A. N. Andrianov, Harmonic theta functions and Hecke operators,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 5, 1–31

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 5

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ТЕТА-ФУНКЦИИ И ОПЕРАТОРЫ ГЕККЕ

© А. Н. Андрианов

Введение содержит исторический обзор теории преобразования тета-функций и тета-рядов под действием операторов Гекке. В основной части выведены точные формулы, выражающие образы общих векторно-значных тета-функций с (плюри)гармоническими коэффициентами, отвечающих целочисленным неособым квадратичным формам от четного числа переменных, под действием операторов Гекке в виде линейных комбинаций аналогичных тета-функций. Изучены суммы взаимодействия, т.е. тригонометрические суммы, появляющиеся в качестве коэффициентов этих линейных комбинаций. Аналогичные формулы выведены для действия операторов Гекке на соответствующие тета-ряды с рациональными трансляциями.

Оглавление

Введение

Одной из характеристических черт диофантовой теории квадратичных форм является наличие определенных мультипликативных свойств решений квадратичных диофантовых уравнений. Например, формула Якоби

$$r_4(a) = 8\sum_{d|a} d = 8\sigma(a)$$

для количества представлений нечетного a суммой четырех целочисленных квадратов выражает его через функцию $\sigma(a)$, т.е. сумму положительных делителей

Ключевые слова: Операторы Гекке, тета-ряды, тета-функции, целочисленные квадратичные формы.

В период подготовки этой статьи автор был частично поддержан РФФИ, грант 96-01-00663.

числа a, которая удовлетворяет мультипликативным соотношениям

$$\sigma(a)\sigma(b) = \sum_{d|a,b} d\sigma(ab/d^2) \qquad (a, b = 1, 2 \ldots),$$

которые, в частности, позволяют сводить вычисления величины $r_4(a)$ для произвольных нечетных a к случаям их простых делителей. Было получено много частных результатов такого рода до тех пор, пока Э. Гекке не предложил в 1937 г. общий подход к проблеме квадратичной мультипликативности.

Подход Гекке основан на рассмотрении количеств $r(q, a)$ целочисленных решений уравнения

$$q(x_1, \ldots, x_n) = a \tag{0.1}$$

с целочисленной положительно определенной квадратичной формой q от четного числа переменных как коэффициентов Фурье производящей функции

$$\begin{aligned} \theta(z, q) &= \sum_{a=0}^{\infty} r(q, a)\exp(2\pi i a z) \\ &= \sum_{x_1, \ldots, x_n = -\infty}^{\infty} \exp(2\pi i q(x_1, \ldots, x_m)z) \qquad (z = x + iy, y > 0) \end{aligned} \tag{0.2}$$

тета-ряда (*рода* 1) *формы* q. Как хорошо известно, тета-ряд принадлежит конечномерному пространству (голоморфных) модулярных форм веса $m/2$ относительно некоторой подгруппы конечного индекса модулярной группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (см., например, Гекке [21], Шонеберг [25]). Гекке [20] ввел мультипликативные семейства линейных операторов, называемых теперь операторами Гекке, на пространствах модулярных форм. Мультипликативные свойства операторов позволяют обнаружить определенные мультипликативные свойства коэффициентов Фурье модулярных форм, и, в частности, позволяют показать, что коэффициенты Фурье общих собственных функций операторов Гекке пропорциональны соответствующим собственным числам и поэтому наследуют мультипликтивные свойства операторов. Несколькими годами позже Г. Петерссон [24] доказал, что рассматриваемые пространства модулярных форм имеют базисы из общих собственных функций операторов Гекке. Отсюда следует, что коэффициенты Фурье произвольной модулярной формы и, в частности, коэффициенты тета-рядов, т.е. функции $a \longrightarrow r(q, a)$, являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами конечного числа мультипликативных функций, чьи значения можно интерпретировать как собственные числа операторов Гекке.

Если число переменных целочисленной положительно определенной квадратичной формы q нечетно, то тета-ряд (0.2) является модулярной формой полуцелого веса $m/2$ и для применения аналогичного подхода требуется сначала развить подходящую теорию операторов Гекке на модулярных формах нецелых весов. Первая робкая попытка сделать это была предпринята К. Вольфартом [31] в 1957 г. Но только в начале семидесятых годов Г. Шимура [28] смог исследовать мультипликативные свойства коэффициентов Фурье модулярных форм полуцелых весов и связать их с модулярными формами целых весов. Это позволяет обнаружить мультипликативные свойства величин $r(q,a)$ для целочисленных положительно определенных q от нечетного числа переменных.

Сопоставим каждой квадратичной форме q от m переменных ее *матрицу*, т.е. матрицу Q порядка m удовлетворяющую условиям

$$ {}^tQ = Q \quad \text{и} \quad q(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}{}^t x Q \mathrm{x} \quad (\mathrm{x} = {}^t(x_1, \dots, x_m)). \tag{0.3}$$

Если q' другая квадратичная форма от n переменных с матрицей Q', то *представления формы q' формой q* это решения в $m\times n$-матрицах матричного уравнения

$$ {}^tXQX = Q', \tag{0.4}$$

которое является естественным обобщением уравнения (0.1) и превращается в него в случае, когда $n = 1$, $q' = ay^2$ и $Q' = 2a$. Совершенно аналогично случаю $n = 1$ изучение целочисленных решений уравнения (0.4) для положительно определенной формы q ведет к рассмотрению *тета-ряда формы q рода n*,

$$ \theta(Z;q) = \sum_{N\in\mathbb{Z}_n^m} \exp(\pi i\, \mathrm{tr}({}^tNQNZ)), \tag{0.5}$$

где Z принадлежит *верхней полуплоскости Зигеля рода n*,

$$ \mathbb{H}_n = \{\, Z = X + iY \in \mathbb{C}_n^n \,;\, {}^tZ = Z,\ Y > 0 \,\} \tag{0.6}$$

и tr обозначает след, являющегося (голоморфной) модулярной формой веса $m/2$ относительно некоторой подгруппы конечного индекса зигелевой модулярной группы $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ (см. Андрианов, Малолеткин [12]). Количества $r(Q,Q')$ целочисленных решений уравнения (0.4) появляются как коэффициенты Фурье тета-ряда (0.5) и подход к их мультипликативным свойствам можно найти, обобщая идеи Гекке. Теория операторов Гекке на пространствах модулярных форм от нескольких переменных была начата в работах М. Сугавара [29, 30] вскоре после оригинальных работ Гекке и затем развивалась Г. Маассом [23] и многими другими авторами. Современное состояние этой теории изложено в книгах Андрианова [5] (случай целого веса) и Андрианова, Журавлева [13] (случаи как целого, так и полуцелого весов). В качестве приложений были открыты определенные мультипликативные свойства целочисленных представлений квадратичных форм квадратичными формами (см. Андрианов [2]).

Отметим, что значения мультипликативных функций, появляющихся в приложениях операторов Гекке к квадратичным диофантовым проблемам, могут быть выражены в терминах коэффициентов Фурье модулярных форм из соответствующих пространств. Пространства модулярных форм не всегда натягиваются на тета-ряды, и поэтому коэффициенты Фурье общих модулярных форм необязательно связаны с какими-либо квадратичными диофантовыми уравнениями. С другой стороны, было бы только естественно ожидать, что ответ на такой арифметический вопрос как природа мультипликативности решений квадратичных диофантовых задач может быть дан в терминах самих квадратичных форм без привлечения коэффициентов Фурье общих модулярных форм. Это приводит к вопросу об инвариантности относительно операторов Гекке подпространств пространств модулярных форм, натянутых на тета-ряды. В 1977 г. Э. Фрайтаг [14] получил общий положительный ответ на вопрос об инвариантности пространств, натянутых на тета-ряды (0.5) целочисленных положительно определенных квадратичных форм от четного числа переменных относительно операторов Гекке. Позднее было замечено, что подход Фрайтага, основанный на теории сингулярных модулярных форм и использовании оператора Зигеля, оставляет некоторые открытые случаи (см. Фрайтаг [15]), которые все еще открыты. Кроме того, в то время не было получено никаких явных формул для образов тета-рядов под действием операторов Гекке, что было бы важно для приложений.

Первые общие точные формулы, выражающие образы тета-рядов (0.5) целочисленных положительно определенных квадратичных форм от четного числа переменных под действием регулярных операторов Гекке были получены А. Н. Андриановым в [1] новым методом, основанным на его теории разложений в параболических расширениях абстрактных колец Гекке симплектических групп. Вскоре после этого Э. Фрайтаг [16] заметил, что его метод также ведет к точным формулам по меньшей мере для тета-рядов ступени 1. С другой стороны, В. Г. Журавлев [32] несколькими годами позже перенес метод Андрианова на тета-ряды целочисленных положительно определенных квадратичных форм от нечетного числа переменных.

Вообще говоря, если квадратичная форма q не является положительно определенной, то ряд (0.5) расходится. Для обхода этой трудности можно, следуя К. Л. Зигелю [26, 27], ввести в определение тета-рядов дополнительные переменные. Пусть Q вещественная симметрическая неособая матрица порядка m. Определим *пространство мажорант* $\mathcal{H}(Q)$ *матрицы* Q, полагая

$$\mathcal{H}(Q) = \{\, H = {}^tH \in \mathbb{R}^m_m \,;\, H > 0, HQ^{-1}H = Q \,\}. \tag{0.7}$$

Это — однородное пространство вещественной ортогональной группы

$$O(Q) = \{\, U \in \mathbb{R}^m_m \,;\, {}^tUQU = Q \,\}, \tag{0.8}$$

действующей на $\mathcal{H}(Q)$ по правилу

$$O(Q) \supset U \colon H \to {}^tUHU \qquad (H \in \mathcal{H}(Q)).$$

Если $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$, где $n \geqslant 1$, и $H \in \mathcal{H}(Q)$, положим теперь

$$\theta(Z; H, Q) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^m_n} \exp(\pi i \operatorname{tr}(X \cdot {}^tNQN + iY^t \cdot NHN)). \tag{0.9}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах, содержащихся в $\mathbb{H}_n \times \mathcal{H}(Q)$, и поэтому определяет вещественно аналитическую функцию, называемую *тета-рядом рода n пары Q, H*. Если Q положительно определена, то легко проверяется, что пространство $\mathcal{H}(Q)$ сводится к единственной точке $H = Q$, и ряд (0.9) превращется в тета-ряд (0.5) квадратичной формы q с матрицей Q. К. Л. Зигель использовал ряды (0.9) при изучении некоторых средних количеств целочисленных представлений целочисленными неопределенными квадратичными формами.

