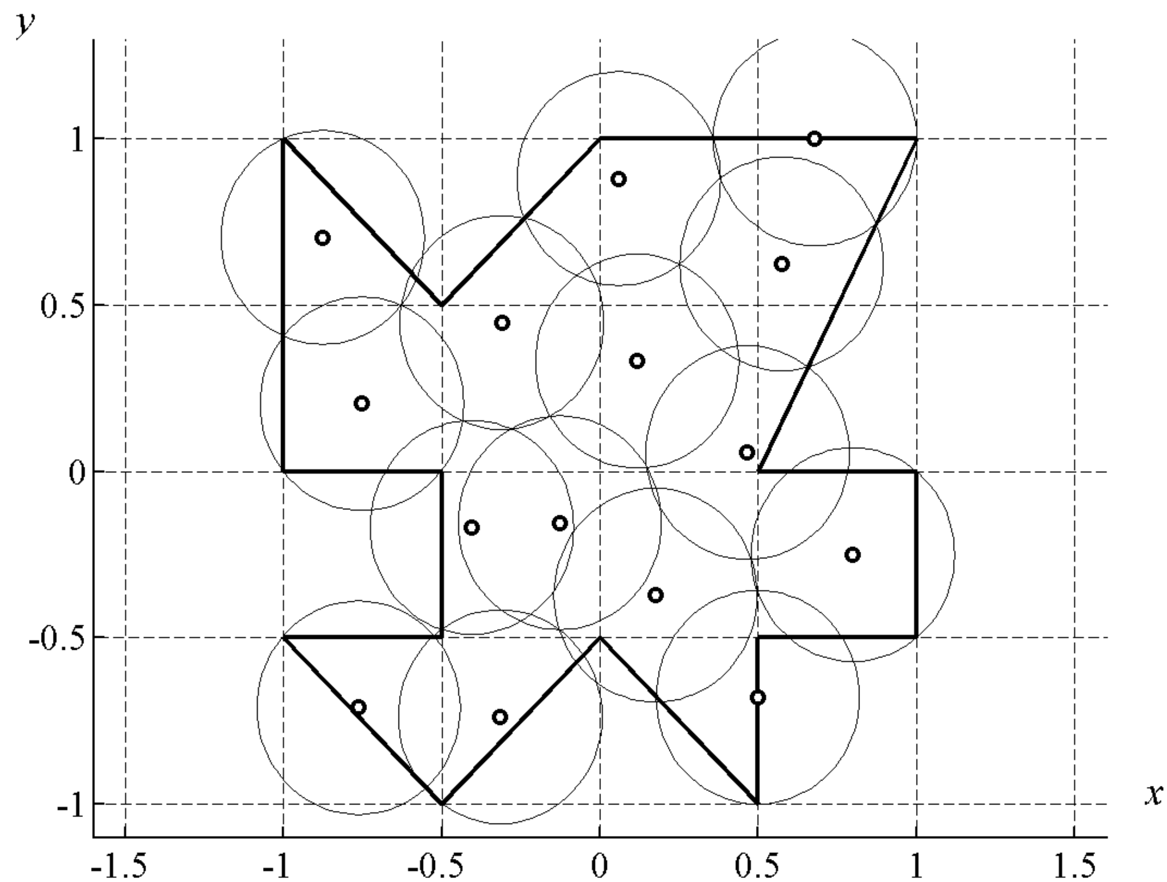

Рис. 6. Покрытие многоугольника M в примере 3 объединением 15 кругов

Заключение

Авторами разработан и опробован для ряда примеров программный комплекс построения оптимальных покрытий невыпуклых плоских множеств M. Центры кругов покрытия находятся как чебышевские центры областей влияния точек текущего массива точек S. При этом оценка точности нахождения чебышевского центра выполняется с помощью теоремы 1. В свою очередь области влияния строятся как области Дирихле текущего массива точек в заданной фигуре M. Для экономии вычислительных ресурсов при их отыскании применяются теоремы 2 и 3. Они существенно сокращают число рассматриваемых пересечений срединных перпендикуляров к отрезкам с вершинами в точках из S друг с другом и со сторонами многоугольника M, которые могут входить в области Дирихле. При моделировании решения задач рассматривались различные плоские невыпуклые фигуры, как имеющие оси симметрии, так и неправильной формы. Выполнялась многократная генерация начального положения точек, в том числе как комбинация ранее найденной конфигурации, близкой к оптимальной, и массива случайных векторов. Результаты визуализированы и позволяют оценить структуру, образованную центрами элементов покрытия. Она существенно отличается от правильной гексагональной решётки, которая является оптимальной при покрытии плоскости в целом [17, гл. III].

