ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 9 (232)

В. А. Золотаревский УДК 517.968

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Данное сообщение является продолжением работы [1]. Здесь приводится обоснование метода моментов для сингулярных интегральных уравнений (с. и. у.) в случае, когда коэффициенты уравнений являются оператор-функциями, удовлетворяющими условию Гельдера на единичной окружности Γ_0. Всюду в дальнейшем будем придерживаться результатов и обозначений из [1], [2].

1. *Вычислительная схема метода моментов.* В банаховом пространстве $\mathfrak{B}_\beta(\Gamma_0)$ рассмотрим с. и. у.

$$(I+T_1(\zeta))(P\varphi)(\zeta)+(I+T_2(\zeta))(Q\varphi)(\zeta)=f(\zeta)\quad(\zeta\in\Gamma_0),\tag{1}$$

где I—единичный оператор, $T_1(\zeta)$ и $T_2(\zeta)$—оператор-функции со значениями в $H_\alpha(\gamma)$, $f(\zeta)\in\mathfrak{B}_\alpha(\Gamma_0)$ и $\varphi(\zeta)$—неизвестная вектор-функция из $\mathfrak{B}_\alpha(\Gamma_0)$ $(0<\beta<\alpha\leqslant 1)$. Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\varphi_n(\zeta)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\zeta^k,\tag{2}$$

где α_k $(k=\overline{-n,n})$—неизвестные векторы бесконечномерного банахова пространства $\mathfrak{B}$. Согласно методу моментов коэффициенты α_k $(k=\overline{-n,n})$ найдем из следующей системы линейных операторных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n}A_{j-k}\alpha_k+\sum_{k=-n}^{-1}B_{j-k}\alpha_k=f_j\quad(j=\overline{-n,n}),\tag{3}$$

где $\{A_j\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{B_j\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{f_j\}_{-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье соответственно оператор-функций $I+T_1(\zeta)$, $I+T_2(\zeta)$ и вектор-функции $f(\zeta)$.

Теорема. *Пусть оператор-функции $T_1(\zeta)$ и $T_2(\zeta)$ принадлежат $H_\alpha(\gamma)$ и при каждом $\zeta\in\Gamma_0$ операторы $A(\zeta)=I+T_1(\zeta)$ и $B(\zeta)=I+T_2(\zeta)$ обратимы. Если выполняются следующие условия: 1) левые частные индексы оператор-функции $A(\zeta)$ равны нулю; 2) правые частные индексы оператор-функций $B(\zeta)$ и $B^{-1}(\zeta)A(\zeta)$ равны нулю, то при n таких, что выполняется неравенство $\mu_1 n^{\beta-\alpha}\ln^4 n\leqslant q<1$, система уравнений (3) имеет единственное решение α_k $(k=\overline{-n,n})$, а вектор-функции (2) сходятся при $n\to\infty$ по норме пространства $\mathfrak{B}_\beta(\Gamma_0)$ $(0<\beta<\alpha)$ к решению $\varphi(\zeta)$ уравнения (1) со скоростью*

$$\|\varphi-\varphi_n\|_\beta\leqslant(\mu_2+\mu_3\ln^3 n)\,n^{\beta-\alpha}H(\varphi;\alpha).\tag{4}$$

2. *Вспомогательные предложения.* Прежде чем доказать теорему установим несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть $T(\zeta)\in H_\alpha(\gamma)$ и при каждом $\zeta\in\Gamma_0$ оператор $I+T(\zeta)$ обратим. Если левые и правые частные индексы оператор-функции $I+T(\zeta)$ равны нулю, то при n таких, что $\mu_4 n^{\beta-\alpha}\ln n\leqslant q_1<1$, операторы $S_nQ(I+T)QS_n$ обратимы в $S_n\mathfrak{B}_\beta(\Gamma_0)\,(\equiv X_n)$ и $\|[S_nQ(I+T)QS_n]^{-1}\|_{X_n}<\mu_5\ln n$ *.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 1 из [1].

* В X_n введена та же норма, что и в $\mathfrak{B}_\beta(\Gamma_0)$.

Лемма 2. *Пусть* $K_1^+(\zeta)$ *и* $K_2^+(\zeta)$*—оператор-функции из* $H_\alpha^+(\gamma)$, *а* $K_1^-(\zeta)$ *и* $K_2^-(\zeta)$*—оператор-функции из* $H_\alpha^-(\gamma)$. *Если при каждом* $\zeta\in\Gamma_0$ *оператор-функции* $I+K_1^\pm(\zeta)$, $I+K_2^\pm(\zeta)$ *обратимы и* $(I+K_{1,2}^\pm(\zeta))^{-1}-I\in H_\alpha^\pm(\gamma)$, *то при n таких, что*