Операторы Гекке можно распространить на тета-ряды (0.9), когда Q является матрицей целочисленной квадратичной формы, но в лучшем случае они могут выявить только некоторую информацию о мультипликативных свойствах количеств целочисленных представлений квадратичных форм квадратичными формами и ничего не говорят о мультипликативных свойствах самих представлений. В то же время, имеются убедительные свидетельства, что такие свойства существуют. Прежде всего для некоторых квадратичных форм от 2, 4 и 8 переменных это подтверждается классической теорией композиции квадратичных форм (см., например, Гаусс [19], Линник [22]). Кроме того, было бы только естественно ожидать, что вообще мультипликативные свойства количеств целочисленных представлений есть не что иное, как отражение некоторых мультипликативных свойств самих представлений. Возможный подход к проблеме мультипликативных свойств индивидуальных целочисленных представлений квадратичных форм квадратичными формами может быть основан на рассмотрении действия операторов Гекке на определенные ряды, полученные из тета-рядов введением некоторых дополнительных „линейных" переменных. Пусть Q снова вещественная симметрическая неособая матрица порядка m и H принадлежит пространству мажорант $\mathcal{H}(Q)$ матрицы Q. Пусть $n \geqslant 1$ и V_1, V_2 комплексные $m \times n$-матрицы. Тогда ряд

$$\begin{aligned}\theta(V, Z; H, Q) \\ = \sum_{N \in \mathbb{Z}_n^m} \exp(\pi i \operatorname{tr}(XQ[N - V_2] + iYH[N - V_2] + 2 \cdot {}^tV_1QN - {}^tV_1QV_2)),\end{aligned} \tag{0.10}$$

где $V = (V_1, V_2) \in \mathbb{C}_{2n}^m$, $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$, и мы полагаем

$$S[M] = {}^tMSM, \tag{0.11}$$

если произведение матриц справа определено, сходится абсолютно и равномерно на компактах, содержащихся в множестве $\mathbb{C}_{2n}^m \times \mathbb{H}_n + \mathcal{H}(Q)$ и поэтому определяет на этом множестве вещественно аналитическую функцию. Эта функция называется *тета-функцией рода n пары Q, H*. В случае, когда матрица Q является *четной*, т.е. является матрицей (0.3) целочисленной квадратичной формы, и m четно, А. Н. Андрианов [3], обобщая метод его работы [1], вывел точные формулы, выражающие образы тета-функций (0.10) под действием операторов Гекке в виде линейных комбинаций аналогичных тета-функций. Первоначально сложные формулы для коэффициентов этих линейных комбинаций были заменены простыми тригонометрическими суммами в работе [4]. Приложения этих точных формул к мультипликативным свойствам целочисленных представлений квадратичных форм квадратичными формами были получены А. Н. Андриановым в работах [7, 8, 9] и [10].

Оказывается, что для некоторых приложений (см., например, Гекке [21], Фрайтаг [18]) было бы полезно расширить формализм преобразований тета-рядов и тета-функций под действием операторов Гекке на функции, определяемые аналогичными суммированиями экспонент, снабженных определенными коэффициентами. Вообще говоря, мы приходим к рядам вида

$$\Theta_P(V,Z;H,Q) = \sum_{N\in\mathbb{Z}_n^m} P(N-V_2)e\{X\cdot Q[N-V_2]+iY\cdot H[N-V_2]+2\cdot{}^tV_1QN-{}^tV_1QV_2\}, \tag{0.12}$$

где Q четная неособая матрица порядка m, $H\in\mathcal{H}(Q)$, $Z=X+iY\in\mathbb{H}_n$, $V=(V_1,V_2)\in\mathbb{C}_{2n}^m$, и где наряду с обозначением (0.11) мы используем также обозначение

$$e\{A\}=\exp(\pi i\cdot\mathrm{tr}(A)) \tag{0.13}$$

для комплексной квадратной матрицы A. Что касается подходящих коэффициентов, то естественно рассматривать, вообще говоря, векторнозначные функции P на $\mathbb{C}_n^m$, которые обеспечивают хорошую сходимость рядов (0.12) и приводят к суммам с хорошими автоморфными свойствами относительно целочисленных симплектических преобразований. А. Н. Андрианов в [11] недавно показал, что такие условия удовлетворяются (векторнозначными) *гармоническими формами P относительно пары Q,H* (точное определение см. ниже в §1). Соответствующая (векторнозначная) тета-функция (0.12) называется *гармонической тета-функцией рода n пары Q,H с коэффициентной формой P*. Основная цель настоящей статьи — вывести точные формулы, выражающие образы общих гармонических тета-функций целочисленных неособых квадратичных форм от четного числа переменных под действием операторов Гекке в виде линейных комбинаций аналогичных тета-функций. Это проделано в §4 (см. теорему 4.1). Наш метод является по существу развитием метода работ Андрианова [1, 3, 4] и существенно основан на явном разложении некоторых многочленов над абстрактными кольцами Гекке в параболических расширениях.

В качестве коэффициентов в точных формулах для действия операторов Гекке появляются некоторые конечные тригонометрические суммы, *суммы взаимодействия*, связывающие фактически кольца Гекке симплектических и ортогональных групп. Свойства сумм взаимодействия рассмотрены в §3.

Когда линейные переменные $V=(V_1,V_2)$ гармонической тета-функции (0.12) принимают определенные фиксированные рациональные значения, получаются гармонические тета-ряды с рациональными трансляциями, которые играют важную роль при рассмотрении количеств решений квадратичных диофантовых задач, удовлетворяющих конгруэнциальным условиям. В §5 мы применяем формулы §4 для вывода аналогичных формул для действия операторов Гекке на гармонические тета-ряды с рациональными трансляциями целочисленных неособых квадратичных форм от четного числа переменных. Аналогичные формулы для гармонических тета-рядов целочисленных положительно определенных квадратичных форм от четного числа переменных были ранее получены А. Н. Андриановым [6] (случай скалярных гармонических форм специального вида), Э. Фрайтагом [17] (случай квадратичных форм ступени 1 и нулевого сдвига) и В. Г. Журавлевым [33] (случай нулевого сдвига).

Естественно ожидать, что существующая техника позволит распространить основные результаты настоящей работы на тета-функции и тета-ряды квадратичных форм от нечетного числа переменных.

Заканчивая введение, автор хотел бы выразить глубокую признательность профессору Эберхарду Фрайтагу из Университета Гейдельберга за многочисленные стимулирующие обсуждения операторов Гекке.

Я также признателен профессору Ролану Жиллару и профессору Алексею Панчшинину из Института Фурье в Гренобле, где настоящая работа была окончена весной 1996 г., за их любезное приглашение, гостеприимство и полезные дискуссии.

Обозначения. Как обычно, буквы $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ закреплены за кольцом целых рациональных чисел, полем рациональных чисел, полем вещественных чисел и полем комплексных чисел соответственно.

$\mathbf{A}_n^m$ обозначает множество всех $m \times n$ -матриц с элементами из множества $\mathbf{A}$.

Если M — некоторая матрица, то ${}^tM$ обозначает транспонированную матрицу. Через

$$1_n = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$$

мы обозначаем единичную матрицу порядка n. Наряду с этим мы систематически используем обозначения (0.11) и (0.13).

Мы говорим, что целочисленная квадратная матрица является *четной*, если она симметрична и имеет на главной диагонали только четные элементы, т.е. является матрицей (0.3) некоторой целочисленной квадратичной формы; *ступенью* четной неособой матрицы Q называется такое наименьшее натуральное число d, что матрица dQ^{-1} четна.

§1. Гармонические тета-функции

В этом параграфе мы напомним основные определения и автоморфные свойства относительно симплектических преобразований гармонических тета-функций. По поводу дальнейших деталей и доказательств смотри работу Андрианова [11, §4-6].

Напомним сначала, что функция $P\colon \mathbb{C}_n^m \to \mathbb{C}$ называется *гармонической*, если она *гармонична* как функция от mn переменных в том смысле, что

$$\Delta P = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 P(T)}{(\partial t_{ij})^2} = 0;$$

она называется *плюригармонической*, если функция $T \to P(TA)$ является гармонической для всех $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Пусть

$$\rho\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_a(\mathbb{C})$$

— некоторое *полиномиальное групповое представление*, т.е. групповой гомоморфизм покоэффициентно задаваемый полиномиальными функциями, тогда ρ — *гармонической формой* называется покомпонентно гармоническое полиномиальное отображение

$$P\colon \mathbb{C}_n^m \to \mathbb{C}^a,$$

удовлетворяющее условию

$$P(TA) = \rho({}^tA)P(T) \quad \text{для всех } A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Ясно, что каждая гармоническая форма является покомпонентно плюригармонической. Это определение ρ-гармонических форм отвечает квадратичной форме $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_m^2$ в том смысле, что отображение $T \to P(\varepsilon T)$ является ρ-гармонической формой для каждого ε из комплексной ортогональной группы $O_m(\mathbb{C})$ порядка m, если ρ-гармонической формой является P. Определим теперь гармонические формы, отвечающие произвольным вещественным неособым квадратичным формам. Пусть $q(\mathbf{x}) = q(x_1, \dots, x_m)$ — такая форма, Q матрица формы q (см. (0.3)), и $H \in \mathcal{H}(Q)$ — матрица из пространства мажорант (0.6) матрицы Q. Так как матрица H положительно определена и удовлетворяет условию $Q^{-1}[H] = Q$, то существует вещественная обратимая m-матрица S такая, что

$$Q = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & -1_l \end{pmatrix}[S] \quad \text{и} \quad H = 1_m[S] = {}^tSS \tag{1.1}$$

(см. (0.11)), где (k, l) — сигнатура формы q. Мы положим

$$S = \begin{pmatrix} S_+ \\ S_- \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S_+ \in \mathbb{R}_m^k,\ S_- \in \mathbb{R}_m^l. \tag{1.2}$$

Далее, пусть

$$\rho_+\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_a(\mathbb{C}), \qquad \rho_-\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_b(\mathbb{C}) \tag{1.3}$$

— два полиномиальных представления, и пусть

$$P_+\colon \mathbb{C}_n^k \to \mathbb{C}^a, \qquad P_-\colon \mathbb{C}_n^l \to \mathbb{C}^b$$

— некоторая ρ_+-гармоническая форма и некоторая ρ_--гармоническая форма, соответственно. Тогда отображение

$$P_0 = P_+ \otimes P_-\colon \mathbb{C}_n^m = \mathbb{C}_n^{k+l} \to \mathbb{C}^{ab},$$

определяемое равенством

$$(P_+ \otimes P_-) \begin{pmatrix} T_+ \\ T_- \end{pmatrix} = P_+(T_+) \otimes P_-(T_-),$$

где $T_+ \in \mathbb{C}^k_n$, $T_- \in \mathbb{C}^l_n$, и *тензорное* (или *кронекерово* произведение некоторой $c \times d$-матрица A на $e \times f$-матрицу B определяется как $ce \times df$-матрица вида

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} \dots Ab_{1f} \\ \dots\dots\dots \\ Ab_{e1} \dots Ab_{ef} \end{pmatrix},$$

является $\rho_+ \otimes \rho_-$-гармонической формой с

$$(\rho_+ \otimes \rho_-)(A) = \rho_+(A) \otimes \rho_-(A) \in \mathrm{GL}_{ab}(\mathbb{C}),$$

как это легко следует из хорошо известных свойств тензорного произведения. Наконец, возвращаясь к паре Q, H, мы будем говорить, что полиномиальное отображение

$$P = P_S \colon \mathbb{C}^m_n \longrightarrow \mathbb{C}^{ab}, \tag{1.4}$$

определяемое условием

$$P(T) = (P_0|S)(T) = P_+(S_+T) \otimes P_-(S_-T),$$

где S — некоторая матрица вида (1.2), удовлетворяющая условиям (1.1), является *$\rho_+ \otimes \rho_-$-гармонической формой относительно пары* Q, H. Такая форма удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} P(TA) &= P_+(S_+TA) \otimes P_-(S_-TA) \\ &= (\rho_+ \otimes \rho_-)({}^tA)P(T) \end{aligned} \tag{1.5}$$

для каждой $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Кроме того, если комплексная матрица ε порядка m удовлетворяет условиям $Q[\varepsilon] = Q$ и $H[\varepsilon] = H$, то легко проверяется, что отображение

$$T \longrightarrow (P|\varepsilon)(T) = P(\varepsilon T) = P_0(S\varepsilon T)$$

снова является $\rho_+ \otimes \rho_-$-гармонической формой относительно пары Q, H.