Список литературы

1. **Казаков, А. Л.** Алгоритмы построения наилучших n-сетей в метрических пространствах / А. Л. Казаков, П. Д. Лебедев // Автоматика и телемеханика. — 2017. — Вып. 7. — С. 141–155.
2. **Melissen, H.** Densest packings of eleven congruent circles in a circle / H. Melissen // Geometriae Dedicata. — 1994. — Vol. 50, iss. 1. — P. 15–25.
3. **Heppes, A.** Covering a rectangle with equal circles / A. Heppes, H. Melissen // Periodica Mathematica Hungarica. — 1997. — Vol. 34. — P. 65–81.
4. **Казаков, А. Л.** К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт, Д. С. Бухаров // Автоматика и телемеханика. — 2013. — Вып. 6. — С. 87–100.
5. **Десятов, В. Г.** Проектирование систем объектов общественного комплекса промышленных предприятий: учеб. пособие / В. Г. Десятов. — М. : МАРХИ, 1989. — 78 с.
6. **Препарата, Ф.** Вычислительная геометрия / Ф. Препарата, М. Шеймос. — М. : Мир, 1989. — 478 с.
7. **Демьянов, В. Ф.** Недифференцируемая оптимизация / В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев. — М. : Наука, 1981. — 384 с.
8. **Хаусдорф, Ф.** Теория множеств / Ф. Хаусдорф. — М. : Комкнига, 2006. — 304 с.
9. **Гаркави, А. Л.** О существовании наилучшей сети и наилучшего поперечника множества в банаховом пространстве / А. Л. Гаркави // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15, вып. 2. — С. 210–211.
10. **Гаркави, А. Л.** О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве / А. Л. Гаркави // Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат. — 1962. — Т. 26, вып. 1. — С. 87–106.
11. **Местецкий, Л. М.** Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры / Л. М. Местецкий. — М. : Физматлит, 2009. — 288 с.
12. **Брусов, В. С.** Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости / В. С. Брусов, С. А. Пиявский // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1971. — Т. 11, № 2. — С. 304–312.

13. **Лебедев, П. Д.** Алгоритмы наилучшей аппроксимации плоских множеств объединениями кругов / П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. — 2013. — Вып. 4. — С. 88–99.
14. **Ушаков, В. Н.** Алгоритмы построения оптимального покрытия множеств в трёхмерном евклидовом пространстве / В. Н. Ушаков, П. Д. Лебедев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 2. — С. 276–288.
15. **Ушаков, В. Н.** Алгоритмы оптимального покрытия множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$ / В. Н. Ушаков, П. Д. Лебедев // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. — 2016. — Т. 26, вып. 2. — С. 258–270.
16. **Пиявский, С. А.** Об оптимизации сетей / С. А. Пиявский // Изв. Акад. наук СССР. Техн. кибернетика. — 1968. — № 1. — С. 68–80.
17. **Тот, Л. Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве / Л. Ф. Тот. — М. : ГИФМЛ, 1958. — 365 с.

Поступила в редакцию 23.01.2019
После переработки 27.02.2019

Сведения об авторе

Лебедев Павел Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; старший научный сотрудник, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия; e-mail: pleb@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2019. Vol. 4, iss. 1. P. 5–17.

DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14101

ITERATIVE METHODS FOR APPROXIMATIONS CONSTRUCTING OF OPTIMAL COVERAGES FOR NONCONVEX PLANE SETS[1]

P.D. Lebedev

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia
pleb@yandex.ru

Algorithms are offered for the iterative constructing of the optimal coverages for nonconvex plane figures by sets of discs. Their basis are procedures for dividing a figure into areas of the influence of points that serve as the centers of elements of the initial packaging, and finding the Chebyshev centers of these zones. To generate the initial array of points, stochastic procedures are applied that use the synthesis of optimal hexagonal grids and random vectors.

