

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. I. Alishauskas, P. P. Kulish, Spectral resolution of the $SU(3)$ -invariant solutions to the Yang-Baxter equation, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1985, Volume 145, 3–21

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

February 15, 2025, 18:49:11



СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ $SU(3)$ -ИНВАРИАНТНЫХ
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА

I. Введение

В работах [1, 2] был исследован класс решений уравнения Янга-Бакстера (R - матриц), инвариантных относительно группы $SU(N)$. Определенная в тензорном произведении двух векторных пространств $V_a \otimes V_b$, где действуют представления \mathcal{T}_a и \mathcal{T}_b группы G , матрица R_{ab} называется G -инвариантной [1], если

$$\mathcal{T}_a(q) \otimes \mathcal{T}_b(q) R_{ab} = R_{ab} \mathcal{T}_a(q) \otimes \mathcal{T}_b(q), \quad q \in G. \quad (I.1)$$

Уравнение Янга-Бакстера записывается в тензорном произведении трех пространств $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ и имеет вид

$$R_{12}(u) R_{13}(u+\tilde{v}) R_{23}(\tilde{v}) = R_{23}(\tilde{v}) R_{13}(u+\tilde{v}) R_{12}(u), \quad (I.2)$$

где вообще говоря различные матрицы $R_{ab}(u)$ нетривиально действуют в $V_a \otimes V_b$, в третьем пространстве V_c действуют как единичная матрица и аналитически зависят от (спектрального) параметра u .

Для случая группы $G = SU(N)$ инвариантные R матрицы параметризуются старшими весами Λ_a, Λ_b неприводимых представлений $SU(N)$, действующих в V_a, V_b [1, 2]. Пространство представления $V_a \otimes V_b$ группы $SU(N) \otimes SU(N)$ раскладывается в ряд Клебша-Гордана (КГ)

$$V_a \otimes V_b = \sum_k V(\Lambda_k) \quad (I.3)$$

по НИ диагональной подгруппы $SU(N) \subset SU(N) \otimes SU(N)$. Матрица $R_{ab}(u)$ будучи инвариантной также допускает представление вида

$$R_{ab}^{\Lambda_a \Lambda_b}(u) = \sum_k \varrho_k(u) P_{\Lambda_k}, \quad (I.4)$$

где P_{Λ_k} - проектор на подпространство НИ $V(\Lambda_k)$, а $\varrho_k(u)$ - скалярный относительно $SU(N)$ оператор. Разложение (I.4) называется спектральным. Оно было вычислено при $N = 2$ и для большого класса представлений Λ_a, Λ_b при $N = 3$ [1, 2].

Цель данной работы - вычисление разложения (I.4) в случае общих конечномерных НП группы $SU(3)$, когда в ряде КГ (I.3) появляются кратные НП и соответствующие им в (I.4) $\rho_k(u)$ становятся $\nu \times \nu$ - матрицами, где ν - кратность соответствующего НП со старшим весом Λ_k .

Скалярный оператор $\rho_k(u)$ является функцией операторов Казимира трех групп цепочки $SU(N) \otimes SU(N) \supset SU(N)$, а также других $SU(N)$ - скалярных операторов, построенных из генераторов этих групп. В ряде случаев показано (см., например, [3]) что число функционально независимых и отличных от операторов Казимира скалярных операторов диагональной подгруппы в обертывающей алгебре в два раза больше размерности дополнительного индекса кратных НП подгруппы. Так в [3] рассмотрены все случаи, когда индекс кратности одномерен и, в частности, показано, что для разложения $SU(3) \otimes SU(3) \supset SU(3)$ имеются два таких оператора - полиномы генераторов третьей и четвертой степени. Эти операторы между собой не коммутируют, а любой классифицирующий кратные НП оператор выражается как их функция.

Вообще оператор $\rho_k(u)$ целесообразно представить в матричном виде

$$\rho_{\Lambda_k}^{\omega} \omega'(u), \quad (I.5)$$

где ω и ω' индексы кратных НП. Так как аналитическими методами обычно удается построить только неортонормированные системы базисов кратных НП, мы применяем верхние и нижние индексы, которые соответствуют биортогональным системам состояний (см., например, [4]).

Для вычисления $\rho_k(u)$ из уравнения Янга-Бакстера было получено уравнение [I, 2]

$$[R_{ab}^{\Lambda_a \Lambda_b}(u), u d_{ij} - \frac{1}{2} d_{ij}^{\{2\}}] = \frac{1}{4} \{ [C_2(p^a + p^b), d_{ij}], R_{ab}^{\Lambda_a \Lambda_b}(u) \} \quad (I.6)$$

где $[,]$ - коммутатор, $\{, \}$ - антикоммутатор, p_{ij}^a, p_{ij}^b генераторы алгебр Ли $\mathfrak{su}_a(N)$ и $\mathfrak{su}_b(N)$

$$[p_{ij}^a, p_{kl}^b] = \delta^{ab} (p_{il}^a \delta_{jk} - p_{kj}^a \delta_{il}), \quad (I.7)$$

оператор Казимира $C_2(p) = \sum_{i,j} p_{ij} p_{ji}$ и введены обозначения

$$d_{ij} = p_{ij}^a - p_{ij}^b, \quad d_{ij}^{\{2\}} = \frac{1}{2} \sum_k (d_{ik} d_{kj} + d_{kj} d_{ik}). \quad (I.8)$$

Беря матричный элемент (I.6) между состояниями дуальных базисов Λ_k и Λ_l , имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega'_k} \varrho_{\Lambda_k \omega'_k}^{\omega_k} (u) \langle \omega'_k \Lambda_k | d_{ij} | \omega_l \Lambda_l \rangle (u - \frac{1}{4} C_2(\Lambda_k) + \frac{1}{4} C_2(\Lambda_l)) - \\ & - \frac{1}{2} \langle \omega'_k \Lambda_k | d_{ij}^{\{2\}} | \omega_l \Lambda_l \rangle \rangle = \sum_{\omega'_l} \langle \omega_k \Lambda_k | d_{ij} | \omega'_l \Lambda_l \rangle \times \\ & \times (u + \frac{1}{4} C_2(\Lambda_k) - \frac{1}{4} C_2(\Lambda_l)) - \frac{1}{2} \langle \omega_k \Lambda_k | d_{ij}^{\{2\}} | \omega'_l \Lambda_l \rangle \rangle \varrho_{\Lambda_l \omega'_l}^{\omega_l}. \end{aligned} \quad (I.9)$$

Вектора с верхними и нижними индексами дуальны (при совпадении остальных базисных индексов, которые мы опускаем)

$$\langle \omega \Lambda | \omega' \Lambda \rangle = \delta_{\omega \omega'}. \quad (I.10)$$