В приведенных выше обозначениях и предположениях, если P является гармонической формой относительно пары Q, H, то ряд (0.12), где $V_1, V_2 \in \mathbb{C}^m_n$, $V = (V_1, V_2)$, $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$, и $H \in \mathcal{H}(Q)$ сходится абсолютно и равномерно на компактах, содержащихся в $\mathbb{C}^m_{2n} \times \mathbb{H}_n \times \mathcal{H}(Q)$. Получающаяся $\mathbb{C}^{ab}$-значная (вещественно аналитическая) функция называется *гармонической тета-функцией пары Q, H рода n с коэффициентной формой P*.

Напомним, что *целочисленная симплектическая группа* (или *зигелева модулярная группа*) *рода n* определяется условиями

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) = \Gamma^n = \{\, M \in \mathbb{Z}^{2n}_{2n} \,;\, {}^tMJ_nM = J_n \,\}, \tag{1.6}$$

где

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Теперь мы сформулируем свойства преобразований гармонических тета-функций целочисленных неособых квадратичных форм от четного числа переменных под действием целочисленных симплектических преобразований, которые являются специализацией общих формул, полученных в работе Андрианова [11, теоремы 4.1, 4.2 и 4.3].

Теорема 1.1. *Пусть Q матрица целочисленной неособой квадратичной формы от четного числа m переменных, т.е. четная неособая матрица четного порядка m, (k,l) — сигнатура этой формы, и H принадлежит пространству мажорант* (0.6) *матрицы Q. Пусть $P = P_S$ — некоторая $\rho_+ \otimes \rho_-$-гармоническая форма* (1.4) *на $\mathbb{C}_n^m$ относительно пары Q, H, где ρ_+ и ρ_- — полиномиальные представления* (1.3) *с $n, a, b = 1, 2, \ldots$ Тогда для каждой целочисленной симплектической матрицы $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ из группы*

$$\Gamma_0^n(d) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma^n; C \equiv 0 \pmod d \right\}, \tag{1.8}$$

где d обозначает ступень матрицы Q (см. обозначения), тета-функция (0.12) *пары Q, H рода n с коэффициентной формой P удовлетворяет следующему функциональному уравнению*

$$\begin{aligned} &\Theta_P(V \cdot {}^tM, (AZ+B)(CZ+D)^{-1}; H, Q) \\ &\quad = \mu_Q(M) j_{k,l}(M, Z) \rho_+(CZ+D) \otimes \rho_-(C\bar{Z}+D) \Theta_P(V, Z; H, Q), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$j_{k,l}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, Z \right) = (\det(CZ+D))^{(k-l)/2} |\det(CZ+D)|^l \tag{1.10}$$

и где

$$\mu_Q(M) = \mu_Q\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \chi_Q(\det D) \tag{1.11}$$

с вещественным характером Дирихле χ_Q по модулю d, удовлетворяющим условиям

$$\begin{aligned} &\chi_Q(-1) = (-1)^{(k-l)/2}, \\ &\chi_Q(p) = \left(\frac{(-1)^{m/2} \det Q}{p} \right) \quad (\textit{символ Лежандра}), \end{aligned} \tag{1.12}$$

если p является нечетным простым числом, и

$$\chi_Q(2) = 2^{-m/2} \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^m / 2\mathbb{Z}^m} \exp(\pi i Q[\mathbf{r}]/2),$$

если d нечетно.

§2. Операторы Гекке

Здесь мы напомним определения и основные свойства колец Гекке и операторов Гекке. По поводу деталей и доказательств см. Андрианов [5, гл. 3, §3.1, 3.3].

Пусть G — некоторая мультипликативная полугруппа и $\Gamma \subset G$ ее подгруппа. Мы обозначим через

$$\mathbf{L} = L_{\mathbf{A}}(\Gamma \setminus G), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{A}$ — некоторое коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей, свободный (левый) $\mathbf{A}$-модуль, состоящий из всех формальных конечных линейных комбинаций $t = \sum_i a_i(\Gamma g_i)$ с коэффициентами $a_i \in \mathbf{A}$ символов (Γg_i) с $g_i \in G$, взаимно однозначно соответствующих левым смежным классам множеств G по группе Γ. Далее, мы обозначим через

$$\mathbf{D} = D_{\mathbf{A}}(\Gamma \backslash G) = \left\{ t = \sum_i a_i(\Gamma g_i) \in \mathbf{L}\ ;\ t\gamma = \sum_i a_i(\Gamma g_i \gamma) = t \text{ для всех } \gamma \in \Gamma \right\} \tag{2.2}$$

подмодуль модуля $\mathbf{L}$, состоящий из всех элементов инвариантных относительно естественного (правого) действия группы Γ на $\mathbf{L}$. Если $[G]_\Gamma$ обозначает подмножество всех элементов $g \in G$, для которых двойной класс $\Gamma g \Gamma$ состоит только из конечного числа левых классов смежности по модулю Γ:

$$|\Gamma \setminus \Gamma g \Gamma| < \infty, \tag{2.3}$$

то легко проверить, что $[G]_\Gamma$ является подполугруппой полугруппы G и что элементы

$$[g] = [g]_\Gamma = \sum_{g_i \in \Gamma \backslash \Gamma g \Gamma} (\Gamma g_i) \in \mathbf{L} \qquad (g \in [G]_\Gamma), \tag{2.4}$$

отвечающие различным двойным классам $\Gamma g \Gamma \subset [G]_\Gamma$, содержатся в $\mathbf{D}$ и образуют свободный базис модуля $\mathbf{D}$ над $\mathbf{A}$. В частности,

$$D_{\mathbf{A}}(\Gamma \setminus G) = D_{\mathbf{A}}(\Gamma \setminus [G]_\Gamma). \tag{2.5}$$

Произведение элементов из $\mathbf{D}$, задаваемое формулой

$$\left(\sum_i a_i(\Gamma g_i)\right)\left(\sum_j b_j(\Gamma h_j)\right) = \sum_{i,j} a_i b_j (\Gamma g_i h_j),$$

не зависит от выбора представителей $g_i \in \Gamma g_i$ и $h_j \in \Gamma h_j$, содержится в $\mathbf{D}$ и превращает $\mathbf{D}$ в ассоциативное кольцо, называемое *кольцом Гекке пары* (Γ, G) *над* $\mathbf{A}$. Кольца Гекке были впервые введены Г. Шимурой в конце пятидесятых годов в несколько отличной, но эквивалентной форме. При рассмотрении колец Гекке, согласно (2.5), можно заменить полугруппу G на $[G]_\Gamma$ и предполагать сначала, что

$$G = [G]_\Gamma. \tag{2.6}$$

Пара (Γ, G), удовлетворяющая условию (2.6), будет называться *л(ево)-конечной*. Предположим теперь, что полугруппа G действует на некотором (левом) $\mathbf{A}$-модуле $\mathbf{V}$ посредством линейных операторов

$$g\colon v \longrightarrow v|g \qquad (v \in \mathbf{V}, g \in G),$$

удовлетворяющих условиям

$$v|g|g_1 = v|gg_1 \qquad (v \in \mathbf{V}, g, g_1 \in G), \tag{2.7}$$

и пусть

$$\mathbf{V}(\Gamma) = \{\, v \in \mathbf{V}\ ;\ v|\gamma = v \text{ для всех } \gamma \in \Gamma \,\} \tag{2.8}$$

обозначает подмодуль Γ-инвариантных элементов из $\mathbf{V}$. Тогда для каждого $v \in \mathbf{V}(\Gamma)$ и каждого $t = \sum_i a_i(\Gamma g_i) \in \mathbf{D}$ элемент

$$v|t = \sum_i a_i v|g_i \tag{2.9}$$

не зависит от выбора представителей $g_i \in \Gamma g_i$, он снова принадлежит подмодулю $\mathbf{V}(\Gamma)$, и для любых $v \in \mathbf{V}(\Gamma)$ и $t, t_1 \in \mathbf{D}$ имеет место соотношение

$$v|t|t_1 = v|tt_1. \tag{2.10}$$

Таким образом, соответствие $t \longrightarrow |t$ является линейным представлением кольца Гекке $\mathbf{D}$ на модуле $\mathbf{V}(\Gamma)$. Операторы $|t$ называются *операторами Гекке*.

В интересующей нас ситуации действия операторов Гекке на гармонические тета-функции рода n целочисленной квадратичной формы ступени d, рассмотренные в теореме 1.1, в роли G выступает полугруппа

$$\begin{aligned} S = S_0^n(d) &= \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{2n}^{2n}\ ;\ {}^tMJ_nM = \mu(M)J_n, \right. \\ &\qquad \left. \mu(M) > 0, \quad \gcd(d, \mu(M)) = 1,\ C \equiv 0 \pmod d \right\}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где J_n обозначает кососимметричную матрицу (1.7), а в качестве Γ выступает группа $\Gamma_0^n(d)$, определенная условиями (1.8). Пара $(\Gamma_0^n(d)), S_0^n(d))$ является л-конечной, согласно лемме 3.3.1 книги Андрианова [5], и соответствующее кольцо Гекке над кольцом $\mathbf{A} = \mathbb{C}$,

$$L_0^n(d) = D_{\mathbb{C}}(\Gamma_0^n(d), S_0^n(d)) \tag{2.12}$$

будет называться *кольцом Гекке группы* $\Gamma_0^n(d)$. Для определения операторов Гекке мы возьмем в качестве пространства представления полугруппы $S_0^n(d)$ пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(m, n, ab)$ всех вещественно аналитических функций $F = F(V, Z)$ на

$\mathbb{C}_{2n}^{m} \times \mathbb{H}_n$ со значениями в $\mathbb{C}^{ab}$ и определим действие полугруппы $S = S_0^n(d)$ на $\mathcal{F}$ по формуле

$$S \supset M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : F \longrightarrow F|M = J(M, Z)^{-1} F(V \cdot {}^tM, M\langle Z\rangle), \tag{2.13}$$

где

$$M\langle Z\rangle = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \in \mathbb{H}_n$$

и где в обозначениях теоремы 1.1 мы полагаем

$$J(M, Z) = \chi_Q(\det D) j_{k,l}(M, Z) \rho_+(CZ + D) \otimes \rho_-(C\bar{Z} + D). \tag{2.14}$$

