Можно считать, таким образом, что при увеличении T_1 за пределы исследованного численно интервала в первую очередь будет изменяться только скважность процесса – вспышки будут разделены все возрастающими интервалами времени $\Delta t \approx T_1$.

Физический институт им П.Н. Лебедева
Академии наук СССР
Москва

Поступило
19 I 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимирский К.В., Норвайшас А.А.* – ДАН, 1990, т. 310, № 4, с. 853. 2. *Владимирский К.В., Норвайшас А.А.* – ДАН, 1984, т. 275, № 4, с. 860; т. 278, № 5, с. 1106; 1987, т. 296, № 3, с. 579. 3. *Владимирский К.В.* – Крат. сообщ. по физике ФИАН, 1971, № 10, с. 41; 1972, № 3, с. 47. 4. *Bloch F.* – Phys. Rev., 1946, vol. 70, p. 460. 5. *Casperson L.W.* – IEEE J. Quant. Electron., 1978, vol. QE-14, № 70, p. 756. 6. *Casperson L.W.* – J. Opt. Soc. Amer., 1985, vol. 2B, p. 62; Ibid., p. 73. 7. *Bandy D.K., Narducci L.M., Lugiato L.A., Abragam N.B.* – J. Opt. Soc. Amer., 1985, vol. 2B, p. 56. 8. *Swift J.W., Wiesenfeld K.* – Phys. Rev. Lett., 1984, vol. 52, № 9, p. 705. 9. *Владимирский К.В.* – ЖЭТФ, 1957, т, 33 с. 532. 10. *Vladimirsky K.V.* – Nucl. Instr., 1957, vol. 1, p. 329. 11. *Bloom S.* – J. Appl. Phys., 1957, vol. 28, p. 800.

УДК 621.385.6; 631.372.413 ФИЗИКА

© **Академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ**

МОРСОВСКИЕ КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Целью данной статьи является анализ дисперсионных уравнений (ДУ) вблизи морсовской критической точки междутиповых плазменных и штарковских колебаний в полупроводниках со сверхрешеткой, а также доказательство существования морсовских точек в ДУ для открытых резонаторов (ОР) с материальными включениями и объяснение возникновения междутиповых колебаний за счет вариации диэлектрической проницаемости среды. Кроме того, здесь обсуждается на примере открытых волноводных резонаторов (ОВР) проблема классификации колебаний с учетом междутиповых ситуаций.

1. Покажем, что в полупроводниках со сверхрешеткой существуют междутиповые плазменные и штарковские колебания: их возникновение связано с морсовскими критическими точками ДУ.

Из уравнений Максвелла для потенциальных колебаний сверхрешетки и зависимости всех переменных как $e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$ в классическом приближении ($\Delta \gg \hbar\Omega$, $\hbar\nu$, где Δ – ширина минизоны СР, $\Omega = eE_0 d/\hbar$ – штарковская частота, E_0 – приложенное вдоль оси СР постоянное электрическое поле) и высокочастотном случае ($\Omega^2/\omega\nu \gg 1$ и $\nu/\omega \ll 1$, где ν – частота релаксации) получаем ДУ, описывающие потенциальные колебания в сверхрешетке [1],

$$(1) \qquad \left[\omega^2\left(1 + \frac{k_z^2}{k_\perp^2}\right) - \frac{\omega_0^2}{\epsilon_0}\right](\omega^2 - \Omega^2) + i\,\frac{k_z^2}{k_\perp^2}\,\frac{4\pi\sigma_0^2\Omega^2\omega}{\epsilon_0} = 0,$$

где $\mathbf{k}(k_x, k_y, k_z)$; $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$ – волновой вектор, ω_0 – плазменная частота, в которую входит эффективная масса, связанная с движением электрона поперек