При $\Lambda_k \neq \Lambda_l$ матричные элементы в (I.9) можно заменить приведенными матричными элементами, но появление кратных НП для приведения $\Lambda_k \otimes [10 \dots 0 - 1]_N \rightarrow \Lambda_k$ не позволяет этого делать при $\Lambda_l = \Lambda_k ([10 \dots 0 - 1]_N)$ - присоединенное представление $SU(N)$. В этом случае матрицы $\varrho_{\Lambda_k \omega'_k}^{\omega_k}$ и $\langle \omega_k \Lambda_k | u d_{ij} - \frac{1}{2} d_{ij}^{\{2\}} | \omega'_k \Lambda_k \rangle$ коммутируют между собой. Вместо того, чтобы разбираться с зависимостью матричных элементов последней матрицы от базисных индексов состояний НП группы $SU(N)$, умножим исходное уравнение (I.6) справа на операторы

$$P_{ji}, P_{ji}^{\{2\}} - \frac{1}{2} \sum_k (P_{jk} P_{ki} + P_{ki} P_{jk})$$

и т.д., обычно применяемые при построении операторов Казимира и просуммируем по индексам i и j , учитывая, что $\varrho_{\Lambda_k}^{\omega_k}(u)$ и P_{ji} коммутируют. Таким путем на месте d и $d^{\{2\}}$ появятся $SU(N)$ -инвариантные операторы, диагональные по Λ_k и всем базисным индексам $SU(N)$. Легко убедиться, что в случае умножения на первую степень генератора P_{ji} появятся только операторы Казимира, не дающие никакой информации о свойствах оператора $\varrho_{\Lambda_k}(u)$. Во втором случае получаем оператор

$$A(u) = u \sum_{ij} d_{ij} P_{ji}^{\{2\}} - \frac{1}{2} \sum_{ij} d_{ij}^{\{2\}} P_{ji}^{\{2\}}, \quad (I.11)$$

не тривиальный уже в $SU(3)$ случае и эквивалентный линейной комбинации классификационных операторов, указанных в [3]. По край-

ней мере для $SU(3)$ оператор (I.II) имеет разные собственные значения, поэтому оба оператора (I.5) и (I.II) одновременно приводятся к диагональному виду и имеют общие системы собственных векторов. Собственные значения классификационного оператора (I.II) как правило иррациональны и в случае кратностей НП, превышающих четыре, могут быть найдены только численно (см. например, случаи операторов третьей степени для $SU(3)$, обсуждаемые в [5 - 9]). Оператор $\rho_{\Lambda_k}(u)$ в полупространстве кратного неприводимого представления $V(\Lambda_k)$ можно однозначно представить в виде полинома от оператора $A(u)$

$$\rho_{\Lambda_k}(u) = \sum_{i=0}^{r-1} x_i(u) A^i(u). \quad (I.I2)$$

Коэффициенты этого представления $x_i(u)$ - рациональные функции параметров НП и спектрального параметра u , находятся из системы r линейных уравнений, которая следует из (I.9) после подстановки туда матричных элементов оператора (I.I2). Таким образом нахождение спектрального разложения (I.4) сводится к задаче линейной алгебры, если известны матричные элементы классификационного оператора $A(u)$ и операторов (I.8) в базисе $SU(N) \otimes SU(N) \supset SU(N)$.

Следующий раздел содержит вычисления необходимых матричных элементов при $N=3$. В разделе 3 приведены явные формулы спектрального разложения (I.4) при различных кратностях. Пока не ясно, насколько элементарно в вычислительном отношении обобщение приведенных результатов для $N > 3$, когда оператор A может быть вырожденным на подпространствах кратных НП и необходимо использовать свертки операторов (I.8) с более высокими степенями генераторов p_{ij} .

Авторы признательны Н.Д.Решетикину и Е.К.Склянину за плодотворные обсуждения.

2. Матричные элементы операторов d_{ij}, d_{ij}^{t23} и классификационных операторов в $SU(3) \otimes SU(3) \supset SU(3)$ базисе

Операторы d_{ij} дополняют до алгебры Ли группы $SU(3) \otimes SU(3)$ алгебру Ли генераторов p_{ij} диагональной подгруппы $SU(3)$ и образуют второй $SU(3)$ - неприводимый тензор среди генераторов $SU(3) \otimes SU(3)$. Оба набора операторов d_{ij} и d_{ij}^{t23} преобразуются по присоединенному представлению группы $SU(3)$. Матричные элементы этих операторов, как и классифицирующего

кратные НП оператора четвертой степени в литературе пока не рассматривались. Хотя матричные элементы разных вариантов классификационного оператора третьей степени вычислялись в [5 - 9], важнейшие их закономерности не выявлены, кроме определенных правил отбора по индексу кратных НП. Поэтому мы не будем пользоваться имеющимися там вариантами базисов и операторов.

Как принято в большинстве физических работ, неприводимые представления (НП) группы $SU(3)$ будем параметризовать (λ, μ) , а подгруппы $SU(2) \subset SU(3)$ угловым моментом I . Эти параметры связаны с параметрами Гельфанда-Цетлина следующим образом

$$\begin{aligned} \lambda &= m_{13} - m_{23}, \quad \mu = m_{23} - m_{33}, \\ I &= \frac{1}{2}(m_{12} - m_{22}), \quad M = m_{11} - \frac{1}{2}(m_{12} + m_{22}), \\ Z &= m_{23} - \frac{1}{2}(m_{12} + m_{22}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Параметры I, M, Z одновременно целые или полуцелые. Запишем также размерность НП группы $SU(3)$

$$\dim V(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1)(\lambda+\mu+2). \quad (2.2)$$

Неортонормированный базис для цепочки $SU(3) \otimes SU(3) \supset SU(3) \supset U(2)$ выбираем в виде