Если матрица $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ и $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{smallmatrix}\right)$ содержатся в S, и $M' = \left(\begin{smallmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{smallmatrix}\right) = MM_1$, то прямым вычислением легко проверяется, что

$$(C \cdot M_1\langle Z\rangle + D)(C_1 Z + D_1) = C'Z + D' \qquad (Z \in \mathbb{H}_n) \tag{2.15}$$

и

$$\begin{aligned} \chi_Q(\det D') &= \chi_Q(\det(CB_1 + DD_1)) = \chi_Q(\det DD_1) \\ &= \chi_Q(\det D)\chi_Q(\det D_1), \end{aligned}$$

поскольку $C \equiv 0 \pmod d$. Из этих соотношений следует, что матрицы $J(M, Z)$ удовлетворяют соотношениям

$$J(M, M_1\langle Z\rangle) J(M_1, Z) = J(MM_1, Z)$$

для любых $M, M_1 \in S_0^n(d)$ и $Z \in \mathbb{H}_n$, откуда мы заключаем, что действие (2.13) удовлетворяет условиям (2.7), т.е.

$$F|M|M_1 = F|MM_1 \qquad (F \in \mathcal{F}, M, M_1 \in S). \tag{2.16}$$

Это позволяет нам определить стандартное представление $T \longrightarrow |T$ кольца Гекке $L_0^n(d)$ на подпространстве

$$\mathcal{F}(\Gamma_0^n(d)) = \{\, F \in \mathcal{F}\ ;\ F|\gamma = F \text{ для всех } \gamma \in \Gamma_0^n(d) \,\}, \tag{2.17}$$

всех $\Gamma_0^n(d)$-инвариантных функций из $\mathcal{F}$. Пусть

$$T = \sum_{M_i \in \Gamma_0^n(d) \backslash S_0^n(d)} a_i(\Gamma_0^n(d) M_i) \in L_0^n(d) \tag{2.18}$$

— некоторый элемент кольца Гекке (2.12). Согласно теореме 1.1, в обозначениях и предположениях этой теоремы, тета-функция $\Theta_P(V, Z; H, Q)$ рода n пары Q, H с коэффициентной формой P, рассматриваемая как функция от V и Z,

$$\Theta_P(V, Z; H, Q) = \Theta(V, Z), \tag{2.19}$$

содержится в пространстве $\mathcal{F}(\Gamma_0^n(d))$, и поэтому ее образ

$$\begin{aligned}\Theta_P(V,Z;H,Q)|T&\\&=(\Theta|T)(V,Z)=\sum_i a_i(\Theta|M_i)(V,Z)\\&=\sum_i a_iJ(M_i,Z)^{-1}\Theta_P(V\cdot{}^tM_i,M_i\langle Z\rangle;H,Q)\end{aligned}\tag{2.20}$$

под действием оператора Гекке $|T$, отвечающего элементу (2.18), не зависит от выбора представителей $M_i\in\Gamma_0^n(d)M_i$ и снова содержится в пространстве $\mathcal{F}(\Gamma_0^n(d))$.

Цель настоящей статьи показать, что при определенных условиях на элементы T из $L_0^n(d)$ образы (2.20) тета-функции $\Theta_P(V,Z;H,Q)$ под действием операторов Гекке $|T$ являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами аналогичных тета-функций, но сначала мы выведем прямые формулы для этих образов, выражающие их в виде бесконечных сумм с явно заданными коэффициентами.

По (2.11) каждая матрица $M\in S_0^n(d)$ удовлетворяет соотношению ${}^tMJ_nM=\mu(M)J_n$, где $\mu(M)$ — некоторое целое положительное число, взаимно простое с d. Число $\mu(M)$ называется *мультипликатором матрицы* M. Ясно, что

$$\mu(MM_1)=\mu(M)\mu(M_1)\qquad(M,M_1\in S_0^n(d))\tag{2.21}$$

и

$$\mu(M)=1\iff M\in\Gamma_0^n(d).\tag{2.22}$$

Отсюда следует, что функция μ постоянна на левых и двойных классах матриц M по модулю группы $\Gamma_0^n(d)$, и поэтому можно говорить о *мультипликаторе соответствующих классов*,

$$\mu(\Gamma_0^n(d)M)=\mu(\Gamma_0^n(d)M\Gamma_0^n(d))=\mu(M).$$

Мы говорим, что некоторая ненулевая (формальная) конечная линейная комбинация T левых или двойных классов по модулю $\Gamma_0^n(d)$, содержащихся в $S_0^n(d)$, является *однородной мультипликатора* $\mu(T)=\mu$, если все входящие классы имеют мультипликатор μ. Ясно, что каждая конечная линейная комбинация является конечной суммой однородных линейных комбинаций различных мультипликаторов, ее однородных компонент, которые однозначно определены. В частности, это позволяет сводить общие операторы Гекке $|T$ к случаю однородных T.

Другое сведение основано на специальном выборе представителей в левых классах $\Gamma_0^n(d)M$, содержащихся в $S_0^n(d)$. Согласно лемме 3.3.4 книги Андрианова [5] и определению множеств $S_0^n(d)$ каждый из этих левых классов содержит представителя вида

$$M=\begin{pmatrix}A&B\\0&D\end{pmatrix}\quad\text{с}\quad A,B,D\in\mathbb{Z}_n^n,\quad {}^tAD=\mu(M)1_n,\quad {}^tBD={}^tDB.\tag{2.23}$$

Эти представители очень удобны для вычислений с операторами Гекке и будут называться *треугольными представителями.*

Используя введенные выше определения, мы можем теперь доказать следующее предложение.

Предложение 2.1. *В обозначениях и предположениях теоремы* 1.1 *образ* (2.20) *тета-функции* $\Theta_P(V,Z;H,Q)$ *под действием оператора Гекке, отвечающего однородному элементу*

$$T=\sum_i a_i(\Gamma_0^n(d)M_i)\in L_0^n(d) \tag{2.24}$$

с мультипликатором $\mu(T)=\mu$, *где все представители* M_i *предполагаются треугольными,*

$$M_i=\begin{pmatrix}A_i & B_i\\ 0 & D_i\end{pmatrix},\qquad {}^tA_iD_i=\mu 1_n,\ {}^tB_iD_i={}^tD_iB_i, \tag{2.25}$$

равен ряду

$$\begin{aligned}\sum_{N\in C^n(Q/\mu)} & I(N,Q,T)P(\mu^{-1}(N-\mu V_2))\\ &\times e\{X\cdot\mu^{-1}Q[N-\mu V_2]+\sqrt{-1}Y\mu^{-1}H[N-\mu V_2]\\ &\qquad +2\cdot{}^t(\mu V_1)\mu^{-1}QN-{}^t(\mu V_1)\mu^{-1}Q(\mu V_2)\},\end{aligned} \tag{2.26}$$

где

$$C^n(Q/\mu)=\{\,N\in\mathbb{Z}_n^m\ ;\ \text{матрица } \mu^{-1}Q[N] \text{ четна}\,\}, \tag{2.27}$$

$$I(N,Q,T)=\sum_{i;N\cdot{}^tD_i\equiv 0 \pmod{\mu}} a_ij_Q(D_i)^{-1}e\{\mu^{-2}Q[N]\cdot{}^tD_iB_i\} \tag{2.28}$$

с

$$j_Q(D)=\chi_Q(|\det D|)|\det D|^{m/2}\qquad (D\in\mathbb{Z}_n^n) \tag{2.29}$$

и где остальные обозначения те же, что и в (0.12).

Доказательство. Для краткости мы будем использовать обозначение

$$\begin{aligned}&e\{X\cdot Q[N-V_2]+\sqrt{-1}Y\cdot H[N-V_2]+2{}^tV_1QN-{}^tV_1QV_2\}\\ &\quad=e(V,Z,H,Q;N)\end{aligned} \tag{2.30}$$

для экспоненциального множителя в общем члене ряда (0.12). Легкое прямое вычисление, основанное на определениях, показывает, что для каждой матрицы M вида (2.23) имеет место тождество

$$\begin{aligned}&e(V\cdot{}^tM,M\langle Z\rangle,H,Q,N)\\ &\quad=e\{BD^{-1}\cdot Q[N]\}e(\mu V,Z,\mu^{-1}H,\mu^{-1}Q;NA).\end{aligned} \tag{2.31}$$

В этих обозначениях образ (2.20) может быть записан в виде

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}_n^m}\sum_i a_i J(M_i,Z)^{-1}P(N-V_2\cdot {}^tD_i)e(V\cdot {}^tM_i, M_i\langle Z\rangle, H, Q; N). \tag{2.32}$$

Согласно (2.14), (1.10) и (1.12), можно написать

$$\begin{aligned} J(M_i,Z) &= \chi_Q(\det D_i)(\det D_i)^{\frac{k-l}{2}}|\det D_i|^l\rho_+(D_i)\otimes\rho_-(D_i)\\ &= j_Q(D_i)\rho_+(D_i)\otimes\rho_-(D_i),\end{aligned}$$

откуда, используя (1.5) и (2.25), получаем

$$J(M_i,Z)^{-1}P(N-V_2\cdot {}^tD_i) = j_Q(D_i)^{-1}P(\mu NA_i - V_2).$$

Отсюда, применяя соотношения (2.31) для $M = M_i$, мы можем переписать сумму (2.32) в виде

$$\begin{aligned} = \sum_{N\in\mathbb{Z}_n^m}\sum_i a_i j_Q(D_i)^{-1}e\{B_iD_i^{-1}Q[N]\}P(\mu^{-1}(NA_i-\mu V_2))\\ \times e(\mu V, Z, \mu^{-1}H, \mu^{-1}Q; NA_i).\end{aligned}$$

Объединяя здесь все слагаемые с фиксированной матрицей $N' = NA_i = \mu N\cdot {}^tD_i^{-1}$, используя очевидное соотношение

$$e\{B_iD_i^{-1}Q[N]\} = e\{D_i^{-1}\cdot Q[\mu^{-1}N'\cdot {}^tD_i]\cdot B_i\} = e\{\mu^{-2}Q[N']\cdot {}^tD_iB_i\},$$

и затем опуская штрих, мы получаем сумму

$$= \sum_{N\in\mathbb{Z}_n^m} I(N,Q,T)P(\mu^{-1}(N-\mu V_2))e(\mu V, Z, \mu^{-1}H, \mu^{-1}Q; N). \tag{2.33}$$

Для завершения доказательства предложения достаточно показать, что

$$I(N,Q,T) = 0 \quad \text{если } N\notin C^n(Q/\mu) \qquad (N\in\mathbb{Z}_n^m). \tag{2.34}$$

Для этого мы напомним, что образ $F(V,Z) = (\Theta|T)(V,Z)$, задаваемый суммой (2.33), принадлежит пространству $\mathcal{F}(\Gamma_0^n(d))$ и, в частности, удовлетворяет соотношению

$$\left(F\middle|\begin{pmatrix}1_n & B\\ 0 & 1_n\end{pmatrix}\right)(V,Z) = F((V_1+V_2\cdot {}^tB, V_2), Z+B) = F(V,Z)$$

для каждой матрицы $B = {}^tB\in\mathbb{Z}_n^n$. Эти соотношения для функции F, записанной в виде (2.33) с $V=(V_1,V_2)=(0,0)$ и $P\equiv 1$, превращаются в соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{N\in\mathbb{Z}_n^m} I(N,Q,T)e\{\mu^{-1}Q[N]\cdot B\}e\{X\mu^{-1}Q[N]+\sqrt{-1}Y\mu^{-1}H[N]\}\\ = \sum_{N\in\mathbb{Z}_n^m} I(N,Q,T)e\{X\cdot\mu^{-1}Q[N]+\sqrt{-1}Y\cdot\mu^{-1}H[N]\},\end{aligned}$$

откуда на основании единственности разложения Фурье аналитической и периодической по $X={}^tX\in\mathbb{R}_n^n$ функции $F(0,X+\sqrt{-1}Y)$ следуют формулы

$$I(N,Q,T)e\{\mu^{-1}Q[N]B\} = I(N,Q,T), (N\in\mathbb{Z}_n^m, B={}^tB\in\mathbb{Z}_n^n).$$

Если $N\notin C^n(Q/\mu)$, то найдется целочисленная симметрическая матрица B, для которой $\operatorname{tr}(\mu^{-1}Q[N]B)\notin 2\mathbb{Z}$, и поэтому $e\{\mu^{-1}Q[N]B\}\neq 1$. Это доказывает свойство (2.34) и предложение. •

§3. Суммы взаимодействия

Мы называем тригонометрические суммы $I(N,Q,T)$, определенные для однородных T равенствами (2.28) и продолженные на все $L_0^n(d)$ линейностью по T *суммами взаимодействия*, поскольку они связывают определенные арифметические структуры, относящиеся к ортогональным и симплектическим группам. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые из их основных свойств.