$$\mu_6 n^{\beta-\alpha}\ln n\leqslant q_2<1, \tag{5}$$

оператор $L_n=S_n\{[(I+K_1^+)P+(I+K_1^-)Q]\;[P(I+K_2^-)+Q(I+K_2^+)]\}S_n$ *обратим в* X_n *и*

$$\|L_n^{-1}\|_{X_n}\leqslant\mu_7\ln^2 n. \tag{6}$$

Доказательство. Легко проверить, что $L_n=S_n[P(I+K_1^+)P+$ $+Q(I+K_1^-)Q]S_n$. Из условий леммы следует, что левые и правые частные индексы оператор-функций $I+K_1^\pm(\zeta)$, $I+K_2^\pm(\zeta)$ равны нулю. Тогда в силу теоремы 1 из [1] и леммы 1, операторы $S_nP(I+K_1^+)PS_n$, $S_nP(I+K_2^-)LS_n$, $S_nQ(I+K_1^-)QS_n$ и $S_nQ(I+K_2^+)QS_n$, начиная с n таких, что выполняется (5), обратимы в X_n, причем все нормы обратных операторов ограничены числом $\mu_8\ln n$. Далее, учитывая соотношения $PQ=QP=0$, $\operatorname{Im}P\dotplus\operatorname{Im}Q\doteq\mathfrak{B}_\beta(\Gamma_0)$ и то, что операторы S_n и P, а также S_n и Q перестановочны, заключаем, что, начиная с n таких, что выполняется (5), операторы $R_{1n}=S_n[P(I+K_1^+)P+Q(I+K_1^-)Q]S_n$ и $R_{2n}=S_n[P(I+K_2^-)P+Q(I+K_2^+)Q]S_n$ обратимы в X_n, причем

$$R_{1n}^{-1}=(S_nP(I+K_1^+)PS_n)^{-1}+(S_nQ(I+K_1^-)QS_n)^{-1},$$

$$R_{2n}^{-1}=(S_nP(I+K_2^-)PS_n)^{-1}+(S_nQ(I+K_2^+)QS_n)^{-1}$$

и $\|R_{1n}^{-1}\|_{X_n}\leqslant 2\cdot\mu_8\ln n$, $\|R_{2n}^{-1}\|_{X_n}\leqslant 2\cdot\mu_8\ln n$.

Следовательно, оператор L_n при n таких, что выполняется неравенство (5), обратим в X_n и выполняется неравенство (6). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $C(\zeta)\in H_\alpha(\gamma)$, *а* $\psi(\zeta)\in\mathfrak{B}_\beta(\Gamma_0)$ $(0<\beta\leqslant\alpha)$, *тогда* $(QCP)\psi(\zeta)$ *и* $(PCQ)\psi(\zeta)\in\mathfrak{B}_\alpha(\Gamma_0)$ *и* $H(QCP\psi;\,\alpha)\leqslant\mu_9H(\psi;\,\beta)$, $H(PCQ\psi;\,\alpha)\leqslant\mu_9H(\psi;\,\beta)$.

Доказательство этой леммы проводится так же, как и доказательство леммы 2.1 из [3] (см. также лемму 1 из [4]).

3. *Обоснование метода моментов.* Перейдем к доказательству теоремы из п. 1. Пусть $A(\zeta)=(I+T_1^+(\zeta))(I+T_1^-(\zeta))$ и $B(\zeta)=(I+T_2^-(\zeta))(I+T_2^+(\zeta))$— соответственно левая и правая вполне правильные факторизации оператор-функций $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$. Тогда, как легко проверить, $(M\equiv)AP+BQ=L+G$, где $L=[(I+T_1^+)P+(I+T_2^-)Q][P(I+T_1^-)+Q(I+T_2^+)]$, $G=(I+T_1^+)Q(I+T_1^-)P+$ $+(I+T_2^-)P(I+T_2^+)Q$. Отметим, что в силу [5] оператор L обратим в $\mathfrak{B}_\beta(\Gamma_0)$, причем $(L^{-1}\psi)(\zeta)\in\mathfrak{B}_\alpha(\Gamma_0)$ для любой вектор-функции $\psi(\zeta)\in\mathfrak{B}_\alpha(\Gamma_0)$. В силу леммы 2 при n таких, что выполняется неравенство (5), оператор S_nLS_n обратим в X_n и

$$\|(S_nLS_n)^{-1}\|_{X_n}\leqslant\mu_{10}\ln^2 n. \tag{7}$$

Далее, для любой вектор-функции $\psi_n(\zeta)\in X_n$, как легко проверить, справедливо равенство $S_nMS_n\psi_n=(S_nLS_n)[(I+L^{-1}G)+L_{1n}]\psi_n$, где $L_{1n}=[(S_nLS_n)^{-1}S_n-$ $-S_nL^{-1}]GS_n$. Оценим нормы $\gamma_n=\|L_{1n}\psi_n\|_{X_n}$ в силу неравенств (7), а также 2 и 3 п. 3° из [1]:

$$\gamma_n\leqslant\mu_{10}\ln^2 n\cdot\|S_nG\psi_n-S_nLS_nL^{-1}G\psi_n\|_{X_n}=\mu_{10}\ln^2 n\cdot\|S_nL(P_n+Q_n)L^{-1}G\psi_n\|_{X_n}\leqslant$$

$$\leqslant\mu_{11}n^{\beta-\alpha}\ln^4 nH(L^{-1}G\psi_n;\,\alpha)\leqslant\mu_{12}n^{\beta-\alpha}\ln^4 nH(G\psi_n;\,\alpha).$$