$$\begin{aligned} P_{(Z)IM; (z)I}^{(\lambda, \mu)} \left| \begin{matrix} (\lambda_1, \mu_1) \\ (-\frac{1}{2}\lambda_1, \frac{1}{2}\lambda_1, \frac{1}{2}\lambda_1) \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} (\lambda_2, \mu_2) \\ (\frac{1}{2}\mu_2, \frac{1}{2}\mu_2, -\frac{1}{2}\mu_2) \end{matrix} \right\rangle = \\ = \left\| \begin{matrix} (\lambda, \mu) (\lambda_1, \mu_1) (\lambda_2, \mu_2) \\ (Z)IM; (z)I \end{matrix} \right\rangle_{\frac{1}{2}(\lambda_1, \mu_2)} \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}\lambda_1 & \frac{1}{2}\mu_2 & \bar{I} \\ \frac{1}{2}\lambda_1 & -\frac{1}{2}\mu_2 & \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_2) \end{matrix} \right] \left| \begin{matrix} (\lambda_1, \mu_1) (\lambda_2, \mu_2) \\ (Z)IM \end{matrix} \right\rangle_{-, +, \bar{I}(\lambda, \mu)} = \quad (2.4)$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \lambda_1 \frac{1}{2} \mu_2 \bar{I} \\ \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{1}{2} \mu_2 \frac{1}{2} (\lambda_1 - \mu_2) \end{array} \right] \sum_{\omega} \left[\begin{array}{c} (\lambda_1 \mu_1) (\lambda_2 \mu_2) \\ (-\frac{1}{2} \lambda_1) \frac{1}{2} \lambda_1 (\frac{1}{2} \mu_2) \frac{1}{2} \mu_2 \end{array} \right] \omega^{(\lambda \mu)} \sum_{\substack{I_1 I_2 Z_1 Z_2 \\ M_1 M_2}}^x \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c} (\lambda_1 \mu_1) (\lambda_2 \mu_2) \omega^{(\lambda \mu)} \\ (Z_1) I_1 (Z_2) I_2 (Z) I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I_1 I_2 I \\ M_1 M_2 M \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} (\lambda_1 \mu_1) \\ (Z_1) I_1 M_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (\lambda_2 \mu_2) \\ (Z_2) I_2 M_2 \end{array} \right| \quad (2.5)$$

Здесь $P^{(\lambda \mu)}$ - проекционный оператор, выделяющий состояния $\Pi^{(\lambda \mu)}$ $SU(3)$ с указанными справа базисными характеристиками и превращающий их в состояния с левыми характеристиками (его явный вид нам не понадобится). Квадратными скобками обозначены коэффициенты Клебша - Гордана $SU(2)$ и изофакторы $SU(3) \supset U(2)$. Специальные билинейные комбинации изофакторов приведены в [10 - 12, 4]. Кратные Π в прямом произведении выделяют параметр \bar{I} , имеющий смысл скрытого углового момента. Для наших целей естественной оказалась нормировка (2.3), а не (2.4), использованная в [10], где приведены также перекрытия этого неортонормированного базиса. Между параметрами имеют место следующие зависимости (S - целое число)

$$Z = Z_1 + Z_2 + S, \quad Z = \frac{1}{2} (\mu_2 - \lambda_1) + S, \quad (2.6)$$

$$S = \frac{1}{3} (\lambda_1 - \mu_1 + \lambda_2 - \mu_2 - \lambda + \mu).$$

Интервал изменения \bar{I} определяется свойствами схемы Гельфанда-Цетлина [13] и треугольными условиями (см. [10] (2.3а)), но линейно независимые состояния (2.3)-(2.5) удовлетворяют кроме того неравенствам ([10] (2.3б))

$$\mu_1 - \mu + Z + \bar{I} \geq 0, \quad \lambda_2 - \lambda_1 - Z + \bar{I} \geq 0. \quad (2.7)$$

Чтобы выделить приведенные матричные элементы, неприводимые составляющие тензорного оператора d_{ij} представим в следующем виде

$$d_{000}^{(11)} = -\frac{1}{\sqrt{6}} (d_{11} + d_{22} - 2d_{33}), \quad d_{011}^{(11)} = -d_{12},$$

$$d_{010}^{(11)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_{11} - d_{22}), \quad d_{01-1}^{(11)} = d_{21}, \quad (2.8)$$

$$d_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{(11)} = d_{13}, \quad d_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{(11)} = d_{23},$$

$$d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{(11)} = -d_{32}, \quad d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{(11)} = d_{31}.$$

Аналогично записываются неприводимые составляющие $(d_{\{2\}}^{(11)})_{z_0 I_0 M_0}$, при этом следует использовать зависимость $d_{11} + d_{22} + d_{33} = 0$, имеющую место на базисе III группы $SU(3) \otimes SU(3)$, и выразить составляющие $d_{\{2\}}$ как билинейную форму восьми операторов (2.8).

Воспользуемся обобщением перестановочных соотношений, примененных в [12, 15] (см. также [16], стр. 236, или []), для неприводимых тензорных и проекционных операторов III группы

$$\begin{aligned} t_{z_0 I_0 M_0}^{(\lambda_0 \mu_0)} P_{Z I M; Z' I' M'}^{(\lambda \mu)} &= \sum_{\lambda' \mu' r} \frac{\dim(\lambda \mu)}{\dim(\lambda' \mu')} \times \\ &\times \sum_{I' Z' M'} \left[\begin{matrix} (\lambda \mu) & (\lambda_0 \mu_0) & (\lambda' \mu') \\ (Z) I & (z_0) I_0 & (Z') I' \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} I & I_0 & I' \\ M & M_0 & M' \end{matrix} \right] \times \\ &\times \sum_{i_0 z_0 m_0 \bar{I}'} \left[\begin{matrix} (\lambda \mu) & (\lambda_0 \mu_0) & (\lambda' \mu') \\ (Z) \bar{I} & (z_0) i_0 & (Z') \bar{I}' \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \bar{I} & i_0 & \bar{I}' \\ M & m_0 & M' \end{matrix} \right] \times \\ &\times P_{Z' I' M'; Z' \bar{I}' M'}^{(\lambda' \mu')} t_{z_0 i_0 m_0}^{(\lambda_0 \mu_0)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подытоживаем на (2.3) оператором (2.8). Операторы повышения веса $P_{13}^a, P_{23}^a, P_{12}^a$ при действии на функцию $|\begin{smallmatrix} (\lambda_1 \mu_1) \\ \text{max} \end{smallmatrix}\rangle$ и операторы понижения веса P_{31}, P_{32}, P_{21} при действии на функцию $|\begin{smallmatrix} (\lambda_2 \mu_2) \\ \text{min} \end{smallmatrix}\rangle$ дают ноль. Отсюда следует, что справа от проекционного оператора операторы d_{13}, d_{23}, d_{12} можно заменить на $-P_{13}, -P_{23}, -P_{12}$, а операторы d_{31}, d_{32}, d_{21} — на P_{31}, P_{32}, P_{21} соответственно. Далее их можно включить в проекционный оператор. Аналогично, полиномами от инфинитезимальных операторов диагональной подгруппы $SU(3)$ можно заменить и операторы $d_{\{2\}}$. Действие операторов d_{11}, d_{22}, d_{33} на функцию $|\begin{smallmatrix} (\lambda_1 \mu_1) \\ \text{max} \end{smallmatrix}\rangle |\begin{smallmatrix} (\lambda_2 \mu_2) \\ \text{min} \end{smallmatrix}\rangle$ элементарно.

