Б. С. Луняков, Об одной модели экономики с истощающимися природными ресурсами,
Автомат. и телемех., 1977, выпуск 8, 104–112

УДК 330.115

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С ИСТОЩАЮЩИМИСЯ ПРИРОДНЫМИ РЕСУРСАМИ

Б. С. ЛУНЯКОВ

(Москва)

Рассматривается двухотраслевая модель экономики. Истощение природных ресурсов учитывается за счет уменьшения эффективности работы соответствующей отрасли с ростом уровня добытого ресурса. С использованием предположения об оптимальном взаимодействии отраслей определяется распределение трудовых ресурсов и основных фондов по отраслям, что позволяет получить агрегированное описание модели. При некоторых упрощающих предположениях исследовано асимптотическое поведение динамической модели при различных гипотезах об истощении природных ресурсов.

1. Введение

При построении и исследовании экономических моделей обычно в явной или неявной форме предполагается, что природные ресурсы неограниченны и условия их добычи неизменны. Такое предположение при все возрастающей интенсивности добычи ресурсов представляется недостаточно реалистичным. В последнее время появился ряд работ, в которых учитывается влияние истощения природных ресурсов. Так, истощение природных ресурсов учитывается в [1–4].

В данной работе рассматривается двухотраслевая модель экономики, близкая к моделям, используемым в [1, 2]. Добыча ресурсов выделена в самостоятельную отрасль, при этом эффективность ее работы зависит от количества выработанного ресурса.

С использованием предположения об оптимальном взаимодействии отраслей определяется распределение трудовых ресурсов и основных фондов по отраслям, что позволяет получить зависимость национального дохода от суммарных основных фондов и трудовых ресурсов и от количества выработанного ресурса. Тем самым имеем описание двухотраслевой модели в форме одноотраслевой.

Затем строится динамическая модель экономики, учитывающая динамику развития факторов, определяющих национальный доход, и при некоторых упрощающих предположениях исследуется ее асимптотическое поведение при постоянной норме накопления и при различных гипотезах об истощении природных ресурсов.

2. Описание статической модели

Рассматривается модель экономики, состоящая из двух отраслей: ресурсной и перерабатывающей. Предполагается следующая схема взаимодействия отраслей. В ресурсной отрасли происходит добыча ресурса, часть которого поступает в перерабатывающую отрасль. Перерабатывающая отрасль, используя поступающий ресурс, осуществляет выпуск конечного продукта.

Будем предполагать, что при основных фондах K_1 и трудовых ресурсах L_1, используемых в перерабатывающей отрасли, возможен выпуск конечного продукта

$$Y=F_1(K_1, L_1, t), \tag{1}$$

но для этого необходимы поставки ресурса в количестве

$$r_1=\lambda(t)Y, \tag{2}$$

где $\lambda(t)$ — норма потребления ресурса, которая изменяется в силу научно-технического прогресса.

О производственной функции $F_1(K, L, t)$ будем предполагать, что она обладает следующими свойствами:

1) $F_1(0, L, t)=F_1(K, L, t)=0$,

2) $\dfrac{\partial F_1}{\partial K}>0, \quad \dfrac{\partial F_1}{\partial L}>0$,

3) $\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial L^2}\leqslant 0, \quad \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial K^2}\leqslant 0, \quad \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial K\,\partial L}\geqslant 0, \quad \left(\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial K\,\partial L}\right)^2-\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial K^2}\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial L^2}\leqslant 0,$

т. е. $F_1(K, L, t)$ — неотрицательная, монотонно возрастающая и выпуклая по K и L функция.

Рассмотрим ресурсную отрасль. В зависимости от используемых основных фондов K_2 и трудовых ресурсов L_2 в ресурсной отрасли может быть произведен объем работ

$$W=F_2(K_2, L_2, t),$$

где F_2 — производственная функция, обладающая теми же свойствами, что и F_1.

При таком объеме работ в зависимости от количества уже добытого ресурса R добывается

$$r=\frac{W}{\varphi(R)}=\frac{F_2(K_2, L_2, t)}{\varphi(R)}, \tag{3}$$

где $\varphi(R)$ — объем работ, необходимый для добычи единицы ресурса.