На протяжении всего этого параграфа мы предполагаем, что Q является матрицей целочисленной неособой квадратичной формы от четного числа m переменных, т. е. четной неособой матрицей четного порядка m, (k,l) является сигнатурой этой формы, d обозначает ступень матрицы Q, и χ_Q — соответствующий характер Дирихле, определенный в теореме 1.1.

Лемма 3.1. *Суммы взаимодействия $I(N,Q,T)$ с $N \in \mathbb{Z}_n^m$ и $T \in L_0^n(d)$ не зависят от выбора треугольных представителей в разложении однородных компонент элемента T и удовлетворяют соотношениям*

$$I(UNU',Q,T) = I(N,Q[U],T) \tag{3.1}$$

для любых

$$U,U' \in \Lambda^m = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}). \tag{3.2}$$

Доказательство. Первое утверждение легко следует из определений. Что же касается соотношений (3.1), то можно считать, что T является однородным элементом вида (2.24) с представителями M_i, удовлетворяющими условиям (2.25). Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}
&I(UNU',Q,T)\\
&= \sum_{i;U\cdot N\cdot {}^t(D_i\cdot {}^tU')\equiv 0 \pmod{\mu}} a_i j_Q(D_i\cdot {}^tU')\\
&\qquad\qquad \times e\{\mu^{-2}Q[U][N]\cdot {}^t(D_i{}^tU')B_i\cdot {}^tU'\}\\
&= I\left(N,Q[U],T\cdot\begin{pmatrix}(U')^{-1} & 0\\ 0 & {}^tU'\end{pmatrix}\right)\\
&= I(N,Q[U],T),
\end{aligned}$$

поскольку T инвариантен относительно правых умножений на элементы из $\Gamma_0^n(d)$. •

Далее мы рассмотрим соотношения между суммами взаимодействия для различных родов n. С этой целью мы введем соответствующие *отображения Жарковской*

$$\Psi^{n,r} = \Psi_Q^{n,m}\colon L_0^n(d) \to L_0^r(d) \tag{3.3}$$

для $n > r \geqslant 1$. Если $T \in L_0^n(d)$ — элемент вида (2.24) с представителями M_i вида (2.25), то после замены M_i на $\begin{pmatrix}{}^tU_i^{-1} & 0\\ 0 & U_i\end{pmatrix} M_i$ с подходящими $U_i \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$

мы можем считать, что все блоки D_i матриц M_i имеют вид $D_i = \begin{pmatrix} D_i' & * \\ 0 & D_i'' \end{pmatrix}$ с $D_i' \in \mathbb{Z}_r^r$ (см., например, Андрианов [5, лемма 3.2.7]), и таким образом

$$M_i = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i' & 0 \\ * & A_i'' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_i' & * \\ * & * \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} D_i' & * \\ 0 & D_i'' \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{с } A_i', B_i', D_i' \in \mathbb{Z}_r^r. \tag{3.4}$$

Из (2.25) следует, что

$${}^tA_i' \cdot D_i' = \mu 1_r, \qquad {}^tB_i' D_i' = {}^tD_i' B_i', \tag{3.5}$$

откуда

$$M_i' = \begin{pmatrix} A_i' & B_i' \\ 0 & D_i' \end{pmatrix} \in S_0^r(d). \tag{3.6}$$

Положим тогда

$$\Psi^{n,r}T = \sum_i a_i j_Q(D_i'')^{-1}(\Gamma_0^r(d)M_i'). \tag{3.7}$$

Легко проверить, что линейная комбинация (3.7) содержится в кольце Гекке $L_0^r(d)$, и отображение $T \longrightarrow \Psi^{n,r}T$, будучи продолжено по линейности на все кольцо $L_0^n(d)$, является $\mathbb{C}$-линейным гомоморфизмом колец.

Предложение 3.2. *Пусть T — некоторый элемент кольца $L_0^n(d)$ и $N \in \mathbb{Z}_r^m$, где $n > r \geqslant 1$, тогда*

$$I((N,0), Q, T) = I(N, Q, \Psi^{n,r}T), \tag{3.8}$$

где $\Psi^{n,r}$ — отображение Жарковской (3.3).

Доказательство. Можно считать, что элемент T является однородным элементом вида (2.24) с представителями M_i, выбранными в виде (3.4). Тогда, согласно (2.28), мы получаем

$$\begin{aligned} &I((N,0),Q,T) \\ &= \sum_{i;(N,0)\begin{pmatrix} {}^tD_i & 0 \\ * & {}^tD_i'' \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{\mu}} a_i j_Q(D_i'')^{-1} j_Q(D_i')^{-1} \\ &\qquad \times e\left\{\mu^{-2}\begin{pmatrix} Q[N] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^tD_i'B_i' & * \\ * & * \end{pmatrix}\right\} \\ &= \sum_{i;N\cdot {}^tD_i' \equiv 0 \pmod{u}} a_i j_Q(D_i'')^{-1} j_Q(D_i')^{-1} e\{\mu^{-2}Q[N] \cdot {}^tD_i'B_i'\}, \end{aligned}$$

что доказывает равенство (3.8). •

Ясно, что гомоморфизм Жарковской отображает однородные элементы в однородные. Для некоторых приложений важно знать, какие однородные элементы содержатся в его образе. Следующее предложение отвечает на этот вопрос.

Предложение 3.3. *Пусть $n > r \geqslant 1$ и T — некоторый ненулевой однородный элемент кольца $L_0^r(d)$ с мультипликатором $\mu(T) = \mu$. Тогда включение*

$$T \in \Psi^{n,r}(L_0^n(d)) \tag{3.9}$$

эквивалентно следующим условиям

$$\left.\begin{array}{l}\text{либо } r \geqslant m/2, \text{ либо } r < m/2 \text{ и } \chi_Q(p) = 1 \text{ для каждого про-}\\ \text{стого числа } p, \text{ входящего в } \mu \text{ в нечетной степени.}\end{array}\right\} \tag{3.10}$$

Доказательство. Если μ является степенью простого числа, то утверждение следует из определений и предложения 2.13, гл. 4 кн. Андрианов, Журавлев [13] (см. также Андрианов [5], предложение 4.2.19) с очевидными изменениями. Общий случай следует затем на основании [13, гл. 3, теорема 3.12] (см. также [5, теорема 3.3.12]). •

Следующие свойства сумм взаимодействия играют фундаментальную роль для приложений к действию операторов Гекке на тета-функции.

Теорема 3.4. *Пусть Q четная неособая матрица четного порядка m, d ступень Q, и χ_Q соответствующий характер Дирихле по модулю d. Пусть T некоторый однородный элемент кольца Гекке $L_0^n(d)$, где $n \geqslant 1$, с $\mu(T) = \mu$, удовлетворяющий условию*

$$T \in \Psi^{m,n}(L_0^m(d)), \quad \text{если } n < m, \tag{3.11}$$

где $\Psi^{m,n}$ гомоморфизм Жарковской. Тогда для каждой матрицы $N \in \mathbb{Z}_n^m$ сумма взаимодействия $I(N, Q, T)$ удовлетворяет соотношению

$$I(N, Q, T) = \sum_{D \in A(Q,\mu)/\Lambda^m;\, D|N} I(D, Q, \Psi^{n,m}T), \tag{3.12}$$

где

$$A(Q,\mu) = \{\, D \in \mathbb{Z}_m^m \,;\, |\det D| = \mu^{m/2}, \text{ матрица } \mu^{-1}Q[D] \text{ четна}\,\},$$
$$\Lambda^m = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}),$$

условие $D \mid N$ означает, что матрица $D^{-1}N$ является целочисленной, и где

$$\Psi^{n,m}T = T' \in L_0^m(d)$$

обозначает некоторый однородный элемент с $\mu(T') = \mu(T) = \mu$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} T' = \Psi^{n,m}T, & \text{если } n > m,\\ T' = T, & \text{если } n = m,\\ \Psi^{m,n}T' = T, & \text{если } m > n.\end{cases}$$

Сначала мы докажем три леммы, относящиеся к действию (2.20) операторов Гекке $|T'$ для однородных $T' \in L_0^m(d)$ с $\mu(T') = \mu$ на тета-функцию

$$\Theta^m(V, Z) = \Theta(V, Z; H, Q) \qquad (V \in \mathbb{C}_{2m}^m, Z \in \mathbb{H}_m, H \in \mathcal{H}(Q)) \tag{3.13}$$

рода m матрицы Q с коэффициентной формой $P = 1$.

Лемма 3.5. *Пусть Q четная неособая матрица четного порядка m и ступени d, и пусть $T' \in L_0^m(d)$ однородный элемент с $\mu(T') = \mu$. Тогда образ тета-функции (3.13) под действием оператора Гекке $|T'$ можно записать в виде*

$$(\Theta^m|T')(V,Z) = \sum_{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m} c(D,Q,T')\Theta(\mu D^{-1}V, Z; \mu^{-1}H[D], \mu^{-1}Q[D]) \qquad (3.14)$$

с некоторыми коэффициентами $c(D,Q,T)$, независящими от V, Z и H.

Доказательство. Если μ является степенью простого числа p, то формула (3.14) следует из теоремы 1 работы Андрианова [3]. Общий случай отсюда следует, поскольку, согласно Андрианову, Журавлеву ([13, гл. 3, теорема 3.12]) или Андрианову ([5, теорема 3.3.12]), каждый однородный T является суммой произведений однородных элементов мультипликаторы которых есть степени простых чисел. •

Лемма 3.6. *Коэффициенты $c\ (D,Q,T')$ в (3.14) удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m; D|N} c(D,Q,T') = I(N,Q,T') \qquad (3.15)$$

для каждой матрицы $N \in \mathbb{Z}_m^m$, где $I(N,Q,T')$ обозначает сумму взаимодействия (3.28).

