ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 5 (144)

УДК 517.9

Г. Г. Тумашев

ЗАДАЧА О ПОСТРОЕНИИ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СКОРОСТИ

К семидесятилетию
Александра Петровича Нордена

В данной статье методы, развитые для решения обратных задач гидроаэромеханики [1], распространяются на случай двоякопериодической решетки, составленной из симметричных профилей и обтекаемых установившимся потенциальным потоком несжимаемой жидкости.

Заметим, что решение прямых задач для двоякопериодической решетки рассмотрено в книге Л. И. Седова [2].

Постановка задачи. Двоякопериодическая решетка с периодами ω_1 и $\omega_2 i$, составленная из профилей L_z, симметричных относительно прямых, параллельных осям x, y, обтекается установившимся потенциальным потоком несжимаемой жидкости. Считая поток симметричным относительно первой из прямых, найти форму профилей L_z с распределением модуля вектора скорости v, выраженным заданной функцией дуговой абсциссы s.

Пусть на L_z имеем

$$v = F(s), \tag{1}$$

где l — периметр, $F(s)$ — знакоположительная однозначная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера, которая может обратиться в нуль в точках $A(s=0)$ и $B(s=l/2)$, служащих точками разветвления и схода потока.

При сделанных предположениях функция $F(s)$ должна удовлетворять условиям

$$F(s) = F(l/2 - s) = F(l - s).$$

Для определенности величину v в середине отрезка оси симметрии, перпендикулярной x, соединяющего точки двух соседних профилей, будем считать равной единице.

Решение. Область течения в физической плоскости $z = x + iy$ обозначим через D_z, комплексный потенциал — через $W = \varphi + i\psi$. Для удобства один из профилей L_{z_0} будем считать основным и прямую, проходящую через точки A и B, примем за ось x.

Пусть на L_{z_0} функция тока равна нулю. Тогда легко видеть, что на прямых $y = \pm(n + 1/2)\omega_2$ функция тока принимает значения $\psi_n = \pm(n + 1/2)Q$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $Q = \operatorname{Im}[W(z + \omega_2 i) - W(z)]$. Потенциал скорости на L_{z_0} вычисляется по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^s F(s)\,ds \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant l/2,$$

$$\varphi = \varphi_0 + L - \int_{l/2}^{s} F(s)\, ds \quad \text{при } l/2 \leqslant s \leqslant l, \tag{2}$$

где φ_0 — потенциал скорости в точке A,

$$L = \int_0^{l/2} F(s)\, ds.$$

Введем обозначение $P = \operatorname{Re}[W(z+\omega_1) - W(z)]$. Очевидно, области D_z соответствует область D_W — вся плоскость W с параллельными разрезами длины L, образующими двоякопериодическую решетку из прямолинейных отрезков с заданными периодами P и Qi. Берегам разрезов, проведенных по этим отрезкам, в плоскости z соответствуют „верхняя" и „нижняя" поверхности искомых профилей (контуров). Легко видеть, что сопряженная скорость $\frac{dW}{dz}$ в области D_W является функцией двоякопериодической и на берегах разреза известен ее модуль.

Выделим теперь прямоугольник с вершинами в точках $a(-P/2, 0)$, $b(P/2, 0)$, $c(P/2, Q/2)$, $d(-P/2, Q/2)$. Величину φ_0 в формуле (2) выберем так, чтобы концы разреза находились в точках $A\left(-\frac{L}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{L}{2}, 0\right)$. Введем вспомогательную функцию $\chi = \ln(dW/dz)$. На отрезке AB известна вещественная часть этой функции, а на остальной части границы прямоугольной области мнимая часть равна нулю.

Таким образом, определение вспомогательной функции приводится к решению смешанной краевой задачи. Формулы для решения такого рода задач можно найти в указанной выше книге Л. И. Седова [2]. В данном случае мы выберем другой метод решения, более удобный с точки зрения выполнения числовых расчетов.

Отобразим внутренность прямоугольника $abcda$ на верхнюю полуплоскость переменного $t = t' + it''$ с помощью функции

$$W = c \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{3}$$

Величины k^2, K могут быть согласно [3] определены по значению $q = e^{-\pi Q/P}$. Множитель c находится по формуле $P = 2cK(k^2)$.

Обозначим через $\varphi_1 = \varphi_0$, φ_2 значения потенциала скорости в точках A и B, а через t_1, t_2 — соответствующие им точки на оси t'. Пользуясь выражением t через W, записываемым с помощью функции Якоби $t = sn(W/c, k)$, будем иметь

$$t_1 = sn\left(-\frac{L}{2}, k\right), \quad t_2 = sn\left(\frac{L}{2}, k\right).$$

На отрезке (t_1, t_2), являющимся образом верхней половины контура L_{z_0}, с помощью равенств (1)—(3) $\operatorname{Re}\chi = \ln v$ легко можно выразить через t. Вне этого отрезка $\operatorname{Im}\chi = 0$.