Поясним физический смысл (3). Предполагается, что при одном и том же объеме работ, определяемом основными фондами K_2 и трудовыми ресурсами L_2, с ростом уровня уже добытого ресурса R поток добываемого ресурса уменьшается, что и учитывается с помощью возрастающей положительной функции $\varphi(R)$. Заметим, что аналогичные зависимости используются в [1, 2].

Добываемый ресурс потребляется ресурсной и перерабатывающей отраслями, т. е.

$$r=r_1+r_2. \tag{4}$$

При этом будем предполагать, что потребление в ресурсной отрасли определяется производимым объемом работ

$$r_2=\gamma(t)W=\gamma(t)F_2(K_2, L_2, t), \tag{5}$$

где $\gamma(t)$ — норма потребления, изменяющаяся в силу научно-технического прогресса.

При такой схеме взаимодействия отраслей без учета амортизации национальный доход равен конечному выпуску перерабатывающей отрасли.

Учтем ограничения на трудовые ресурсы и основные фонды. Пусть $L(t)$ и $K(t)$ — трудовые ресурсы и основные фонды экономики в момент

времени t. Предполагая их полное использование, получаем

$$K_1(t)+K_2(t)=K(t), \tag{6}$$

$$L_1(t)+L_2(t)=L(t). \tag{7}$$

Функции $\lambda(t)$, $\gamma(t)$ и $\varphi(R)$ в дальнейшем предполагаются известными. Тогда система (1)—(7) в каждый момент времени при соответствующих значениях K, L и R определяет возможные выпуски отраслей. Неоднозначность выпусков определяется неоднозначностью распределения основных фондов и трудовых ресурсов по отраслям.

Предполагая, что распределение по отраслям осуществляется не произвольным, а в некотором смысле оптимальным образом, рассмотрим вопрос определения оптимального распределения. Заметим, что предположение об оптимальности распределения позволяет получить описание двухотраслевой модели в форме одноотраслевой.

3. Распределение трудовых ресурсов и основных фондов

Из балансового уравнения (4) следует, что

$$\lambda(t)F_1(K_1, L_1, t)-\left(\frac{1}{\varphi(R)}-\gamma(t)\right)F_2(K_2, L_2, t)=0. \tag{8}$$

Уравнения (6)—(8) определяют область допустимых распределений трудовых ресурсов и основных фондов.

Будем предполагать, что в каждый момент времени t при соответствующих значениях K, L и R распределение основных фондов и трудовых ресурсов выбирается так, чтобы национальный доход был максимальным.

Тогда распределение K_1, L_1, K_2, L_2 является решением задачи максимизации (1) при условиях (6)—(8).

Рассмотрим эту задачу. Исключив K_2 и L_2 из системы ограничений, получаем

$$\lambda(t)F_1(K_1, L_1, t)-\left(\frac{1}{\varphi(R)}-\gamma(t)\right)F_2(K-K_1, L-L_1, t)=0. \tag{9}$$

При сделанных выше предположениях о функциях $F_1(K_1, L_1, t)$ и $F_2(K_2, L_2, t)$ в силу теоремы о неявной функции данное уравнение разрешимо относительно K_1, т. е. существует однозначная функция

$$K_1=\Phi(L_1, K, L, R, t), \tag{10}$$

обращающая (9) в тождество. При этом

$$\frac{\partial\Phi}{\partial L_1}=-\left[\frac{\lambda(t)\frac{\partial F_1}{\partial L_1}+\left(\frac{1}{\varphi(R)}-\gamma(t)\right)\frac{\partial F_2}{\partial L_2}}{\lambda(t)\frac{\partial F_1}{\partial K_1}+\left(\frac{1}{\varphi(R)}-\gamma(t)\right)\frac{\partial F_2}{\partial K_2}}\right]_{\substack{K_2=K-K_1\\L_2=L-L_1}}. \tag{11}$$

Подставив (10) в (1), находим

$$Y=F_1(\Phi(L_1, K, L, R, t), L_1, t).$$

Максимизируя национальный доход по L_1, получаем для оптимального значения L_1^* уравнение

$$\frac{\partial F_1}{\partial K_1}\frac{\partial\Phi}{\partial L_1}+\frac{\partial F_1}{\partial L_1}=0, \tag{12}$$

решение которого

$$L_1^*=\Psi(K, L, R, t) \tag{13}$$

лежит внутри $[0, L]$, поскольку Y обращается в нуль как при $L_1=0$, так и при $L_1=L$. Единственность решения следует из отрицательности второй производной.