оси СР; ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость полупроводника;

$$\sigma_0 = \sigma \frac{\nu^2}{\Omega^2 + \nu^2}; \qquad \sigma = \frac{e^2 m \Delta^2 d}{2\pi\nu\hbar^4}\left(1 - \exp\left(\frac{-\pi d\hbar^2}{mT}\right)\right);$$

d – период СР; e, m – заряд и масса электрона. Запишем (1) в безразмерной форме, для чего введем

$$z = \omega\sqrt{\epsilon_0}/\omega_0, \quad w = \Omega\sqrt{\epsilon_0}/\omega_0, \quad \alpha^2 = k_z^2/k_\perp^2, \quad \beta^2 = 4\pi\sigma\nu^2\sqrt{\epsilon_0}/\omega_0^3.$$

Теперь вместо (1) имеем

$$(2) \qquad [z^2(1+\alpha^2) - 1](z^2 - w^2) + i\alpha^2\beta^2 z = 0.$$

Как видно из (2), при $\alpha = 0$ оно редуцируется к двум независимым уравнениям $z^2 - 1 = 0$ и $z^2 - w^2 = 0$, описывающим соответственно плазменные и штарковские потенциальные колебания. Тогда $\alpha^2 \ll 1$ играет роль параметра связи этих колебаний. Таким образом, при $w = 1\,(\Omega = \omega_0/\sqrt{\epsilon_0})$ и $\alpha^2 \neq 0$ в СР возникают связанные (междутиповые) плазменно-штарковские потенциальные колебания, одно из которых является неустойчивым.

Представим принципиально новый подход в исследовании ДУ (2) (позволяющий, в частности, дать строгую теорию междутипового плазменно-штарковского эффекта), основанный на использовании теории критических точек комплексно-аналитических функций многих переменных [2]. Его идея состоит в том, что левая часть (2) рассматривается как комплексно-аналитическая функция z, w, α, β и исследуется ее поведение в окрестности критических точек.

Рассмотрим семейство функций двух переменных z и w, зависящих от двух параметров α и β; определяется левой частью (2):

$$(3) \qquad \mathcal{F}(z, w) = [z^2(1+\alpha^2) - 1](z^2 - w^2) + i\alpha^2\beta^2 z.$$

Видно, что $\mathcal{F}(z, w)$ – комплексно-аналитическая функция с областью определения $C^2 = C \times C$ и областью значений в C. Заметим, что "физическая область" изменения переменной w – действительная ось; однако мы рассматриваем w как комплексную величину, т.е. делаем аналитическое продолжение из "физической области" изменения w в C. Известно [2], что критические точки (z_0, w_0) функции $\mathcal{F}(z, w)$ определяются как решения системы уравнений $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial z} = 0$ и $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial w} = 0$, из которых для физически интересных приложений находим

$$(4) \qquad z_0^{\pm} = \pm(1+\alpha^2)^{-1/2}; \quad w_0^{\pm} = (1+\alpha^2)^{-1}[1 \pm i\alpha^2\beta^2(1+\alpha^2)^{1/2}].$$

Таким образом, ДУ (2) имеет четыре критические точки (z_0^+, w_0^+), $(z_0^+, -w_0^+)$, (z_0^-, w_0^-), $(z_0^-, -w_0^-)$.

Вторые частные производные $\mathcal{F}(z, w)$ в точках $(z_0^{\pm}, \pm w_0^{\pm})$ таковы, что $\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial z^2}\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial w^2} - \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial z\,\partial w} \neq 0$ и $\mathcal{F}(z_0^{\pm}, \pm w_0^{\pm}) \neq 0$. Следовательно, эти точки – невырожденные морсовские критические точки. Поэтому в малой окрестности этих точек ДУ (2) [3, 4] редуцируется к квадратному уравнению относительно z. Для критической точки (z_0^+, w_0^+) при $\alpha^2 \ll 1$ оно имеет вид

$$(5) \qquad i\alpha^2\beta^2 z_0^+ + (4 - i\cdot\alpha^2\beta^2/z_0^+)(z - z_0^+)^2 + 4z_0^+ w_0^+(1+\alpha^2)(z - z_0^+)(w - w_0^+) = 0.$$