Keywords: *optimal coverage, Chebyshev center, Voronoy diagram, Dirichlet zone, nonconvex polygon.*

References

1. **Kazakov A.L., Lebedev P.D.** Algorithms for constructing pptimal n-networks in metric spaces. *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, iss. 7, pp. 1290–1301.
2. **Melissen H.** Densest packings of eleven congruent circles in a circle. *Geometriae Dedicata*, 1994, vol. 50, iss. 1, pp. 15–25.
3. **Heppes A., Melissen H.** Covering a rectangle with equal circles. *Periodica Mathematica Hungarica*, 1997, vol. 34, pp. 65–81.
4. **Kazakov A.L., Lempert A.A., Bukharov D.S.** On segmenting logistical zones for servicing continuously developed consumers. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 6, pp. 968–977.
5. **Desyatov V.G.** *Proyektirovaniye sistem obyektov obshchestvennogo kompleksa promyshlennykh predpriyatiy* [Systems design for public service objects of industrial plants]. Moscow, Moscow Architecture Institute Publ., 1989. 78 p. (In Russ.).
6. **Preparata F.P., Shamos M.I.** *Computational Geometry: An Introduction.* New York, Springer-Verlag, 1988. 420 p.
7. **Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V.** *Nondifferentiable Optimization.* New York, Springer-Verlag, 1985. XVI+452 p.
8. **Hausdorff F.** *Teoriya mnozhestv* [Set theory]. Moscow, Komkniga Publ., 2006. 304 p. (In Russ.).
9. **Garkavi A.L.** O sushchestvovanii nailuchshey seti i nailuchshego poperechnika mnozhestva v banakhovom prostranstve [On the existence of an optimal network and a best diameter for a set in a Banach space]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Progress in mathematical sciences], 1960, vol. 15, no. 2, pp. 210–211. (In Russ.).

[1]The work is partially supported by grants 18-01-00221 and 18-31-00018_mol_a of Russian Foundation of Basic Research and by Act 211 of Government of the Russian Federation, contract 02.A03.21.0011.

10. **Garkavi A.L.** O nailuchshey seti i nailuchshem sechenii mnozhestv v normirovannom prostranstve [On an optimal network and optimal section of a set in a normed space]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* [News of USSR Academy of sciences. Series mathematical], 1962, vol. 26, no. 1, pp. 87–106. (In Russ.).
11. **Mestetskiy L.M.** *Nepreryvnaya morfologiya binarnykh izobrazheniy: figury, skelety, tsirkulyary* [Continuous morphology of binary images: figures, skeletons, circulars]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 288 p. (In Russ.).
12. **Brusov V.S., Piyavskii S.A.** A computational algorithm for optimally covering a plane region. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1971, vol. 11, iss. 2, pp. 17–27.
13. **Lebedev P.D., Uspenskii A.A., Ushakov V.N.** Algoritmy nailuchshey approksimatsii ploskikh mnozhestv obyedineniyami krugov [Algorithms of the best approximation for flat sets by unions of discs]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki* [Bulletin of Udmurt University. Mathematica. Mechanics. Computer Sciences], 2013, no. 4, pp. 88–99. (In Russ.).
14. **Ushakov V.N., Lebedev P.D.** Algorithms for the construction of an optimal cover for sets in three-dimensional Euclidean space. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, Suppl. 1, pp. S225–S237.
15. **Ushakov V.N., Lebedev P.D.** Algorithms of optimal set covering on the planar $\mathbb{R}^2$. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, iss. 2, pp. 258–270.
16. **Piyavskii S.A.** Ob optimizatsii setey [On optimization of networks]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika* [News of USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics], 1968, no. 1, pp. 68–80. (In Russ.).
17. **Tóth L.F.** *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum.* Berlin, Springer, 1953. 197 p.

Accepted article received 23.01.2019.
Corrections received 27.02.2019