Подставив (13) в (10), получаем оптимальное значение

$$K_1^*=\Omega(K, L, R, t). \tag{14}$$

Отметим следующее свойство оптимального распределения. Из (11) и (12) следует

$$\left[\frac{\dfrac{\partial F_1(K_1, L_1, t)}{\partial L_1}}{\dfrac{\partial F_1(K_1, L_1, t)}{\partial K_1}}\right]_{\substack{K_1=K_1^* \\ L_1=L_1^*}} = \left[\frac{\dfrac{\partial F_2(K_2, L_2, t)}{\partial L_2}}{\dfrac{\partial F_2(K_2, L_2, t)}{\partial K_2}}\right]_{\substack{K_2=K-K_1^* \\ L_2=L-L_1^*}}, \tag{15}$$

т. е. при оптимальном распределении предельные нормы замещения в обеих отраслях одинаковы.

Используя это свойство, можно найти оптимальное распределение, рассматривая уравнения (9), (15) как систему уравнений относительно K_1, L_1.

Подставив (13), (14) в (1), получим производственную функцию

$$Y=F(K, L, R, t),$$

связывающую национальный доход с суммарными основными фондами и трудовыми ресурсами и с количеством уже добытого ресурса. Тем самым получаем описание двухотраслевой модели в форме одноотраслевой. Используя формулы дифференцирования неявной функции, можно показать, что при сделанных предположениях о свойствах $F_1(K_1, L_1, t)$ и $F_2(K_2, L_2, t)$ функция $F(K, L, R, t)$ обладает теми же свойствами, т. е. $F(K, L, R, t)$ — неотрицательная, монотонно возрастающая и выпуклая по K и L функция.

Пример. Пусть F_1 и F_2 — производственные функции типа Кобба — Дугласа с экзогенным научно-техническим прогрессом

$$F_1=AK_1^{\alpha}L_1^{1-\alpha}f_1(t),$$

$$F_2=BK_2^{\beta}L_2^{1-\beta}f_2(t).$$

Тогда уравнения (9), (15) принимают вид

$$\lambda(t)Af_1(t)\frac{K_1^{\alpha}}{(K-K_1)^{\beta}}=B\left(\frac{1}{\varphi(R)}-\gamma(t)\right)f_2(t)\frac{(L-L_1)^{1-\beta}}{L_1^{1-\alpha}},$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K_1}{L_1}=\frac{1-\beta}{\beta}\frac{K-K_1}{L-L_1}.$$

Отметим, что последнее уравнение определяет связь между фондовооруженностями при оптимальном распределении трудовых ресурсов и основных фондов.

Из полученной системы уравнений следует, что оптимальное значение L_1^* является решением уравнения

$$\omega^{\alpha}K^{\alpha-\beta}-\frac{L-L_1}{L_1}[L-(1-\omega)L_1]^{\alpha-\beta}h(R, t)=0,$$

а оптимальное значение K_1^* – решением уравнения

$$L^{\beta-\alpha}-\omega^{1-\beta}\frac{K-K_1}{K_1}[\omega K+(1-\omega)K_1]^{\beta-\alpha}h(R, t)=0,$$

где

$$\omega=\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}, \qquad h(R, t)=\frac{Bf_2(t)[1-\gamma(t)\varphi(R)]}{Af_1(t)\lambda(t)\varphi(R)}.$$

В частном случае при $\alpha=\beta$ получаем

$$L_1^*=\frac{h(R,t)}{1+h(R,t)}L, \qquad K_1^*=\frac{h(R,t)}{1+h(R,t)}K$$

и, следовательно,

$$L_2^*=\frac{1}{1+h(R,t)}L, \qquad K_2^*=\frac{1}{1+h(R,t)}K.$$

Для национального дохода имеем выражение

$$Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}f_1(t)\frac{h(R,t)}{1+h(R,t)},$$

которое может быть представлено в виде

$$Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}f_1(t)-\frac{Af_1(t)\varphi(R)}{Bf_2(t)}r,$$

где r — интенсивность добычи ресурсов.

4. Динамическая модель и предельные темпы роста

Дополним описание модели уравнениями, учитывающими динамические процессы развития основных факторов, определяющих национальный доход.