Из (5) находим два корня:

$$(6)\qquad z^{\pm} = z_0^{+} + \left(4 - i\frac{\alpha^2\beta^2}{2z_0^{+}}\right)^{-1}\left\{2z_0^{+}w_0^{+}(1+\alpha^2)(w - w_0^{+}) \pm\right.$$

$$\left.\pm\left[4z_0^{+2}w_0^{+2}(1+\alpha^2)(w-w_0^{+})^2 - i\alpha^2\beta^2 z_0^{+}\left(4 - i\frac{\alpha^2\beta^2}{2z_0^{+}}\right)\right]^{1/2}\right\}.$$

Анализируя (6), можно показать, что один из корней имеет $\mathrm{Im}z^{-} > 0$ $(\mathrm{Im}z^{+} < 0)$, т.е. ему отвечают неустойчивые колебания сверхрешетки. При этом максимальное (минимальное) значение $\mathrm{Im}z^{-}(\mathrm{Im}z^{+})$ как функции w достигается при $w = \mathrm{Re}w_0^{+}$. Если перейти к размерным величинам, то это условие запишется в виде

$$\Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\epsilon_0}}\left\{\frac{1}{2}(1+\alpha^2)^{-1}\left[1 + \left(1 + \frac{1}{4}\alpha^4\beta^4(1+\alpha^2)\right)^{1/2}\right]\right\}^{1/2} \approx$$

$$\approx \frac{\omega_0}{\sqrt{\epsilon_0}}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Таким образом, в окрестности морсовской критической точки (z_0^{+}, w_0^{+}) существует ровно два решения ДУ (2). При этом одному из них соответствует неустойчивое потенциальное колебание сверхрешетки. Максимальное значение инкремента колебания достигается при $w = \mathrm{Re}\, w_0^{+}$.

Из (6) также следует, что в окрестности $\mathrm{Re}w_0^{+}$ графики функций $\mathrm{Re}z^{\pm}(w)$ аналогичны графику Вина [3, 4] для частот связи линейных колебаний системы с двумя степенями свободы. Анализ этих графиков показывает, что при $w \ll \mathrm{Re}w_0^{+}$ частотам $\mathrm{Re}z^{+}$ и $\mathrm{Re}z^{-}$ отвечают плазменные и штарковские колебания. Причем штарковские колебания являются неустойчивыми. При $w \to \mathrm{Re}w_0^{+}$ инкремент нарастания штарковского колебания увеличивается, а инкремент затухания плазменного колебания уменьшается, и при $w = \mathrm{Re}w_0^{+}$ достигается экстремальное значение соответствующих инкрементов. Дальнейшее увеличение $w > \mathrm{Re}w_0^{+}$ приводит к раскачке колебаний с частотой, близкой к плазменной, и затуханию колебаний с частотой, близкой к штарковской. Другими словами, при переходе через точку $\mathrm{Re}w_0^{+}$ колебания обмениваются типами, а в малой окрестности $\mathrm{Re}w_0^{+}$ существуют междутиповые плазменно-штарковские колебания.

2. Рассмотрим задачу о возникновении междутиповых колебаний в ОР с различными материальными включениями. Как известно [3, 4], аналогичная проблема изучена для свободного ОР и показано, что в конфокальном случае малые изменения геометрии ОР приводят к резкому всплеску добротности междутиповых колебаний. Этот эффект обусловлен существованием морсовской точки ДУ свободного ОР.

Если в ОР расположена двухслойная среда с $\epsilon_1 = 1$ и $\epsilon_2 = \epsilon$, то малое изменение ϵ существенно меняет зависимость собственной частоты (a – радиус зеркала ОР; $k = \omega/c$; ω – частота; c – скорость света в свободном пространстве) от ϵ и приводит к междутиповой связи собственных симметричных колебаний $H_{03} \rightleftarrows H_{41}$. Для $0{,}75 < \epsilon < 1{,}75$ и $1 < \epsilon < 1{,}8$ (конфокальная геометрия ОР) колебания, возбуждаемые плоской волной на соответствующих резонансных частотах, имеют структуру электромагнитных полей, отвечающих как H_{03}-, так и H_{41}-колебаниями. Междутиповые H_{03}- и H_{41}-колебания образуют типичные график Вина.

Интересной особенностью исследуемого ОР является существование в нем таких несимметричных H_{02}- и H_{21}-колебаний, для которых спектральные кривые,

соответствующие собственным частотам, графиков Вина не образуют и междутиповых колебаний при этом не происходит.