Доказательство. Используя сокращение (2.30), правую часть соотношения (3.14) можно переписать в виде

$$\sum_{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m, N'\in\mathbb{Z}_m^m} c(D,Q,T')e(\mu D^{-1}V, Z, \mu^{-1}H[D], \mu^{-1}Q[D], N')$$
$$= \sum_{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m, N'\in\mathbb{Z}_m^m} c(D,Q,T')e(\mu V, Z, \mu^{-1}H, \mu^{-1}Q, DN')$$
$$= \sum_{N\in\mathbb{Z}_m^m}\left(\sum_{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m, D|N} c(D,Q,T')\right)e(\mu V, Z, \mu^{-1}H, \mu^{-1}Q, N).$$

С другой стороны, согласно (2.33), левая часть соотношения (3.14) может быть записана в виде

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}_m^m} I(N,Q,T')e(\mu V, Z, \mu^{-1}H, \mu^{-1}Q, N).$$

Сравнивая полученные разложения, мы получаем соотношения (3.15) на основании единственности коэффициентов Фурье голоморфной и периодической по $V_1 \in \mathbb{C}_m^m$ функции $(\Theta^m|T')((V_1,0),Z)$. •

Лемма 3.7. *Соотношения* (3.15) *с* $N = D' \in A(Q,\mu)$ *обращаются в равенства*

$$c(D',Q,T') = I(D',Q,T') \qquad (D' \in A(Q,\mu)). \tag{3.16}$$

Доказательство. Действительно, если $D \in A(Q,\mu)$ и $D \mid D'$, то $D' = DU$ с некоторой целочисленной матрицей U определителя $\det U = \det D/\det D' = \pm 1$, то есть $U \in \Lambda^m$. •

Доказательство теоремы 3.4. Соотношения (3.15) и (3.16) доказывают теорему в случае $n = m$.

Если $n > m$ и $N \in \mathbb{Z}_m^m$, то, как хорошо известно, существует матрица $U \in \Lambda^n$ такая, что $NU = (N',0)$ с $N' \in \mathbb{Z}_m^m$. Тогда на основании (3.1) и (3.8) мы имеем

$$I(N,Q,T) = I((N',0),Q,T) = I(N',Q,\Psi^{n,m}T).$$

Поскольку $T' = \Psi^{n,m}T \in L_0^m(d)$ и T' является однородным элементом с $\mu(T') = \mu(T)$, мы можем написать

$$I(N',Q,T') = \sum_{D \in A(Q,\mu)/\Lambda^m, D|N'} I(D,Q,T'),$$

что доказывает теорему в рассматриваемом случае, так как условия $D \mid N'$ и $D \mid N$, очевидно, эквивалентны.

Наконец, пусть $n < m$. Тогда, согласно (3.11), существует однородный элемент $T' = \Psi^{n,m}T \in L_0^m(d)$ с $\mu(T') = \mu(T)$, удовлетворяющий условию $\Psi^{m,n}T' = T$. По сказанному выше, для каждой матрицы $N \in \mathbb{Z}_n^m$ мы имеем соотношение

$$I((N,0),Q,T') = \sum_{D \in A(Q,\mu)/\Lambda^m; D|(N,0)} I(D,Q,T').$$

С другой стороны, на основании (3.8) мы заключаем, что

$$I((N,0),Q,T') = I(N,Q,\Psi^{m,n}T') = I(N,Q,T).$$

Доказываемое утверждение следует из этих соотношений, поскольку $D \mid (N,0)$ в том и только в том случае, если $D \mid N$. •

К сожалению, для доказательства элементарно формулируемой теоремы 3.4 нам пришлось использовать неэлементарную лемму 3.5, доказательство которой основано на сложной теории разложения стандартных многочленов Ранкина в параболических расширениях симплектических колец Гекке. Было бы очень интересно найти элементарное (и простое) доказательство этой теоремы.

Наконец, для будущих приложений мы сформулируем здесь важные соотношения композиции для сумм взаимодействия. Мы докажем эти соотношения в следующем параграфе, как приложение точных формул для действия операторов Гекке на тета-функции.

Предложение 3.8. *Пусть Q четная неособая матрица четного порядка m, ступени d и характера χ_Q. Пусть T, T' два однородных элемента кольца $L_0^n(d)$, где $n \geqslant 1$, причем $T \in \Psi^{m,n}(L_0^m(d))$, если $n < m$. Тогда для каждой матрицы $N \in \mathbb{Z}_n^m$ имеет место следующее соотношение*

$$I(N,Q,TT') = \sum_{\substack{(D,N')\in(A(Q,\mu)/\Lambda^m,\mathbb{Z}_n^m/\Lambda^n);\\ DN'\in N\Lambda^n}} I(D,Q,\Psi^{n,m}T)I(N',\mu^{-1}Q[D],T'), \tag{3.17}$$

где $\mu = \mu(T)$. В частности, если $n = m$ и $N \in A(Q,\mu\mu')$, где $\mu' = \mu(T')$, то

$$I(N,Q,TT') = \sum_{\substack{(D,N')\in(A(Q,\mu)/\Lambda^m,A(\mu^{-1}Q[D],\mu')/\Lambda^m),\\ DN'\in N\Lambda^m}} I(D,Q,T)I(N',\mu^{-1}Q[D],T'). \tag{3.18}$$

§4. Тета-формулы для операторов Гекке

В этом параграфе мы получим точные формулы, выражающие образы (2.20) гармонических тета-функций целочисленных неособых квадратичных форм от четного числа переменных под действием операторов Гекке в виде линейной комбинации с явно заданными коэффициентами аналогичных тета-функций (тета-формулы).

Теорема 4.1. *Пусть Q — четная неособая матрица четного порядка m, d — ступень матрицы Q, χ_Q — характер Дирихле по модулю d, определенный в теореме 1.1, и пусть H принадлежит пространству мажорант (0.7) матрицы Q. Пусть T — однородный элемент с $\mu(T) = \mu$ кольца Гекке $L_0^n(d)$, где $n \geqslant 1$, удовлетворяющий условию*

$$T \in \Psi^{m,n}(L_0^m(d)), \quad \text{если } n < m,$$

где $\Psi^{m,n}$ гомоморфизм Жарковской (3.3). Тогда образ (2.20) тета-функции $\Theta_P(V,Z;H,Q)$ пары Q,H рода n с гармонической коэффициентной формой P под действием оператора Гекке $|T$ является линейной комбинацией тета-функций вида

$$\Theta_P(V,Z;H,Q)|T = \sum_{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m} I(D,Q,\Psi^{n,m}T) \times \Theta_{P|\mu^{-1}D}(\mu D^{-1}V,Z;\mu^{-1}H[D],\mu^{-1}Q[D]), \tag{4.1}$$

где

$$(P|\mu^{-1}D)(U) = P(\mu^{-1}DU) \qquad (U \in \mathbb{C}_n^m) \tag{4.2}$$

и где другие обозначения те же, что и в теореме 3.4.

Доказательство. По предложению 2.1 мы можем записать левую часть соотношения (4.1) в виде

$$\sum_{N\in C^n(Q/\mu)} I(N,Q,T)P(\mu^{-1}(N-\mu V_2))e(\mu V,Z,\mu^{-1}H,\mu^{-1}Q;N),$$

где мы используем сокращение (2.30). Подставляя сюда выражение (3.12) для сумм взаимодействия $I(N,Q,T)$, мы получаем выражение

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m,\\ N\in\mathbb{Z}^m_n}} I(D,Q,\Psi^{n,m}T)\\ &\qquad\times P(\mu^{-1}(DN-\mu V_2))e(\mu V,Z,\mu^{-1}H,\mu^{-1}Q;DN)\\ &=\sum_{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m} I(D,Q,\Psi^{n,m}T)\\ &\qquad\times\sum_{N\in\mathbb{Z}^m_n} P(\mu^{-1}D(N-\mu D^{-1}V_2))\\ &\qquad\qquad\times e(\mu D^{-1}V,Z,\mu^{-1}H[D],\mu^{-1}Q[D];N),\end{aligned}$$

что доказывает формулу (4.1). •

В качестве приложения этой теоремы мы докажем предложение 3.7

Доказательство предложения 3.7. Применяя теорему в случае $P=1$, получаем

$$\begin{aligned}&\Theta(V,Z;H,Q)|T\\ &=\sum_{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m} I(D,Q,\Psi^{n,m}T)\\ &\qquad\times\Theta(\mu D^{-1}V,Z,\mu^{-1}H[D],\mu^{-1}Q[D]).\end{aligned}$$

Если теперь мы применим оператор $|T'$ к обеим частям этого соотношения, мы получим

$$\begin{aligned}\Theta(V,Z;H,Q)|T|T'&=\Theta(V,Z;HQ)|TT'\\ &=\sum_{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m} I(D,Q,\Psi^{n,m}T)(\Theta^D|T')(V,T),\end{aligned}\qquad(4.3)$$

где

$$\Theta^D(V,Z)=\Theta(\mu D^{-1}V,Z,\mu^{-1}H[D],\mu^{-1}Q[D]).$$

По предложению 2.1 мы имеем

$$\begin{aligned}&\Theta(V,Z;H,Q)|TT'\\ &=\sum_{N\in C^n(Q/\mu\mu')} I(N,Q,TT')e(\mu\mu'V,Z,(\mu\mu')^{-1}H,(\mu\mu')^{-1}Q;N)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(\Theta^D|T')(V,Z) &= \sum_{N'\in C^n(\mu^{-1}Q[D]/\mu')} I(N',\mu^{-1}Q[D],T')\\ &\qquad\times e(\mu\mu' D^{-1}V, Z, (\mu\mu')^{-1}H[D], (\mu\mu')^{-1}Q[D]; N')\\ &= \sum_{N'\in C^n(\mu^{-1}Q[D]/\mu')} I(N',\mu^{-1}Q[D],T')\\ &\qquad\times e(\mu\mu' V, Z, (\mu\mu')^{-1}H, (\mu\mu')^{-1}Q; DN')\end{aligned}$$

(см. (2.30)). Тогда соотношение (4.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\sum_{N\in\mathbb{Z}_n^m} I(N,Q,TT')e(\mu\mu' V, Z, (\mu\mu')^{-1}H, (\mu\mu')^{-1}Q; N)\\ &\qquad= \sum_{\substack{D\in A(Q,\mu)/\Lambda^m,\\ N'\in\mathbb{Z}_n^m}} I(D,Q,\Psi^{n,m}T)I(N',\mu^{-1}Q[D],T')\\ &\qquad\qquad\times e(\mu\mu' V, Z, (\mu\mu')^{-1}H, (\mu\mu')^{-1}Q; DN'),\end{aligned}$$

где мы расширили области суммирования по N и N' на основании (2.34). Если мы положим здесь $V_2 = 0$, сравним соответствующие коэффициенты Фурье голоморфной и периодической по V_1 функции $\Theta((V_1, 0), Z; H, Q)|TT'$ и используем (3.1), мы получим соотношения (3.17). Соотношения (3.18) следуют из (3.17), так как из условий $D \in A(Q,\mu)$, $N \in A(Q,\mu\mu')$ и $D \mid N$ следует, очевидно, что

$$N' = D^{-1}N \in A(\mu^{-1}Q[D],\mu'). \quad \bullet$$

§5. Гармонические тета-ряды

В этом параграфе мы снова предполагаем, что Q является четной неособой матрицей четного порядка m, (k,l) — сигнатура квадратичной формы с матрицей Q, и d обозначает ступень матрицы Q. Мы предполагаем также, что H является матрицей из пространства мажорант (0.7) матрицы Q и $P\colon \mathbb{C}_n^m \to \mathbb{C}^{ab}$ — некоторая $\rho_+ \otimes \rho_-$ гармоническая форма относительно пары Q, H с $n \geqslant 1$ в смысле §1.1.