При рассмотрении инфинитезимальных преобразований неканонических базисов в случае сужений $SU(4) \supset SU(2) \otimes SU(2)$ и $SU(3) \supset SO(3)$ удалось объединить ряд членов, появляющихся из перестановочных

соотношений типа (2.9) (см. [17] и [4], (54)). Приведенные матричные элементы оказались пропорциональными специальным коэффициентам КГ (а не их более сложным линейным комбинациям как в работах других авторов). Использование явных выражений для матричных элементов генераторов и специальных изофакторов группы $SU(3)$ представленных в таблицах [18, 19].^{*}, а также коэффициентов КГ $SU(2)$, позволило представить в аналогичном виде и матричные элементы операторов d и $d^{\{2\}}$. Таким путем получено

$$\begin{aligned}
 & d_{z_0 I_0 M_0}^{(11)} \parallel_{ZIM; \underline{z} \bar{I} \underline{M}}^{(\lambda, \mu) (\lambda_1 \mu_1) (\lambda_2 \mu_2)} \gg = \\
 & - \sum_{\substack{\nu, \lambda', \mu', \\ z', \bar{I}', M'}} \frac{\dim(\lambda, \mu)}{\dim(\lambda', \mu')} \left[\begin{matrix} (\lambda, \mu) & (11) & \nu(\lambda', \mu') \\ (Z)I & (z_0)I_0 & (Z')I' \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} I & I_0 & I' \\ M & M_0 & M' \end{matrix} \right] \times \\
 & \times \sum_{\bar{Z} \bar{I}} \left\{ \left[\begin{matrix} (\lambda, \mu) & (11) & \nu(\lambda', \mu') \\ (Z)\bar{I} & (0)1 & (Z')\bar{I}' \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \bar{I} & 1 & \bar{I}' \\ \lambda_1 - \mu_2 & 0 & \lambda_1 - \mu_2 \end{matrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 + \mu_2 + 2 + (\bar{I}' - \bar{I})(\bar{I} + \bar{I}' + 1)) + \right. \\
 & \left. + \left[\begin{matrix} (\lambda, \mu) & (11) & \nu(\lambda', \mu') \\ (Z)\bar{I} & (0)0 & (Z')\bar{I}' \end{matrix} \right] \frac{1}{\sqrt{6}} (-\lambda_1 - 2\mu_1 - \mu_2 - 2\lambda_2 + C_2(\lambda, \mu) - C_2(\lambda', \mu') - 6) \right\} \times \\
 & \times \parallel_{Z'I'M'; \underline{z}' \bar{I}' \underline{M}}^{(\lambda', \mu') (\lambda_1 \mu_1) (\lambda_2 \mu_2)} \gg; \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

$$(d^{\{2\}})^{(11)}_{z_0 I_0 M_0} \parallel_{ZIM; \underline{z} \bar{I} \underline{M}}^{(\lambda, \mu) (\lambda_1 \mu_1) (\lambda_2 \mu_2)} \gg = \sum_{\substack{\nu, \lambda', \mu', \\ z', \bar{I}', M'}} \frac{\dim(\lambda, \mu)}{\dim(\lambda', \mu')} \times$$

^{*} Наиболее удобны таблицы [18], наиболее компактны [19]. Различие фаз в [18] и [19] не существенно. В частях 2 и 6 таблицы II [18] в формулах, соответствующих $(\lambda', \mu') = (\lambda + 1, \mu + 1)$, необходимо исправить $(\nu - \mu + 1)$ на $(q - \mu + 1)$, а в частях 4 и 5 при $(\lambda', \mu') = (\lambda - 1, \mu - 1)$ следует исправить $(\nu - \mu - 1)$ на $(q - \mu - 1)$. Все необходимые изофакторы при $(\lambda, \mu) \neq (\lambda', \mu')$, $(\lambda_0, \mu_0) = (11)$ можно выразить по формуле (2.7) [20] с учетом свойств симметрии, приведенных в [10].

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} (\lambda\mu) & (11) & (\lambda'\mu') \\ (Z)I & (Z_0)I_0 & (Z')I' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I_0 & I' \\ M & M_0 & M' \end{bmatrix} \times \\
& \times \sum_{Z, \bar{I}} \left(\begin{bmatrix} (\lambda\mu) & (11) & (\lambda'\mu') \\ (Z)\bar{I} & (0)1 & (Z')\bar{I}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I} & 1 & \bar{I}' \\ \frac{\lambda_1 - \mu_2}{2} & 0 & \frac{\lambda_1' - \mu_2'}{2} \end{bmatrix} \right) \times \\
& \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\lambda_1 + \mu_2 + 2 + (\bar{I}' - \bar{I})(\bar{I}' + \bar{I} + 1) \right] \left[\frac{1}{3} (\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} C_2(\lambda'\mu') - \frac{1}{2} C_2(\lambda\mu) + (\bar{I} - \bar{I}')(\bar{I} + \bar{I}' + 1) + 2 \right] \\
& + \begin{bmatrix} (\lambda\mu) & (11) & (\lambda'\mu') \\ (Z)\bar{I} & (0)0 & (Z')\bar{I}' \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \frac{1}{6} (\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 + 3) \times \right. \\
& \times \left[\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 + 9 + C_2(\lambda'\mu') - C_2(\lambda\mu) \right] - \lambda_1(\lambda_1 + 2) - \frac{3}{2} - \\
& - \mu_2(\mu_2 + 2) + (1 - \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}) \left[3 + 4\bar{I}(\bar{I} - 1) + \frac{1}{2} C_2(\lambda'\mu') - \right. \\
& - \frac{1}{2} C_2(\lambda\mu) - 2Z^2 (\delta_{\lambda'\lambda+1} \delta_{\mu'\mu+1} + \delta_{\lambda'\lambda-1} \delta_{\mu'\mu-1}) - \\
& - 2(\mu - Z + 1)^2 (\delta_{\lambda'\lambda+2} + \delta_{\lambda'\lambda-2}) - 2(\lambda + Z - 1)^2 (\delta_{\mu'\mu+2} + \delta_{\mu'\mu-2}) \left. \right] + \\
& + \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \left(\frac{1}{2} Y^2 + 1 \right) \left. \right\} + \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\bar{I}\bar{I}'} \left\{ - \frac{C_2}{3\sqrt{C_2}} \delta_{\nu 1} + \right. \\
& \left. + \delta_{\nu 2} \sqrt{3C_2} \left[\lambda\mu(\lambda+2)(\mu+2)(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+3) \right]^{-\frac{1}{2}} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{1}{2} (-1) \left[\frac{2}{3} \frac{C_3^2}{C_2} - \frac{1}{3} C_2^2 - \frac{1}{6} C_2 - \frac{2}{3} C_3 \underline{Y} + \underline{Y}^2 + \frac{1}{6} C_2 \underline{Y}^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4} \underline{Y}^4 + 2 \underline{Y}^2 \bar{I} (\bar{I} + 1) + 2 C_2 \bar{I} (\bar{I} + 1) - 4 \bar{I}^2 (\bar{I} + 1)^2 \right] \times \\
 & \times \left\| \begin{array}{l} (\lambda' \mu') (\lambda_1 \mu_1) (\lambda_2 \mu_2) \\ \underline{Z}' \underline{I}' \underline{M}'; \underline{Z}' \underline{I}' \underline{M} \end{array} \right\rangle. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \underline{Y} &= \frac{1}{3} (\lambda_1 + 2\mu_1 - 2\lambda_2 - \mu_2), \quad \underline{M} = \frac{1}{2} (\lambda_1 - \mu_2), \\
 C_2(\lambda, \mu) &= \frac{2}{3} (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)), \quad (2.12) \\
 C_3(\lambda, \mu) &= \frac{1}{9} (\lambda - \mu)(2\lambda + \mu + 3)(\lambda + 2\mu + 3)
 \end{aligned}$$