Кроме того, для междутиповых колебаний при $H_{41} \to H_{03}$ добротность резко возрастает, а при $H_{03} \to H_{41}$ падает. Для H_{02}- и H_{21}-колебаний добротность только растет.

Все эти и другие, не приведенные здесь данные получены в результате вычислений на ЭВМ строгих ДУ исследуемого ОР.

Проведем анализ этих же колебаний ОР с помощью морсовских критических точек. Согласно [5, 6], ДУ для этой структуры имеет вид $\det\{I - A(k, \epsilon, \ldots)\} = 0$, где $A(k, \epsilon, \ldots)$ – ядерная, конечно-мероморфная оператор-функция. Пусть $\mathcal{F}(k, \epsilon) = \det\{I - A(k, \epsilon)\}$: $\Lambda_0 \times C^1 \to C^1$, где Λ_0 – "физический" лист римановой Λ поверхности аналитического продолжения уравнений Гельмгольца в свободном пространстве (решение спектральной задачи связано с нахождением $k \in \Lambda$); C^1 – комплексная плоскость; $\overset{\circ}{C}{}^1$ – проколотая комплексная плоскость.

Критическая морсовская точка определяется из решения функциональных уравнений вида

$$\left.\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial k}\right|_{k_0 \epsilon_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon}\right|_{k_0 \epsilon_0} = 0, \quad \left.\left\{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial k^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \epsilon^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial k\, \partial \epsilon}\right\}\right|_{k_0 \epsilon_0} \neq 0.$$

При этом различаются два случая: морсовская точка невырождена при $\mathcal{F}(k_0, \epsilon_0) \neq 0$ и вырождена при $\mathcal{F}(k_0, \epsilon_0) = 0$.

В первом случае, т.е. при наличии $H_{03} \rightleftarrows H_{41}$ междутиповых колебаний, морсовская точка имеет следующие значения: $(ka)_0 = 10{,}0238 - i \cdot 0{,}0126$ и $\epsilon_0 = 1{,}3877 + i \cdot 0{,}0493$. Для этой точки $\mathcal{F}(k_0, \epsilon_0) \neq 0$, т.е. морсовская точка невырождена и для нее известным способом [3, 4] можно построить график Вина.

Во втором случае несимметричных H_{02}- и H_{21}-колебаний морсовская точка будет при $(ka)_0 = 6{,}7013 - i \cdot 0{,}001$; $\epsilon_0 = 1{,}15989 - i \cdot 0{,}00024$ и $\mathcal{F}(k_0, \epsilon_0) = 0$, т.е. она вырождена. Раскладывая $\mathcal{F}(k, \epsilon)$ в окрестности вырожденной морсовской точки (k_0, ϵ_0) с точностью до кубически малых членов $(k - k_0)^n(\epsilon - \epsilon_0)^m$, где $n + m = 3$, получаем

$$\alpha(k - k_0)^2 + 2\beta(k - k_0)(\epsilon - \epsilon_0) + \gamma(\epsilon - \epsilon_0)^2 = 0,$$

где

$$\alpha = 28{,}1859 - i \cdot 11{,}1805, \quad \beta = 29{,}8670 - i \cdot 11{,}8721, \quad \gamma = 26{,}6460 - i \cdot 10{,}8052.$$

Из этого уравнения находим, что $k - k_0 = -\alpha^{-1}[\beta - (\beta^2 - \alpha\gamma)^{1/2}](\epsilon - \epsilon_0)$. Видно, что в окрестности морсовской точки прямые линии аппроксимируют спектральные кривые, полученные вычислениями на ЭВМ точного ДУ для ОР.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что впервые удалось доказать, что возникновение междутиповых колебаний в ОР можно организовать за счет изменения характеристик среды, частично заполняющей объем резонатора (простое описание этого процесса производится с помощью невырожденной критической морсовской точки ДУ). Кроме того, также впервые изучены колебания ОР вблизи вырожденной морсовской точки ДУ.