В силу леммы 3 $H(G\psi_n; \alpha) \leqslant \mu_{13} H(\psi_n; \beta)$. Следовательно, $\eta_n \leqslant \mu_{14} n^{\beta-\alpha} \ln^4 n \|\psi_n\|_{X_n}$. Отсюда, в силу того, что оператор $I + L^{-1}G$ обратим ([5]) в $\mathfrak{B}_\beta(\Gamma_0)$, следует (см. [6], с. 157), что при n таких, что

$$\mu_{14} n^{\beta-\alpha} \ln^4 n \leqslant q_3 < 1, \tag{8}$$

оператор $L_{2n} = (I + L^{-1}G) + L_{1n}$ обратим в X_n, причем

$$\| L_{2n}^{-1} \|_{X_n} \leqslant \mu_{15} \| I + L^{-1}G \|_\beta. \tag{9}$$

Тогда, начиная с n таких, что выполняются неравенства (5) и (8), оператор $S_n M S_n$ обратим в X_n, причем в силу (7) и (9)

$$\| (S_n M S_n)^{-1} \|_{X_n} \leqslant \mu_{16} \ln^2 n. \tag{10}$$

Тем самым уравнение $S_n M S_n \varphi_n = S_n f$, а следовательно, и система (3) имеют при n таких, что $q = \max(q_1; q_2; q_3) < 1$, единственное решение, соответственно φ_n и α_k $(k = \overline{-n, n})$.

Пусть теперь $\varphi(t)$—единственное решение (см. [5]) уравнения (1), а $t_n^0(\zeta)$ $(\in X_n)$—полиномиальная вектор-функция, для которой $\max\limits_{\zeta \in \Gamma_0} \| \varphi(\zeta) - t_n^0(\zeta) \|_{\mathfrak{B}} = \inf\limits_{t_n \in X_n} \max\limits_{\zeta \in \Gamma_0} \| \varphi(\zeta) - t_n(\zeta) \|_{\mathfrak{B}}$. Повторяя соответствующие рассуждения из работ [7]—[9], можно показать, что

$$\| \varphi - t_n^0 \|_\beta \leqslant \mu_{17} n^{\beta-\alpha} H(\varphi; \alpha). \tag{11}$$

Далее, легко проверить, что $S_n M S_n (\varphi_n - t_n^0) = S_n M (\varphi - t_n^0)$. Поэтому в силу неравенств (10), неравенства 3 п. 3° из [1] и (11) имеем $\| \varphi_n - t_n^0 \|_\beta \leqslant \mu_{18} n^{\beta-\alpha} \ln^3 n H(\varphi; \alpha)$. Но тогда из неравенства $\| \varphi - \varphi_n \|_\beta \leqslant \| \varphi - t_n^0 \|_\beta + \| \varphi_n - t_n^0 \|_\beta$ следует неравенство (4). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотаревский В. А. О методе редукции для уравнений Винера—Хопфа с операторными коэффициентами.—Изв. вузов. Матем., 1978, № 3, с. 112—115.
2. Будяну М. С. Одна теорема о факторизации оператор-функций.—Изв. АН МолдССР, 1965, № 7, с. 22—32.
3. Золотаревский В. А. Решение сингулярных интегральных уравнений методом редукции.—В сб.: Матем. исследования. Кишинев, 1974, т. 9, вып. 2, с. 38—52.
4. Габдулхаев Б. Г., Горлов В. Е. Решение нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом редукции.—Изв. вузов. Матем., 1976, № 2, с. 3—13.
5. Будяну М. С. Некоторые вопросы факторизации матриц-функций и оператор-функций. — Кандид. диссерт., Кишинев, 1966.
6. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.—2-е изд.—М., 1965.—519 с.
7. Габдулхаев Б. Г. Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов.—Учен. зап. Казан. ун-та, 1967, т. 127, кн. 1, с. 54—74.
8. Золотаревский В. А. О сходимости коллокационного метода для систем сингулярных интегральных уравнений.—В сб.: Матем. исследования. Кишинев, 1974, т. 9, вып. 1, с. 56—69.
9. Габдулхаев Б. Г. Аппроксимация в H-пространствах и приложения.—ДАН СССР, 1975, т. 223, № 6, с. 1293—1296.

г. Кишинев

Поступила
16 IV 1979