(нормировка операторов Казимира отличается от традиционной, см. например, [18, 19]). Множитель $(-1)^{\nu} = 1$ в системе фаз [19] и $(-1)^{\nu} = -1$ в системе фаз 18. Расходимости в правой части (2.11) при $\nu = 2$ и параметре λ или μ равном 0 не возникает, т.к. в этих случаях следующий за $(-1)^{\nu}$ множитель равен 0 (как и соответствующие изофакторы $SU(3)$ - см. концепцию нулевых пространств тензорных операторов [22]). Применяемые в (2.10), (2.11) системы изофакторов ортонормированы относительно индекса кратных НП ν , используемого в [18, 19]. В этих формулах устранены недиагональные по \underline{M} , \underline{M}' члены, а также члены, в которых \underline{Z}_0 и \underline{i}_0 принимают полуцелые значения. Приведенные матричные элементы представлены как функции специальных коэффициентов КГ и собственных значений операторов Казимира разных подгрупп.

Видно, что оба оператора (d и $d^{\{2\}}$) меняют индекс кратных НП не более чем на ± 1 . Но в случае [10]

$$\begin{aligned}
 \mu_1 - \lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 - 2\lambda - \mu &< 0, \\
 \lambda_1 + 2\mu_1 + \lambda_2 - \mu_2 - \lambda - 2\mu &< 0
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

появляются линейно зависимые состояния, которые могут быть разложены по полной системе с помощью соотношения

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{matrix} (\lambda' \mu') & (\lambda_1 \mu_1) & (\lambda_2 \mu_2) \\ \text{ZIM}; & \underline{z}' \bar{i} \underline{M} \end{matrix} \right\rangle = \\
& = \sum_{\bar{I}} \left\{ \delta_{\bar{i} \bar{I}} + \left(\frac{(\bar{I}-\underline{M})!(\bar{i}+\underline{M})!(\bar{I}-\underline{Z}')!(\bar{i}+\underline{Z}')!}{(\bar{i}-\underline{M})!(\bar{I}+\underline{M})!(\bar{I}+\underline{Z}')!(\bar{i}-\underline{Z}')!} \right)^{\frac{1}{2} \text{sign } S'} \right. \\
& \times \left(\frac{(2\bar{I}+1)(2\bar{i}+1)(\lambda'+\underline{z}'-\bar{i})!(\lambda'+\underline{z}'+\bar{i}+1)(\mu'-\underline{z}'-\bar{i})!(\mu'-\underline{z}'+\bar{i}+1)}{(\lambda'+\underline{z}'-\bar{I})!(\lambda'+\underline{z}'+\bar{I}+1)(\mu'-\underline{z}'-\bar{I})!(\mu'-\underline{z}'+\bar{I}+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left. \times \frac{(-1)^{\bar{i}-B}(\bar{I}+B)!}{(\bar{I}-\bar{i})(\bar{I}+\bar{i}+1)(\bar{I}-B)(\bar{i}+B)(B-\bar{i}-1)!} \right\} \times \\
& \times \left\| \begin{matrix} (\lambda' \mu') & (\lambda_1 \mu_1) & (\lambda_2 \mu_2) \\ \text{ZIM}; & \underline{z}' \bar{I} \underline{M} \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Здесь $\bar{I} \geq B$,

$$B = \frac{1}{2}(\lambda + \mu - \lambda_2 - \mu_1 + |S'|), \quad S' = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \mu_1 + \lambda_2 - \mu_2 - \lambda' + \mu'),$$

при $S' = 0$ величина $[\dots]^{\frac{1}{2} \text{sign } S'} = 1$. Формула (2.14) следует из (9) [2I] и свойств симметрии изофакторов приведенных в [10]

Наконец рассмотрим матричные элементы оператора (I.II). В [19] показано, что матричные элементы симметризованной свертки $\rho_{ij}^{\{2\}}$ можно разложить по коэффициентам Клебша-Гордана $SU(3)$, в которых индекс ν принимает оба значения, а приведенные матричные элементы выражаются через собственные значения операторов Казимира. Например, составляющая оператора $\rho^{\{2\}}$ с базисными характеристиками $Z_0 = I_0 = M_0 = 0$ может быть представлена в виде

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{6} C_2 - I(I+1) + \frac{1}{4} Y^2 \right] = \frac{C_3}{\sqrt{C_2}} T_{000}^{(11)}_{\nu=1} +$$

$$+(-1)^{\nu} \left[\frac{\lambda \mu (\lambda+2)(\mu+2)(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+3)}{3 C_2} \right]^{\frac{1}{2}} T_{000}^{(11)} \nu=2, \quad (2.15)$$

где $T^{(11)\nu}$ операторы, приведенные матричные элементы которых равны единице. С такими же коэффициентами могут быть представлены остальные составляющие этого оператора. Ортонормированность коэффициентов КГ позволяет устранить зависимость матричных элементов скалярного оператора (I.II) от базисных индексов ZIM.