3. Существование морсовских точек в ДУ приводит к принципиальному изменению установившейся классификации электромагнитных колебаний ОР. Для их однозначного определения в произвольных точках спектра воспользуемся фурье-анализом соответствующей краевой задачи и представлениями о междутиповых колебаниях.

Предлагаемый способ классификации колебаний проведем на примере ОВР, образованного скачкообразным расширением круглого металлического волновода

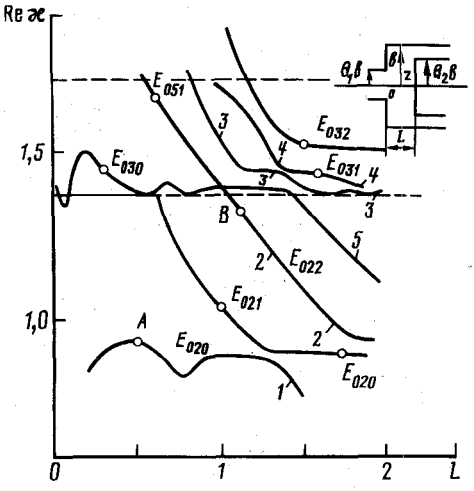

Рис. 1. Дисперсионные кривые открытого волноводного резонатора с $\theta_1 \doteq 0{,}5$, $\theta_2 = 0{,}8$

радиусом от $\theta_1 b$ до $b\,(\theta_1 < 1)$ и коаксиальным стержнем радиуса $\theta_2 b$ $(\theta_2 < 1$, $\theta_1 \neq \theta_2)$. Длину ОВР обозначим L. Подводящие круглый и коаксиальные волноводы бесконечны вдоль оси ОВР (рис. 1).

Рассматриваем E-поляризованные $(E_r, E_z, H_\varphi \neq 0)$ аксиально-симметричные колебания ОВР, считая известными κ_i, $i = 1, 2, \ldots,$ – собственные значения спектрального параметра задачи и соответствующие им амплитуды поля [7]. Введем эталонный закрытый цилиндрический резонатор длиной L и радиусом b. Тогда $H_\varphi = u(r, z)$ – компоненту собственных колебаний ОВР – можно разложить в ряд Фурье по известной системе $u_{nq}(r, z)$ ортонормированных функций H_φ-компонент собственных колебаний закрытого цилиндрического резонатора. Коэффициенты Фурье разложения $u(r, z)$ по базису $u_{nq}(r, z)$ определяются выражением

$$f_{nq} = (u, u_{nq}) = \int_0^R \int_0^L u(rz) u_{nq}(rz)\, r\,dr\,dz$$

и могут быть просто вычислены.

Собственное аксиально симметричное E-поляризованное колебание ОВР будет E_{0pm}-типом, если коэффициент f_{pm} по модулю строго больше всех остальных элементов матрицы коэффициентов Фурье $\{f_{nq}\}$, т.е. $|f_{pm}| > |f_{nq}|$ при $n \neq p$ или $q \neq m$, $p, n = 1, 2, \ldots,$ m, $q = 0, 1, 2, \ldots$ Если несколько несовпадающих коэффициентов f_{nq} равны по модулю между собой и превосходят по модулю все остальные, например, $|f_{pm}| = |f_{sk}| > |f_{n,q}|$ при $n \neq p$ или $q \neq m, k$, $s, p, n = 1, 2, \ldots,$ m, k, $q = 0, 1, 2, \ldots,$ то это $(E_{0pm} + E_{0sk})$ – междутиповые колебания.

Междутиповые колебания для ОВР при определенных $L = L_0$ проявляются также и в некоторой окрестности L, т.е. $|L - L_0| < \epsilon$ (ϵ – мало). В качестве границ области существования междутиповых колебаний можно рассматривать, например, те значения L, при которых для собственного колебания, отвечающего $\kappa_i(L)$, выполняется условие

$$2\,|f_{pm} - f_{sk}|\,(|f_{pm}| + |f_{sk}|)^{-1} < \delta,$$

где $|f_{pm}| = \max\limits_{n,q} |f_{nq}|$, $|f_{sk}| = \max\limits_{n \neq p,\, m \neq q} |f_{nq}|$, $p, s, n = 1, 2, \ldots,$ $m, k,$ $q = 0, 1, 2, \ldots,$ а $\delta < 1/e$ ($e = 2{,}178$, либо $\delta = 0{,}5$ или близкое по порядку фиксированное число).