Поскольку r есть поток добываемых ресурсов, то $\dot{R}=r$ и, используя уравнения (1)—(5), получаем

$$\dot{R}=\lambda(t)[1-\gamma(t)\varphi(R)]^{-1}Y.$$

Пусть u — доля накопления (доля национального дохода, выделяемая на капитальные вложения). Тогда без учета амортизации $\dot{K}=uY$.

О количестве трудовых ресурсов будем предполагать, что это известная функция времени.

Тогда уравнения динамической модели имеют вид

$$\begin{aligned} &Y=F(K,L,R,t),\\ &\dot{R}=\frac{\lambda(t)}{1-\gamma(t)\varphi(R)}Y, \qquad R(0)=R_0,\\ &\dot{K}=uY, \quad K(0)=K_0, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\lambda(t)$, $\gamma(t)$, $L(t)$, $\varphi(R)$ — известные функции.

Проведем анализ этих уравнений при следующих упрощающих предположениях:

а) функции F_1 и F_2 — функции Кобба — Дугласа с учетом научно-технического прогресса и с $\alpha=\beta$,

б) темпы роста научно-технического прогресса и роста трудовых ресурсов постоянны

$$f_1(t)=e^{\nu_1 t}, \quad f_2(t)=e^{\nu_2 t}, \quad L(t)=L_0e^{nt},$$

в) нормы потребления ресурса и нормы накопления постоянны

$$\lambda(t)=\lambda, \quad \gamma(t)=\gamma, \quad u(t)=u,$$

г) функция $\varphi(R)$ такова, что $\varphi(R)\to\infty$ при $R\to\infty$.

Пусть $\gamma>0$. Тогда с ростом R найдется такое $\bar{R}$, что $\varphi(R)=1/\gamma$. При достижении такого уровня добытого ресурса все основные фонды и трудовые ресурсы используются в ресурсной отрасли, весь добываемый ресурс потребляется самой ресурсной отраслью, национальный доход равен нулю. Таким образом, при $\gamma>0$ либо будет достигнут такой уровень добытого ресурса, при котором модель не сможет функционировать,

либо этого не произойдет в конечный момент времени, но тогда национальный доход $Y(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и интегральный национальный доход ограничен

$$\int_0^t Y(\tau)\,d\tau<\lambda\bar{R}.$$

Исследуем теперь асимптотическое поведение системы при $\gamma=0$ при различных предположениях о виде функции $\varphi(R)$.

Случай А. $\varphi(R)=aR^{\sigma}$ $(a>0,\ \sigma>0)$.

В этом случае система уравнений (16) принимает вид

$$Y=AL_0^{1-\alpha}K^{\alpha}e^{\mu t}\frac{BR^{-\sigma}}{BR^{-\sigma}+\lambda aAe^{\delta t}},$$

(17)

$$\dot{K}=uY,\quad K(0)=K_0,\quad \dot{R}=\lambda Y,\quad R(0)=R_0,$$

где $\mu=\nu_1+(1-\alpha)n$, $\delta=\nu_1-\nu_2$.

Пусть начальные условия таковы, что $\lambda K_0=uR_0$. Тогда из данной системы получаем, что темп роста национального дохода

$$\theta=\frac{\dot{Y}}{Y}=u\sigma\left(\frac{\alpha}{\sigma}-\frac{1}{g(K,t)}\right)\frac{Y}{K}+\delta\left(\frac{\mu}{\delta}-\frac{1}{g(K,t)}\right), \tag{18}$$

где

$$g(K,t)=Bu^{\sigma}a^{-1}\lambda^{-1-\sigma}K^{-\sigma}e^{-\delta t},$$

и

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{Y}\right)=u\sigma\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}+\frac{\mu}{\delta}\right)-\left(\frac{\mu}{\delta}-\frac{1}{g(K,t)}\right)\left(u\sigma+\delta\frac{K}{Y}\right). \tag{19}$$

Из последнего уравнения в силу положительности функции $g(K,t)$ следует, что $K(t)/Y(t)$ заключено между решениями дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1=u\sigma\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}+\frac{\mu}{\delta}\right)-\frac{\mu}{\delta}(u\sigma+\delta z_1),$$

$$\dot{z}_2=u\sigma\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}+\frac{\mu}{\delta}\right)+\left(1-\frac{\mu}{\delta}\right)(u\sigma+\delta z_2).$$