Таким путем находим неисчезающие матричные элементы оператора (I.II), действующего на неортонормированный базис (2.3)

$$\begin{aligned} A_{\bar{I}}^{\bar{I}} &= -\frac{1}{12} C_2^2 + \frac{1}{24} C_2 + \frac{1}{6} C_3 \underline{Y} - \frac{1}{4} \underline{Y}^2 - \frac{1}{24} C_2 \underline{Y}^2 + \frac{1}{16} \underline{Y}^4 + \\ &+ \frac{1}{8} \underline{Y} (\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_1 + \mu_2 + 2) \left[u - \frac{1}{6} (\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 + 6) \right] - \\ &- \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \underline{Y}^2 + \frac{1}{3} C_2 \right) \left[(\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 + 6) u + \frac{1}{12} (\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 + 6)^2 - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \lambda_1 (\lambda_1 + 2) - \frac{1}{2} \mu_2 (\mu_2 + 2) + \frac{1}{4} \underline{Y}^2 - 1 \right] + \frac{(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_1 + \mu_2 + 2)}{4 \bar{I}(\bar{I} + 1)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{3} C_3 - \frac{1}{8} \underline{Y}^3 + \frac{1}{4} \underline{Y} (C_2 + 2) \right] \left[u - \frac{1}{6} (\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 + 6) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \bar{I}(\bar{I} + 1) \left[(\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 + 6) u + \frac{1}{12} (\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 + 6)^2 - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \lambda_1 (\lambda_1 + 2) - \frac{1}{2} \mu_2 (\mu_2 + 2) - \frac{3}{4} \underline{Y}^2 - C_2 + 2 \bar{I}(\bar{I} + 1) - 1 \right]; \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$A_{\bar{I}}^{\bar{I}+1} = [(\bar{I} + \underline{M} + 1)(\bar{I} - \underline{M} + 1)(\bar{I} - \underline{Z} + 1)(\bar{I} + \underline{Z} + 1) \times \\ \times (\lambda + \underline{Z} - \bar{I})(\lambda + \underline{Z} + \bar{I} + 2)(\mu - \underline{Z} - \bar{I})(\mu - \underline{Z} + \bar{I} + 2)]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \frac{(\lambda_1 + \mu_2 + 2\bar{I} + 4)}{[(2\bar{I} + 1)(2\bar{I} + 3)]^{\frac{1}{2}}(\bar{I} + 1)} \times \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} (\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2) - \bar{I} - u \right\},$$

$$A_{\bar{I}}^{\bar{I}-1} = [(\bar{I} + \underline{M})(\bar{I} - \underline{M})(\bar{I} - \underline{Z})(\bar{I} + \underline{Z})(\lambda + \underline{Z} + \bar{I} + 1) \times \\ \times (\lambda + \underline{Z} - \bar{I} + 1)(\mu - \underline{Z} - \bar{I} + 1)(\mu - \underline{Z} + \bar{I} + 1)]^{\frac{1}{2}} \frac{(\lambda_1 + \mu_2 - 2\bar{I} + 2)}{[(2\bar{I} + 1)(2\bar{I} - 1)]^{\frac{1}{2}}\bar{I}} \times \\ \times \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} (\lambda_1 + 2\mu_1 + 2\lambda_2 + \mu_2) + \bar{I} + 1 - u \right\}.$$

Параметр \bar{I} может быть равным 0 только при $\lambda_1 = \mu_2$, поэтому расходимости в (2.16 а) не появляются. В области (2.13) появляются также ненулевые матричные элементы

$$A'_{\bar{B}}^{\bar{I}} = W_{\bar{B}-1}^{\bar{I}} A_{\bar{B}}^{B-1}, \quad (2.17)$$

где $W_{\bar{B}-1}^{\bar{I}}$ - коэффициент разложения избыточных состояний согласно формуле (2.14) при $\bar{I} = B-1$. Таким образом действие оператора (I, II) на полный базис (2.3) можно представить как сумму матриц $A + A'$. Спектр собственных значений оператора

A не меняется при перестановке $(\lambda_1 \mu_1) \leftrightarrow (\lambda_2 \mu_2)$ и одновременном отражении параметра u . Что же касается перестановок типа $(\lambda_1 \mu_1) \leftrightarrow (\lambda \mu)$, то спектр оператора третьей степени, входящего в A , меняется на отраженный, а спектр оператора четвертой степени (с точностью до постоянного слагаемого) остается тем же самым.

Отметим также, что решение краевых задач для изофакторов $[10, 2I]$ позволяет любое состояние типа

$$P_{ZIM; zim}^{(\lambda, \mu)} | (Z_1)_{i_1 m_1}^{(\lambda_1 \mu_1)} \rangle | (Z_2)_{i_2 m_2}^{(\lambda_2 \mu_2)} \rangle \quad (2.18)$$

$$(Z = Z_1 + Z_2 + S, \quad m = m_1 + m_2)$$

разложить по состояниям (2.3) и тем самым определить действия на них операторов (I.8), (I.II) и (I.4).

3. Примеры спектральных разложений и операторов $\varrho_{\Lambda}(u)$

Случай простого спектра ряда КГ, который возникает, например, при перемножении симметрических степеней векторного представления

$$(\lambda_1 0) \otimes (\lambda_2 0) = \sum_{k=0}^{\min(\lambda_1, \lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2 - 2k, k), \quad (3.1)$$

уже был рассмотрен в I, 2. Приведем полученное там разложение

R-матрицы $(\Lambda_k = (\lambda_1 + \lambda_2 - 2k, k), \varrho_{\Lambda_0}(u) = 1)$

$$R^{\lambda_1, \lambda_2}(u) = \sum_{k=0}^{\min(\lambda_1, \lambda_2)} \left(\prod_{l=0}^{k-1} \frac{u+l - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)}{u-l + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)} \right) P_{\Lambda_k}. \quad (3.2)$$

Кратные ИИ не появляются и в ряде других случаев, когда из формул (2.10) и (2.11) удастся выразить отношение приведенных матричных элементов

$$D_{kl} = \langle \Lambda_k \| d^{[2]} \| \Lambda_l \rangle / \langle \Lambda_k \| d \| \Lambda_l \rangle \quad (3.3)$$

и для определения $\varrho_{\Lambda}(u)$ воспользоваться рекуррентным соотношением [I, 2]

$$\varrho_{\Lambda_k}(u) = \frac{u - \frac{1}{2} D_{kl} + \frac{1}{4}(C_2(\Lambda_k) - C_2(\Lambda_l))}{u - \frac{1}{2} D_{kl} - \frac{1}{4}(C_2(\Lambda_k) - C_2(\Lambda_l))} \varrho_{\Lambda_l}(u). \quad (3.4)$$

Выделяя в прямом произведении $(\lambda_1 \mu_1) \otimes (\lambda_2 0)$ представления $(\lambda \mu)_l$ и $(\lambda' \mu')_k$, получаем

$$\begin{aligned} D_{kl} &= \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu - 2\lambda_2), \quad (\lambda' \mu') = (\lambda - 2, \mu + 1); \\ D_{kl} &= \frac{1}{3}(\lambda - \mu - 2\lambda_2) - 1, \quad (\lambda' \mu') = (\lambda - 1, \mu - 1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение для $\varrho_{(\lambda, \mu)}(u)$ в этом случае можно представить в виде

$$\varrho_{(\lambda, \mu)}(u) = \frac{\Gamma(u + \frac{1}{3}(\lambda_2 - 2\lambda - \mu)) \Gamma(u + \frac{1}{3}(\lambda_2 + \lambda - \mu) + 1)}{\Gamma(u + \frac{1}{3}(\lambda_2 - 2\lambda_0 - \mu_0)) \Gamma(u + \frac{1}{3}(\lambda_2 + \lambda_0 - \mu_0) + 1)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(u + \frac{1}{3}(\lambda_2 + \lambda + 2\mu) + 2)}{\Gamma(u + \frac{1}{3}(\lambda_2 + \lambda_0 + 2\mu_0) + 2)} \mathcal{P}(\lambda_0, \mu_0)(u), \quad (3.6)$$

где (λ_0, μ_0) любое НП, входящее в ряд Клебша - Гордана

$$(\lambda_1, \mu_1) \otimes (\lambda_2, 0) = \sum_{l=0}^{\min(\mu_1, \lambda_2)} \sum_{k=0}^{\min(\lambda_1, \lambda_2 - l)} (\lambda_1 + \lambda_2 - l - 2k, \mu_1 - l + k), \quad (3.7)$$

в частности, $\lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2, \mu_0 = \mu_1$. При $\mu_1 = 0$ третий сомножитель из Γ -функций равен единице и (3.6) сводится к (3.2).