Рассмотрим теперь конкретные примеры классификации собственных колебаний ОВР. С этой целью воспользуемся дисперсионными кривыми, полученными из ДУ исследуемого ОВР. На рис. 1 приведены изменения $\mathrm{Re}\,\kappa_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ в зависимости от L.

В точке $\mathrm{A}(\kappa_\mathrm{A}, L_\mathrm{A})$ спектральной кривой коэффициенты Фурье для ОВР с $L = 0{,}5$, $\kappa = 0{,}9372 - i \cdot 0{,}0477$ определяются следующим образом: $|f_{20}| = 0{,}8547$; $|f_{11}| = 0{,}2008$; $|f_{21}| = 0{,}0512$; $|f_{31}| = 0{,}0499$. Максимальное значение у f_{20}. Следовательно, собственное значение в точке А имеет E_{020}-тип. Можно

проверить, что пространственное распределение H_φ в объеме ОВР для $\kappa = \kappa_A$ и $L = L_A$ соответствует структуре E_{020}-колебания эталонного закрытого цилиндрического резонатора.

В точке $B(\kappa_B, L_B)$ для ОВР с $L_B = 1{,}12$, $\kappa = 1{,}3194 - i \cdot 0{,}0361$ получаем $|f_{22}| = 0{,}5726$, $|f_{13}| = 0{,}2489$, $|f_{31}| = 0{,}2180$, $|f_{20}| = 0{,}1151$. Максимальное значение у f_{22}. Поэтому собственное колебание ОВР в точке B – E_{022}-тип.

Детальный анализ поведения f_{13}, f_{14}, f_{15}; f_{22}, f_{23}, f_{24}; f_{30}, f_{31}, f_{32} вдоль дисперсионной кривой *3* рис. 1 в зависимости от L для ОВР и сравнение этих данных со свойствами морсовских точек позволяют провести следующую классификацию: для $L \in (0{,}8–0{,}82)$ – E_{022}-тип колебания; для $L \in (0{,}82–0{,}9)$ – – $(E_{022} + E_{031})$ – междутиповое колебание с морсовской точкой при $L = 0{,}85$; для $L \in (0{,}9–1{,}4)$ – E_{031}-тип колебания; для $L \in (1{,}4–1{,}45)$ – $(E_{031} + E_{014})$; $(E_{014} + E_{030})$ – междутиповые колебания с морсовскими точками при $L = 1{,}415$, $L = 1{,}435$; для $L \in (1{,}455–1{,}861)$ – E_{030}-тип колебания.

Автор выражает благодарность А.В. Бровенко, П.Н. Мележику, А.Е. Поединчуку, И.Е. Почаниной, Ю.К. Сиренко, Ю.А. Тучкину, В.В. Яцику, Н.П. Яшиной за активное участие в исследованиях, приведших к возможности публикации данной статьи.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
31 I 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий Н.Н., Булгаков А.А., Ханкина С.И., Яковенко В.М.* Плазменные неустойчивости и нелинейные явления в полупроводниках. Киев: Наук. думка, 1984. 190 с. 2. *Арнольд В.И., Варченко А.И., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1984. 334 с. 3. *Мележик П.Н., Поединчук А.Е., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П.* – ДАН, 1987, т. 300, № 6, с. 1356–1359. 4. *Шестопалов В.П.* – ДАН, 1988, т. 303, № 5, с. 1131–1134. 5. *Бровенко А.В.* – Докл. АН УССР, сер. 2, 1988, № 1, с. 51–56. 6. *Шестопалов В.П.* Спектральная теория и возбуждение открытых структур. Киев: Наук. думка, 1987. 288 с. 7. *Почанина И.В., Шестопалов В.П., Яшина Н.П.* – Изв. вузов. Радиофизика, 1989, т. 32, № 8, с. 1000–1008.