Интегрируя эти уравнения и переходя к пределу при $t\to\infty$, находим

$$u\min\left[\frac{1-\alpha}{\nu_1+(1-\alpha)n};\frac{1-\alpha+\sigma}{\nu_2+(1-\alpha)n}\right]\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{K(t)}{Y(t)}\leqslant$$

$$\leqslant u\max\left[\frac{1-\alpha}{\nu_1+(1-\alpha)n};\frac{1-\alpha+\sigma}{\nu_2+(1-\alpha)n}\right].$$

Учитывая, что $\dot{K}=uY$, получаем

$$\min\left[\frac{\nu_1+(1-\alpha)n}{1-\alpha};\frac{\nu_2+(1-\alpha)n}{1-\alpha+\sigma}\right]\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{K}}{K}\leqslant$$

$$\leqslant\max\left[\frac{\nu_1+(1-\alpha)n}{1-\alpha};\frac{\nu_2+(1-\alpha)n}{1-\alpha+\sigma}\right],$$

что позволяет оценить логарифмическую производную функции

$$-\sigma\max\left[\frac{\nu_1+(1-\alpha)n}{1-\alpha};\frac{\nu_2+(1-\alpha)n}{1-\alpha+\sigma}\right]-(\nu_1-\nu_2)\leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} \ln g(K(t), t) \leqslant$$

$$\leqslant -\sigma \min\left[\frac{\nu_1+(1-\alpha)n}{1-\alpha}; \frac{\nu_2+(1-\alpha)n}{1-\alpha+\sigma}\right] - (\nu_1-\nu_2).$$

Из полученной оценки следует, что функция $g(K(t), t)$ обладает следующими свойствами.

Если $\frac{\nu_1}{1-\alpha} > \frac{\nu_2-\sigma n}{1-\alpha+\sigma}$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} \ln g(K(t), t) \geqslant -\sigma \frac{\nu_1+(1-\alpha)n}{1-\alpha} - (\nu_1-\nu_2) > 0$$

и, следовательно, $\lim g(K(t), t) = \infty$ при $t \to \infty$.

Если $\frac{\nu_1}{1-\alpha} < \frac{\nu_2-\sigma n}{1-\alpha+\sigma}$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} \ln g(K(t), t) \leqslant -\sigma \frac{\nu_1+(1-\alpha)n}{1-\alpha} - (\nu_1-\nu_2) < 0$$

и, следовательно, $\lim g(K(t), t) = 0$ при $t \to \infty$.

Полученные свойства функции $g(K(t), t)$ позволяют уточнить асимптотическое поведение фондоотдачи $Y(t)/K(t)$, а именно:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{K(t)} = \begin{cases} \frac{\nu_1+(1-\alpha)n}{u(1-\alpha+\sigma)}, & \text{если } \frac{\nu_1}{1-\alpha} < \frac{\nu_2-\sigma n}{1-\alpha+\sigma} \\ \frac{\nu_2+(1-\alpha)n}{u(1-\alpha)}, & \text{если } \frac{\nu_1}{1-\alpha} > \frac{\nu_2-\sigma n}{1-\alpha+\sigma}. \end{cases}$$

Тогда из уравнения (19) получаем, что предельный темп роста национального дохода $\theta^* = \lim \theta(t)$ при $t \to \infty$:

$$\theta^* = \begin{cases} \frac{\nu_1+(1-\alpha)n}{1-\alpha}, & \text{если } \frac{\nu_1}{1-\alpha} < \frac{\nu_2-\sigma n}{1-\alpha+\sigma} \\ \frac{\nu_2+(1-\alpha)n}{1-\alpha+\sigma} & \text{если } \frac{\nu_1}{1-\alpha} > \frac{\nu_2-\sigma n}{1-\alpha+\sigma}. \end{cases}$$

Осталось рассмотреть случай $\nu_1(1-\alpha+\sigma) = \nu_2(1-\alpha)$.

В этом случае из (18) следует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{K(t)} = -\frac{\nu_1-\nu_2}{u\sigma}.$$

Тогда из (19) в силу ограниченности функции $[1+g(K, t)]^{-1}$ имеем

$$\theta^* = \frac{\nu_1+(1-\alpha)n}{1-\alpha} = \frac{\nu_2+(1-\alpha)n}{1-\alpha+\sigma}.$$

Таким образом, при предположениях а)—г) при степенной функции $\varphi(R)$ предельный темп роста национального дохода

$$\theta^* = \min\left(\frac{\nu_1+(1-\alpha)n}{1-\alpha}; \frac{\nu_2+(1-\alpha)n}{1-\alpha+\sigma}\right)$$

Отметим следующие следствия.