Простейший случай кратных НП встречается при умножении представления (λ, μ) , $\lambda \geq 1, \mu \geq 1, \lambda \neq \mu$ на присоединенное представление (11) , когда исходное НП (λ, μ) в ряде КГ встречается дважды

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu) \otimes (11) &= (\lambda + 2\mu - 1) \oplus (\lambda + 1\mu + 1) \oplus (\lambda + 1\mu - 2) \oplus \\ &\oplus (\lambda - 1\mu + 2) \oplus (\lambda - 1\mu - 1) \oplus (\lambda - 2\mu + 1) \oplus \sum_{\nu=0}^1 \nu (\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для тех НП, которые появляются в ряде (3.8) однократно, легко получаем $(\Delta = \frac{1}{3}(\lambda - \mu), \delta = \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu), \delta = \frac{1}{3}(2\lambda + \mu))$

$$\mathcal{P}(\lambda + 1\mu + 1)(u) = 1, \quad \mathcal{P}(\lambda + 2\mu - 1)(u) = \frac{u + \Delta - 1}{u + \delta},$$

$$\mathcal{P}(\lambda + 1\mu - 2)(u) = \frac{(u + \Delta - 1)(u - \delta)}{(u + \delta)(u + \delta + 2)},$$

$$\mathcal{P}(\lambda - 1\mu + 2)(u) = \frac{u - \delta}{u + \Delta + 1}, \quad \mathcal{P}(\lambda - 1\mu - 1)(u) = \frac{(u - \delta - 2)(u - \delta)}{(u + \delta + 2)(u + \delta)},$$

$$\mathcal{P}(\lambda - 2\mu + 1)(u) = \frac{(u - \delta - 2)(u - \delta)}{(u + \delta)(u + \Delta + 1)}.$$

(3.9)



Представление (λ, μ) появляется в ряде (3.8) два раза. Элементы матрицы классифицирующего оператора A (2.16) равны $(\bar{I}_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda \pm 1))$

$$A \begin{matrix} \bar{I}_+ \\ \bar{I}_+ \end{matrix} - A \begin{matrix} \bar{I}_- \\ \bar{I}_- \end{matrix} = \left(\frac{4\mu}{\lambda+1} + 4\lambda + 6 \right) u + \\ + \frac{4}{3} \left(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 3\lambda + \mu - \frac{\mu(\mu+4)}{\lambda+1} \right),$$

$$A \begin{matrix} \bar{I}_+ \\ \bar{I}_- \end{matrix} = \sqrt{\lambda\mu(\lambda+\mu+1)} \frac{2(\lambda+2)}{\lambda+1} \left(\frac{1}{3}(\mu-\lambda)+1-u \right),$$

$$A \begin{matrix} \bar{I}_- \\ \bar{I}_+ \end{matrix} = \sqrt{\lambda\mu(\lambda+\mu+1)} \frac{2}{\lambda+1} \left(\frac{1}{3}(2\lambda+\mu)+2-u \right).$$

Дискриминант векового уравнения равен

$$\mathcal{D}(u) = (6c_2 + 9)u^2 + 12c_3u + c_2^2. \quad (3.10)$$

Условие коммутирования операторов A и ρ позволяет записать $\rho(u)$ в виде $(\bar{A} = A - \frac{1}{2} \text{tr} A)$

$$\rho(u) = x_1(u) \bar{A}(u) + x_0(u), \quad (3.11)$$

$$x_1(u) = \left[2(u-\delta-2)(u-\delta)(u+\Delta+1) \right]^{-1} \rho_{(\lambda-1, \mu-1)}(u), \quad (3.12)$$

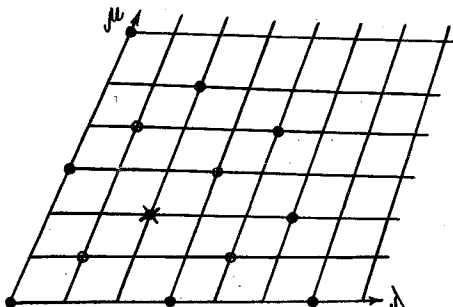
$$x_0(u) = (2u^3 - (c_2 + 5)u - 6c_3) x_1(u). \quad (3.13)$$

Собственные значения 2×2 матрицы $\rho_{(\lambda, \mu)}(u)$ выражаются через найденные величины (3.10), (3.12), (3.13)

$$\rho_{\pm}(u) = x_0(u) \pm x_1(u) \sqrt{\mathcal{D}(u)}. =$$

$$= \left([2u^3 - (c_2 + 5)u - 6c_3] \pm \sqrt{\mathcal{D}(u)} \right) x_1(u). \quad (3.14)$$

Приведем для полноты и случай разложения $R^{\wedge\wedge}(u)$ при $\wedge = (22)$, когда кратность \wedge в ряде КГ $(22) \otimes (22)$ равна трем.