Цель этого параграфа — вывести точные формулы преобразования под действием операторов Гекке для рядов вида

$$\begin{aligned}\Theta_P(Z;H,Q|R) &= \Theta_P((0,R),Z;H,Q)\\ &= \sum_{N\in\mathbb{Z}_n^m} P(N-R)e\{X\cdot Q[N-R] + \sqrt{-1}Y\cdot H[N-R]\}\end{aligned} \tag{5.1}$$

(см. (0.13)), где $R \in \mathbb{Q}_n^m$ является некоторой рациональной $m \times n$-матрицей. Эти ряды появляются при рассмотрении численных характеристик целочисленных представлений квадратичных форм квадратичными формами, удовлетворяющих конгруэнциальным условиям. Мы будем называть ряд (5.1) *тета-рядом пары Q, H рода n с коэффициентной формой P и с трансляцией R.*

Мы будем рассматривать тета-ряд (5.1) как элемент пространства $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, ab)$ всех вещественно аналитических функций $F\colon \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}^{ab}$. Если $F \in \mathcal{G}$ и $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — вещественная $2n \times 2n$-матрица, удовлетворяющая условию

$$ {}^t M J_n M = \mu(M) J_n \quad \text{с} \quad \mu(M) > 0 \qquad \left(J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \right), \tag{5.2} $$

мы полагаем

$$ \begin{aligned} F \circ M &= (F \circ M)(Z) \\ &= J_0(M, Z)^{-1} F((AZ + B)(CZ + D)^{-1}) \qquad (Z \in \mathbb{H}_n), \end{aligned} \tag{5.3} $$

где

$$ \begin{aligned} &J_0\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, Z \right) \\ &= (\det(CZ + D))^{(k-l)/2} |\det(CZ + D)|^l \rho_+(CZ + D) \otimes \rho_-(CZ + D) \end{aligned} \tag{5.4} $$

(ср. с (2.13) и (2.14)). Из (2.15) следует, что

$$ J_0(M, M_1\langle Z \rangle) J_0(M_1 Z) = J_0(M M_1, Z), $$

откуда для любых вещественных $2n \times 2n$-матриц M, M_1, удовлетворяющих условиям (5.2), получаем

$$ F \circ M \circ M_1 = F \circ (M M_1). $$

Для того чтобы определить действие операторов Гекке на тета-ряд (5.1), мы будем следовать общей схеме, изложенной в §2, исходя из действия (5.3) на $\mathcal{G}$ полугруппы

$$ S = S^n(h) = \left\{ M \in S_0^n(h) \, ; \, M \equiv \begin{pmatrix} \mu(M) 1_n & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \pmod{h} \right\} \tag{5.5} $$

(см. (2.11)) и соответствующей главной конгруэнц-подгруппы

$$ \Gamma = \Gamma^n(h) = \{ M \in \Gamma^n \, ; \, M \equiv 1_{2n} \pmod{h} \} \tag{5.6} $$

модулярной группы (1.6) с такими ступенями h, что функция $F(Z) = \Theta_P(Z; H, Q | R)$ содержится в подпространстве

$$ \mathcal{G}(\Gamma^n(h)) = \{ F \in \mathcal{G} \, ; \, F \circ M = F \text{ для всех } M \in \Gamma^n(h) \} \tag{5.7} $$

всех $\Gamma^n(h)$-инвариантных элементов из $\mathcal{G}$. Для нахождения таких ступеней мы сначала докажем лемму.

Лемма 5.1. *Для данных Q и R, пусть h — натуральное число, удовлетворяющее условиям*

$$hR \in \mathbb{Z}_n^m, \quad \text{и матрица } hQ[R] \text{ четна.} \tag{5.8}$$

Тогда для каждой пары целочисленных матриц C, D порядка n, удовлетворяющих условиям $(C, D) \equiv (0, 1_n) \pmod h$ и $D \cdot {}^tC = C \cdot {}^tD$, имеет место соотношение

$$\Theta_P((RC, RD), Z; H, Q) = \Theta_P((0, R), Z; H, Q).$$

Доказательство. По определению (см. (0.12)) имеем

$$\begin{aligned}&\Theta_P((RC, RD), Z; H, Q)\\&= \sum_{N \in \mathbb{Z}_n^m} P(N - RD)\\&\qquad \times e\{X \cdot Q[N - RD] + iY \cdot H[N - RD] + 2 \cdot {}^t(RC)QN - {}^t(RC)QRD\}.\end{aligned}$$

Так как h делит C и матрица hR является целочисленной, то матрица $2^t(RC)QN$ имеет четный след. След матрицы ${}^t(RC)QRD = {}^tCQ[R]D$ тоже четен, поскольку он равен следу матрицы $Q[R]D \cdot {}^tC = hQ[R]h^{-1}C \cdot {}^tD$, матрица $hQ[R]$ четна, а матрица $h^{-1}C^tD$ является целочисленной и симметрической. Отсюда следует, что последний ряд равен ряду

$$\sum_{N \in \mathbb{Z}_n^m} P(N - RD)e\{X \cdot Q[N - RD] + iY \cdot H[N - RD]\}.$$

Так как $N - RD = N + R(1_n - D) - R$ и матрица $R(1_n - D) = hR(h^{-1}(1_n - D))$ является целочисленной, то последняя сумма совпадает с $\Theta_P((0, R), Z; H, Q)$. •

Теперь мы можем доказать следующее предложение.

Предложение 5.2. *Пусть Q — неособая четная матрица четного порядка m, пусть $R \in \mathbb{Q}_n^m$, и пусть h — целое положительное число, удовлетворяющее следующим трем условиям:*

$$hR \in \mathbb{Z}_n^m, \quad \text{матрица } hQ[R] \text{ четна, } h \text{ делится на } d, \tag{5.9}$$

где d обозначает ступень матрицы Q. Тогда тета-ряд (5.1) удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Theta_P((AZ + B)(CZ + D)^{-1}; H, Q|R) = J_0(M, Z)\Theta_P(Z; H, Q|R)$$

для каждой матрицы $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma^n(h)$, где J_0 — фактор автоморфности (5.4).

Доказательство. Так как h делится на d, то $M \in \Gamma^n(d)$, и поэтому, согласно теореме 1.1,

$$\begin{aligned}\Theta_P(M\langle Z\rangle; H, Q|R) &= \Theta_P(((0, R) \cdot {}^tM^{-1}) \cdot {}^tM, M\langle Z\rangle; H, Q)\\&= J_0(M, Z)\Theta_P((0, R) \cdot {}^tM^{-1}, Z; H, Q),\end{aligned}$$

где $M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$. Так как $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = {}^tM^{-1} \in \Gamma^n(h)$ и h удовлетворяет условиям (5.8), то по лемме 5.1 мы можем написать

$$\begin{aligned}&\Theta_P((0,R)\cdot {}^tM^{-1}, Z; H, Q)\\ &\quad = \Theta_P((RC_1, RD_1), Z; H, Q) = \Theta_P((0,R), Z; H, Q)\\ &\quad = \Theta_P(Z; H, Q|R). \quad \bullet\end{aligned}$$

Предложение показывает, что тета-ряд (5.1) принадлежит пространству (5.7) как только h удовлетворяет условиям (5.9). Вообще говоря, такие h больше чем ступень d матрицы Q. Однако во многих важных случаях можно взять $h = d$. Например, если

$$L \in \mathbb{Z}_n^m \quad \text{и} \quad QL \equiv 0 \pmod d,$$

то

$$\Theta_P(Z; H, Q|d^{-1}L) \in \mathcal{G}(\Gamma^n(d)). \tag{5.10}$$

Действительно, достаточно проверить, что матрица $dQ[d^{-1}L] = d^{-1}Q[L]$ является четной. Но из условий на L следует, что $L = dQ^{-1}L_1$ с целочисленной матрицей L_1, и поэтому матрица $d^{-1}Q[L] = (dQ^{-1})[L_1]$ является четной, поскольку по определению ступени четна матрица dQ^{-1}.

Мы фиксируем целое положительное число h, удовлетворяющее условиям (5.9). Согласно Андрианову ([5, лемма 3.3.1]) пара $\Gamma^n(h)$, $S^n(h)$ является l-конечной, и поэтому можно определить кольцо Гекке

$$L^n(h) = D_{\mathbb{C}}(\Gamma^n(h), S^n(h))$$

этой пары над $\mathbb{C}$, которое называется *кольцом Гекке группы* $\Gamma^n(h)$ (*над* $\mathbb{C}$), и линейное представление

$$L^n(h) \ni T = \sum_i a_i(\Gamma^n(h)M_i)\colon F \longrightarrow F\circ T = \sum_i a_i F\circ M_i$$

этого кольца на пространстве $\mathcal{G}(\Gamma^n(h))$, задаваемое *операторами Гекке*. Мы выведем точные формулы для действия операторов Гекке $\circ T$ с $T \in L^n(h)$ на тета-ряды (5.1) из формул (4.1) для подходящих операторов $|T'$ с $T' \in L_0^n(h)$. Для перевода операторов Гекке с языка группы $\Gamma_0^n(h)$ на язык группы $\Gamma^n(h)$ и обратно, мы кратко опишем связи соответствующих колец Гекке. По поводу деталей и доказательств см. Андрианов ([5, §3.3, особенно теорема 3.3.3, лемма 3.3.4 и лемма 3.3.5]), или Андрианов, Журавлев ([13, гл.3, §3, теорема 3.3, лемма 3.4, и лемма 3.5]).

Так как d делит h, то

$$\begin{aligned}S_0^n(d,h) &= \{M \in S_0^n(d),\ \gcd(\mu(M), h) = 1\}\\ &= \Gamma_0^n(d)S^n(h) = S^n(h)\Gamma_0^n(d).\end{aligned} \tag{5.11}$$

Пара $\Gamma_0^n(d)$, $S_0^n(d,h)$ является, очевидно, l-конечной и соответствующее кольцо Гекке

$$L_0^n(d,h) = D_{\mathbb{C}}(\Gamma_0^n(d), S_0^n(d,h))$$

естественно является подкольцом кольца $L_0^n(d)$,

$$L_0^n(d,h) \subset L_0^n(d),$$

поскольку $S_0^n(d,h) \subset S_0^n(d)$. Пусть

$$T' = \sum_i a_i(\Gamma_0^n(d)M_i) \in L_0^n(d,h).$$

Согласно (5.11), не умаляя общности, мы можем предположить, что все представители M_i из левых классов $\Gamma_0^n(d)M_i$ содержатся в $S^n(h)$.