Пусть θ_L^* — предельный темп роста национального дохода на душу населения, т. е. $\theta_L^*=\lim \frac{d}{dt} \ln Y(t)/K(t)$ при $t\to\infty$. Тогда

$$\theta_L^*=\min\left(\frac{\nu_1}{1-\alpha}; \frac{\nu_2-\sigma n}{1-\alpha+\sigma}\right).$$

Представляет также интерес асимптотическое поведение агрегированной производственной функции. Из полученных свойств функции $g(K(t), t)$ следует, что выражение для национального дохода представимо в виде

$$Y(t)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}e^{\nu_1 t}[1+\varepsilon_1(t)] \text{ при } \frac{\nu_1}{1-\alpha}<\frac{\nu_2-\sigma n}{1-\alpha+\sigma}$$

и

$$Y(t)=\frac{B}{\lambda a}K^{\alpha}L^{1-\alpha}R^{-\sigma}e^{\nu_2 t}[1+\varepsilon_2(t)] \text{ при } \frac{\nu_1}{1-\alpha}>\frac{\nu_2-\sigma n}{1-\alpha+\sigma},$$

где $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ таковы, что $\lim \varepsilon_1(t)=\lim \varepsilon_2(t)=0$ при $t\to\infty$.

Случай Б. $\varphi(R)=ae^{\sigma R}(a>0, \sigma>0)$.

В этом случае при дополнительном предположении $\nu_1=\nu_2=\nu$ уравнения модели принимают вид

$$\frac{\dot{Y}}{Y}=\alpha\frac{\dot{K}}{K}-\sigma\frac{\lambda aA}{\lambda aA+e^{-\sigma R}}\dot{R}+\mu, \qquad Y(0)=Y_0,$$

$$\dot{R}=\lambda Y, \; R(0)=R_0,$$

$$\dot{K}=uY, \; K(0)=K_0.$$

Из данной системы следует

$$\dot{Y}=\sigma\lambda\psi(R)Y^2+\mu Y,$$

где

$$\psi(R)=\frac{\alpha\lambda u}{u(R-R_0)+\lambda K_0}-\frac{\lambda aA}{\lambda aA+Be^{-\sigma R}}.$$

Поскольку $\lim \psi(R)=-1$ при $R\to\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $R_\varepsilon>0$, такое, что при $R>R_\varepsilon$ получим

$$-\sigma\lambda(1+\varepsilon)Y^2+\mu Y\leqslant\dot{Y}\leqslant-\sigma\lambda(1-\varepsilon)Y^2+\mu Y.$$

Интегрируя это неравенство при $t>T_\varepsilon$, где T_ε — время, при котором достигается R_ε, и переходя к пределу при $t\to\infty$, находим

$$\frac{\mu}{\sigma\lambda(1+\varepsilon)}\leqslant\lim_{t\to\infty} Y(t)\leqslant\frac{\mu}{\sigma\lambda(1-\varepsilon)}.$$

В силу произвольности ε следует

$$\lim_{t\to\infty} Y(t)=\mu/\sigma\lambda.$$

Отсюда получаем для предельных темпов роста

$$\theta^*=0, \; \theta_L^*=-n.$$

Поступила в редакцию
20 июля 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н.* Простейшие математические модели экономического прогнозирования. «Знание», 1975.
2. *Chang Sheldon S. L.* Theory of optimum economic growth and energy policy. Proc. IEEE, v. 63, No. 3, pp. 414–421, 1975.
3. *Solow R. M.* Intergeneration Equity and Exhaustible Resources. The Review of Economic Studies. Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, pp. 29–45, 1974.
4. *Stiglitz J.* Growth with Exhaustible Natural Resources. The Review of Economic Studies. Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, pp. 123–137, 1974.

ON ONE MODEL OF ECONOMY WITH DEPLETING NATURAL RESOURCES

B. S. LUNYAKOV

A two-sector economy model is discussed. Depletion of natural resources is represented as decreasing the efficiency of a sector. Assuming the assumptions on optimal interaction of sectors the allocation of labor resources and capital funds among the sectors is described, which leads to an aggregated description of the model. With some simplifying assumptions asymptotic behaviour of the dynamic model is studied for different kinds of the depletion.