На диаграмме старших весов Π кратности один отмечены \circ , кратности два \circ , кратности три \times . Ряд Клебша - Гордана

$$(22) \otimes (22) = (44) \oplus (52) \oplus (60) \oplus (30) \oplus (00) \oplus (03) \oplus (06) \oplus (25) \oplus \sum_{r=0}^1 \left\{ (33)_r \oplus (41)_r \oplus (14)_r \oplus (11)_r \right\} \oplus \sum_{r=0}^2 (22)_r. \quad (3.15)$$

Простые Π ($\rho_{(00)}(u) = 1$):

$$\rho_{(30)}(u) = \rho_{(03)}(u) = \frac{(u+1)(u-2)(u+4)}{(u-1)(u+2)(u-4)},$$

$$\rho_{(44)}(u) = \frac{(u+1)(u+2)(u+4)(u+5)}{(u-1)(u-2)(u-4)(u-5)}, \quad (3.16)$$

$$\rho_{(60)}(u) = \rho_{(06)}(u) = \frac{(u+4)(u+5)}{(u-4)(u-5)}, \quad \rho_{(52)}(u) = \rho_{(25)}(u) = \frac{u-2}{u+2} \rho_{(44)}(u).$$

Π кратности два: (11) , (41) , (14) , (33) . Связь (3.13) коэффициентов $x_1(u)$ и $x_0(u)$ в формуле (3.11) и в данном случае позволяет предположить справедливость общего соотношения

$$x_0(u) = \left(2u^3 - \frac{1}{2} [c_2(\lambda_1 \mu_1) + c_2(\lambda_2 \mu_2) + c_2(\lambda \mu) + 4] u - 6c_3(\lambda_1 \mu_1) + 6c_3(\lambda_2 \mu_2) \right) x_1(u), \quad (3.17)$$

где $\Pi(\lambda \mu)$ имеет кратность два в разложении КГ $(\lambda_1 \mu_1) \otimes (\lambda_2 \mu_2)$.

Учитывая это, приведем только матрицы $A(u)$ и коэффициенты $x_1(u)$:
 $(\lambda, \mu) = (11)$

$$A_1^1 - A_0^0 = 2(9u+8), A_0^1 = 4\sqrt{3}(2-u); A_1^0 = 2\sqrt{3}(4-u),$$

$$D(u) = \det \bar{A}(u) = 105u^2 + 256, x_1(u) = [2(u-1)(u-4)(u+2)]^{-1} \varrho_{(100)}(u); \quad (3.18)$$

$$(\lambda, \mu) = (41), (14)$$

$$A_2^2 - A_1^1 = 4(9u+5), A_1^2 = 10\sqrt{3}(1-u), A_2^1 = 2\sqrt{3}(5-u),$$

$$D(u) = 16(24u^2 + 25), x_1(u) = [2(u-5)(u-2)(u+1)]^{-1} \varrho_{(30)}(u); \quad (3.19)$$

$$(\lambda, \mu) = (33)$$

$$A_2^2 - A_1^1 = 4(9u+2), A_1^2 = -6u\sqrt{15}, A_2^1 = 8\sqrt{\frac{3}{5}}(5-u),$$

$$D(u) = 25(9u^2 + 64), x_1(u) = [2(u+2)^2(u+5)]^{-1} \varrho_{(44)}(u). \quad (3.20)$$

Неприводимое представление (22) имеет кратность три. Соответствующие матрицы $A(u)$ (бесследовая) и $\varrho_{(22)}(u)$:

$$A_0^0 = -8(3u+2), A_1^1 = -2(3u+5), A_2^2 = 2(15u+13), A_0^1 = \frac{32}{\sqrt{3}}(2-u),$$

$$A_1^2 = 10\sqrt{\frac{5}{3}}(1-u), A_0^2 = A_2^0 = 0, A_1^0 = \frac{16}{\sqrt{3}}(4-u),$$

$$A_2^1 = 2\sqrt{\frac{5}{3}}(5-u);$$

$$\varrho_{(22)}(u) = [8(u-5)(u-4)(u^2-4)(u^2-1)]^{-1} \cdot \{ A^2(u) + 4(u^3 - u^2 - 12u + 4)A(u) + 8(u^6 - u^5 - 25u^4 + 17u^3 + 92u^2 - 108u - 144) \}. \quad (3.21)$$

Важное свойство R -матрицы - "унитарность": $R(u)R(-u) = 1$ при $(\lambda, \mu) = (11)$ в (3.8), как легко видеть, имеет место для собственных значений (3.9), отвечающих НП кратности один. Для НП кратности два можно проверить, что найденная матрица $\varrho_{(11)}(u)$ не унитарна. Однако ее собственные значения $\varrho_{\pm}(u) = x_0(u) \pm \pm x_1(u) \sqrt{D(u)}$ удовлетворяют свойству "унитарности".

Литература

- I. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu., Sklyanin E.K. Lett.Math.Phys., 1981, v.5, p.393-400.

2. Кулиш П.П., Решетихин Н.Ю. Зап.научн.семина. ЛОМИ, 1982, т.120, с.92-121.
3. Shagr R.T. Jour.Math.Phys., 1975, v.16, N 10, p.2050-2053.
4. Алишаускас С.И. ЭЧАА, 1983, т.14, в.6, с.1336-1379.
5. Moshinsky M. Jour.Math.Phys., 1963, v.4, N 5, p.1128-1131.
6. Chew C.K., Shagr R.T. Can.Jour.Phys., 1966, v.44, p.2789-2791.
7. Resnikoff M. Jour.Math.Phys., 1967, v.8, N 1, p.63-79.
8. Плухарж З., Смирнов Ю.Ф., Толстой В.Н. Развитие аппарата $SU(3)$ симметрии. - Препринт Карлова университета, Прага, 1981.
9. Гусева И.С., Смирнов Ю.Ф., Толстой В.Н., Харитонов Ю.И. Коэффициенты Клебша - Гордана группы $SU(3)$. 2. - Препринт ЛИЯФ - 837, Ленинград, 1981, 33 с.
10. Алишаускас С.И. Лит.физ.сб., 1978, т.18, № 6, с.701-713.
11. Гусева И.С., Смирнов Ю.Ф., Толстой В.Н., Харитонов Ю.П. Коэффициенты Клебша - Гордана группы $SU(3)$. I. - Препринт ЛИЯФ - 678, Ленинград, 1981, 31 с.
12. Алишаускас С.И. Лит.физ.сб., 1972, т.12, №5, 721-729.
13. Гельфанд И.М., Цетлин. Докл.АН СССР, 1950, т.71, с.825-831.
14. England T. Nucl.Phys., 1965, v.72, p.68-71.
15. Vergados J.V. Nucl.Phys., 1968, v.111, p.681-691.
16. Филиппов Г.Ф., Овчаренко В.И., Смирнов Ю.Ф. Микроскопическая теория коллективных возбуждений атомных ядер. Киев: Наукова думка, 1981.
17. Алишаускас С.И., Норвайшас Э.З. Лит.физ.сб., 1979, т.19, № 7, с.623-631.
18. Kuriyan J.G., Lurie D., Masfarlane A.J. Jour.Math.Phys., 1965, v.6, N 5, p.722-733.
19. Baird E., Biedenharn L., Jour.Math.Phys., 1965, v.6, N 10, p.1847.
20. Алишаускас С.И. Лит.физ.сб., 1969, т.9, с.641-651.
21. Алишаускас С.И. Лит.физ.сб., 1982, т.22, №2, с.13-21.
22. Biedenharn L.C., Louck J.D. Jour.Math.Phys., 1972, v.13, N 10, p.1985-1991; *ibid*, 1977, v.18, N 9, p.1883-1891.