Тогда мы, очевидно, имеем

$$T = \eta(T') = \sum_i a_i(\Gamma^n(h)M_i) \in L^n(h),$$

и отображение η является гомоморфным вложением кольца $L_0^n(d,h)$ в $L^n(h)$. На самом деле η является изоморфизмом колец и обратный изоморфизм

$$\zeta\colon L^n(h) \to L_0^n(d,h)$$

определяется условием

$$\zeta\colon L^n(h) \supset \sum_j b_j(\Gamma^n(h)N_j) \to \sum_j b_j(\Gamma_0^n(d)N_j).$$

Используя изоморфизм колец Гекке, мы можем перенести определение рассмотренных в §3 сумм взаимодействия на элементы T из $L^n(h)$, полагая

$$I(N,Q,T) = I(N,Q,\zeta(T)) \qquad (N \in \mathbb{Z}_n^m, T \in L^n(h)). \tag{5.12}$$

Мы можем так же перенести определенный выше гомоморфизм Жарковской (3.3) на кольцо $L^n(h)$: для $1 \leqslant r \leqslant n$ мы определим гомоморфизм

$$\Psi^{n,r} = \Psi_Q^{n,r}\colon L^n(h) \to L^r(h), \tag{5.13}$$

исходя из условия коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_0^n(d,h) & \xrightarrow{\eta} & L^n(h) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi^{n,r}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi^{n,r}} \\ L_0^n(d,h) & \xrightarrow{\eta} & L^r(h) \end{array} \tag{5.14}$$

(Отметим, что, очевидно, $\Psi^{n,r}(L_0^n(d,h)) \subset L_0^r(d,h)$).

Основной результат этого параграфа можно теперь сформулировать в следующем виде.

Теорема 5.3. *Пусть Q — четная неособая матрица четного порядка m и ступени d, и пусть $H \in \mathcal{H}(Q)$. Пусть $\Theta_P(Z; H, Q|R)$ — тета-ряд (5.1) рода $n \geqslant 1$ пары Q, H с гармонической формой P и рациональной трансляцией R. Наконец, пусть h — целое положительное число, удовлетворяющее условиям (5.9) относительно Q и R, и*

$$T = \sum_i a_i(\Gamma^n(h)M_i)$$

— некоторый элемент кольца Гекке $L^n(h)$, где матрицы $M_i \in S^n(h)$ имеют фиксированный мультипликатор $\mu(M_i) = \mu$ и такой, что

$$T \in \Psi^{m,n}(L^m(h)), \quad \text{если } m > n,$$

где $\Psi^{m,n}$ обозначает отображение Жарковской (5.13). Тогда образ этого тета-ряда под действием оператора Гекке $\circ T$, определяемого равенством

$$\Theta_P(Z; H, Q|R) \circ T = \sum_i a_i J_0(M_i, Z)^{-1} \Theta_P(M_i\langle Z\rangle; H, Q|R)$$

(см. (5.3) и (5.4)), равен сумме

$$= \sum_{D \in A(Q,\mu)/\Lambda^m} I(D, Q, \Psi^{n,m}T)\Theta_{P|\mu^{-1}D}(Z; \mu^{-1}H[D], \mu^{-1}Q[D]|\mu D^{-1}R), \tag{5.15}$$

где $\Lambda^m = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$,

$$A(Q, \mu) = \{\, D \in \mathbb{Z}_m^m \,;\, |\det D| = \mu^{m/2}, \text{ матрица } \mu^{-1}Q[D] \text{ четна} \,\},$$

$I(\dots)$ обозначают суммы взаимодействия (5.12), $\Psi^{n,m}$ с $n \geqslant m$ обозначает отображение Жарковской (5.13), а $\Psi^{n,m}T$ с $n < m$ обозначает некоторую линейную комбинацию левых классов $(\Gamma^m(h)M_j')$ с $\mu(M_j') = \mu$, принадлежащую прообразу $(\Psi^{m,n})^{-1}T \in L^m(h)$, и где $(P|\mu^{-1}D)(U) = P(\mu^{-1}DU)$.

Доказательство. По формуле (4.1) для

$$T' = \zeta(T) = \sum_i a_i(\Gamma_0^n(d)M_i) \in L_0^n(d, h) \subset L_0^n(d)$$

и $V = (0, R)$ мы получаем формулу

$$\sum_i a_i J(M_i, Z)^{-1} \Theta_P((0, R) \cdot {}^tM_i, M_i\langle Z\rangle; H, Q)$$
$$= \sum_{D \in A(Q,\mu)/\Lambda^m} I(D, Q, \Psi^{n,m}T')$$
$$\times \Theta_{P|\mu^{-1}D}(\mu D^{-1}(0, R), Z; \mu^{-1}H[D], \mu^{-1}Q[D]). \tag{5.16}$$

Так как все M_i содержатся в $S^n(h)$, то из (2.14), (5.4) и леммы 5.1 следует, что $J(M_i, Z) = J_0(M_i, Z)$ и

$$\Theta_P((0,R)\cdot {}^tM_i, M_i\langle Z\rangle; H, Q) = \Theta_P(M_i\langle Z\rangle; H, Q|R).$$

Отсюда следует, что левая часть равенства (5.16) равна $\Theta_P(Z; H, Q|R)\circ T$. Что же касается правой части, то она совпадает с суммой (5.15), поскольку, согласно (5.12) и коммутативности диаграммы (5.14), мы имеем

$$I(D, Q, \Psi^{n,m}T') = I(D, Q, \Psi^{n,m}T). \quad \bullet$$

Замечание 5.4. *Так как числа* $\det Q$ *и* μ *взаимно просты, то легко видеть, что матрица* μD^{-1} *содержится в* $A(Q,\mu)$ *для каждого* $D \in A(Q,\mu)$. *В частности, матрица* $\mu\ D^{-1}$ *целочисленна.*

Список литературы

[1] Андрианов А. Н., *Мультипликативная арифметика зигелевых модулярных форм*, Успехи мат. наук **34** (1979), № 1, 67–135.

[2] Andrianov A. N., *Integral representations of quadratic forms by quadratic forms: multiplicative properties*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Warsaw, 1983), Vol. 1, PWN, Warsaw, 1984, pp. 465–474.

[3] Андрианов А. Н., *Действие операторов Гекке на неоднородные тэта-ряды*, Мат. сб. **131** (1986), № 3, 275–292.

[4] Андрианов А. Н., *Вычисление коэффициентов в формулах преобразования неоднородных тета-рядов под действием операторов Гекке*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **160** (1987), 9–15.

[5] Andrianov A. N., *Quadratic forms and Hecke operators*, Grundlehren Math. Wiss., **286**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1987.

[6] Андрианов А. Н., *Сферические тета-ряды*, Мат. сб. **134** (1987), № 3, 291–305.

[7] Андрианов А. Н., *Мультипликативные свойства решений квадратичных диофантовых задач*, Алгебра и анализ **2** (1990), № 1, 3–46.

[8] Андрианов А. Н., *Композиция решений квадратичных диофантовых уравнений*, Успехи мат. наук **46** (1991), № 2, 3–40.

[9] Andrianov A. N., *Queen's lectures on arithmetical composition of quadratic forms*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math., **92**, Queen's Univ., Kingston, ON, 1992.

[10] Андрианов А. Н., *Мультипликативные разложения целочисленных представлений бинарных квадратичных форм*, Алгебра и анализ **5** (1993), № 1, 81-108.

[11] Андрианов А. Н., *Симметрии гармонических тета-функций целочисленных квадратичных форм*, Успехи мат. наук **50** (1995), № 4, 3–44.

[12] Андрианов А. Н., Малолеткин Г. Н., *Поведение тета-рядов рода n неопределенных квадратичных форм при модулярных подстановках*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **148** (1978), 5–15.

[13] Андрианов А. Н., Журавлев В. Г., *Модулярные формы и операторы Гекке*, Наука, М., 1990.

[14] Freitag E., *Die Invarianz gewisser von Thetareihen erzeugter Vektorräume unter Heckeoperatoren*, Math. Z. **156** (1977), 141–155.

[15] Freitag E., *Berichtigung zu: «Die Invarianz gewisser von Thetareihen erzeugter Vektorräume unter Heckeoperatoren»*, Math. Z. **168** (1979), 289–290.

[16] Freitag E., *Eine Bemerkung zu Andrianovs expliziten Formeln für die Virkung der Heckeoperatoren auf Thetareihen*, E. B. Christoffel (Aachen/Monschau, 1979), Birkhäuser, Basel–Boston, MA, 1981, pp. 336–351.

[17] Freitag E., *Die Wirkung von Heckeoperatoren auf Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten*, Math. Ann. **258** (1981/82), 419-440.

[18] Freitag E., *Singular modular forms and theta relations*, Lecture Notes in Math., **1487**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[19] Gauss C. F., *Disquisitiones arithmeticae*, Carl Friedrich Gauss Werke, Bd. 1, Fleischer, Leipzig, 1870.

[20] Hecke E., *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung.* I, II, Math. Ann. **114** (1937), 1-28, 316-351; Mathematische Werke, Vandenhoek and Ruprecht, Göttingen, 1959, pp. 644-707.

[21] Hecke E., *Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen*, Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd. **17** (1940), no. 12, 134 p.; Mathematische Werke, Vandenhoek and Ruprecht, Göttingen, 1959, pp. 789-918.

[22] Линник Ю. В., *Кватернионы и числа Кели; некоторые приложения арифметики кватернионов*, Успехи мат. наук **4** (1949), № 5, 49-98.

[23] Maass H., *Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen*, Math. Ann. **124** (1951), 87-122.

[24] Petersson H., *Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung.* I, II, III, Math. Ann. **116** (1939), 401-412; ibid., **117** (1939/40), 39-64, 277-300.

[25] Schoeneberg B., *Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen*, Math. Ann. **116** (1939), 511-533.

[26] Siegel C. L., *On the theory of indefinite quadratic forms*, Ann. of Math. (2) **45** (1944), 577-622; Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966, pp. 421-466.

[27] Siegel C. L., *Lectures on quadratic forms*, Notes by K. G. Ramanathan, Tata Inst. Fund. Res. Lectures on Math., 7, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1967.

[28] Shimura G., *On modular forms of half integral weight*, Ann. of Math. (2) **97** (1973), 440-481.

[29] Sugawara M., *On the transformation theory of Siegel's modular group of the n-th degree*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **13** (1937), 335-338.

[30] Sugawara M., *An invariant property of Siegel's modular function*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **14** (1938), 1-3.

[31] Wohlfahrt K., *Über Operatoren Heckescher Art bei Modulformen reeller Dimension*, Math. Nachr. **16** (1957), 233-256.

[32] Журавлев В. Г., *Представление колец Гекке на тета-рядах нечетных квадратичных форм*, Теория чисел и ее приложения (Тбилиси, 1985): Тезисы докл. Всесоюз. конф., ТГУ, Тбилиси, 1985, сс. 81-82.

[33] Журавлев В. Г., *Обобщенные матрицы Эйхлера-Брандта, операторы Гекке и векторные тета-ряды*, Алгебра и анализ **5** (1993), № 3, 143-178.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: anandr@pdmi.ras.ru

Поступило 15 мая 1996 г.