Осуществим теперь аналитическое продолжение χ через участки $-\infty$, t_1 и t_2, ∞ вещественной оси на нижнюю полуплоскость. Зна-

ения продолженной функции будут комплексно-сопряженными в точках t, $\bar{t}$.

Отобразим плоскость t с разрезом по отрезку (t_1, t_2) на внешность круга единичного радиуса в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ с помощью функции

$$\zeta = t/|t_1| + \sqrt{t^2/t_1^2 - 1}.$$

Точкам A и B соответствуют значения $\zeta = -1$, $\zeta = 1$. Таким образом, определение функции χ приводится к нахождению регулярной в области $|\zeta| > 1$ функции по значению ее действительной части на $|\zeta| = 1$.

Как было указано выше, в точках A и B скорость может принимать нулевые значения.

Положим, что $\lim \frac{v}{s} = T$ при $s \to 0$, где T — некоторая конечная величина. Известно [1], что точка A тогда будет обыкновенной. Точка $\zeta = -1$ также является обыкновенной. Следовательно, вводя полярную координату θ, можно показать, что

$$\lim\left(v : \left|\sin\frac{\pi - \theta}{2}\right|\right) = T_1 \quad \text{при} \quad \theta \to \pi.$$

Аналогично, для точки B будем иметь

$$\lim\left(v : \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right) = T_2 \quad \text{при} \quad \theta \to 0.$$

Легко убедиться в справедливости равенств при $|\zeta| = 1$:

$$\left|1 - \frac{1}{\zeta}\right| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|, \quad \left|1 + \frac{1}{\zeta}\right| = 2\left|\sin\frac{\pi - \theta}{2}\right|.$$

Следовательно, функция $\vartheta = \chi - \ln(1 - 1/\zeta^2)$ будет ограниченной во всей области $|\zeta| \geqslant 1$. Она может быть определена по формуле Шварца

$$\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\theta)\,\frac{\zeta + e^{\theta i}}{\zeta - e^{\theta i}}\,d\theta, \tag{4}$$

где $\sigma(\theta)$ — значение вещественной части ϑ на окружности $|\zeta| = 1$, причем $\sigma(\theta) = \sigma(-\theta) = \sigma(\pi - \theta)$.

Для χ получаем

$$\chi = \ln\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sigma(\theta)\,\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - 2\zeta\cos\theta + 1}\,d\theta \tag{5}$$

или

$$\chi = \ln\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sigma(\theta)(\zeta^2 - 1)^2\,d\theta}{(\zeta^2 - 2\zeta\cos\theta + 1)(\zeta^2 + 2\zeta\cos\theta + 1)}.$$

Функция, отображающая область $|\zeta| \geqslant 1$ на один период решетки в плоскости z, запишется как

$$z = \int_{-1}^{\zeta} e^{-\chi}\,\frac{dW}{d\zeta}\,d\zeta. \tag{6}$$

Подставив в правую часть (6) выражение $dW/d\zeta$, получаемое из равенств (3), (5), найдем

$$z = \int_{-1}^{\zeta} \Phi(\zeta)\, d\zeta,$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{c\,|t_1|}{2} \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sigma(\theta)\, \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - 2\zeta\cos\theta + 1}\, d\theta\right) :$$

$$: \sqrt{\left[1 - \frac{t_1^2}{4}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2\right]\left[1 - \frac{k^2 t_1^2}{4}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2\right]}.$$

Уравнение контура L_z получается при выполнении интегрирования по окружности $|\zeta| = 1$. При условиях, наложенных на функцию $F(s)$, L_z будет всегда контуром замкнутым.

Перейдем к нахождению периодов ω_1, $\omega_2 i$ решетки. Заметим, что точкам a, b, c прямоугольной области D_W в плоскости ζ соответствуют точки

$$\xi_1 = -\xi_2 = -\frac{1}{|t_1|} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}, \quad \xi_3 = -\frac{1}{k\,|t_1|} + \sqrt{\frac{1}{k^2 t_1^2} - 1}.$$

Производя интегрирование в правой части (6) в области $|\zeta| \geqslant 1$ по линиям, соединяющим точки ξ_1, ξ_2 и ξ_2, ξ_3, получим

$$\omega_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Phi(\zeta)\, d\zeta, \quad \omega_2 = \int_{\xi_2}^{\xi_3} \Phi(\zeta)\, d\zeta.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Изд. Казанск. ун-та, 1964.

2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., „Наука“, 1965.

3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., „Наука“, 1973.

г. Казань

Поступила
12 II 1974