



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. I. Anisimov, V. A. Khokhlov, INSTABILITY OF WAVES OF LASER VAPORIZATION IN DIELECTRICS, *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 1983, Volume 53, Issue 7, 1249–1253

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.82

February 8, 2025, 15:57:57



УДК 536.423.1

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН ЛАЗЕРНОГО ИСПАРЕНИЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

С. И. Анисимов, В. А. Хохлов

Исследована устойчивость плоского квазистационарного фронта испарения диэлектрика, поглощающего лазерное излучение. Показано, что плоский фронт неустойчив относительно малых возмущений как с конечным волновым вектором  $k$ , лежащим в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения фронта, так и к одномерным возмущениям с  $k=0$ . Выяснены условия возникновения колебательных режимов движения фронта.

В настоящей работе рассматривается вопрос об испарении нелинейно-поглощающих твердых диэлектриков под действием лазерного излучения. Этот вопрос представляет интерес в связи с задачами силовой оптики и лазерной технологии. Практически речь идет о прозрачных материалах, для обработки которых может быть использовано лазерное излучение, а также о стеклах и некоторых кристаллических диэлектриках, применяемых для изготовления лазерной оптики. В литературе описан ряд экспериментов [1-4] и теоретических исследований [1, 5], посвященных испарению прозрачных диэлектриков под действием лазерного излучения с интенсивностью ниже порога пробоя. Для инициирования волны испарения в таких условиях необходима начальная поглощающая «затравка», которая обеспечивала бы локальное повышение температуры и образование поглощающего слоя с достаточно высокой концентрацией свободных носителей. Качественно аналогичная ситуация имеет место в газах, где поддерживаемые лазерным излучением волны ионизации могут распространяться при интенсивностях ниже порога пробоя холодного газа [6, 7].

Теоретически исследованы лишь стационарные волны испарения в диэлектриках. Процесс формирования таких волн из начальной затравки и их устойчивость не рассматривались. В то же время по аналогии с известной неустойчивостью плоского фронта испарения при линейном поглощении [8] можно ожидать, что и в нелинейном случае при определенных условиях будут существовать неустойчивые моды с конечными волновыми числами. Кроме таких мод, при достаточно сильной температурной зависимости коэффициента поглощения должны возникать условия для развития длинноволновой неустойчивости, аналогичной тепловому взрыву при экзотермической реакции. С неустойчивостью последнего типа связан оптический пробой диэлектриков, инициируемый микровключениями [9, 10]. Излагаемый ниже линейный анализ устойчивости плоского стационарного фронта испарения при нелинейном поглощении света показывает, что в определенных условиях могут возникать оба типа неустойчивости.

Волны испарения в конденсированных диэлектриках имеют ряд особенностей, отличающих их от волн испарения в средах с постоянным коэффициентом поглощения. Отметим две из них, важные для дальнейшего рассмотрения. Во-первых, поглощающий слой при зависящем от температуры коэффициенте поглощения имеет конечную оптическую толщину, которая уменьшается с ростом интенсивности лазерного излучения [1]. Иначе говоря, заметная часть падающего потока излучения проходит сквозь волну, не поглощаясь. Во-вторых, вследствие сильной температурной зависимости коэффициента поглощения геометрический размер поглощающего слоя в диэлектрике много меньше характерного масштаба распределения температуры. Таким образом, тепловой

источник в волне испарения резко локализован. Последнее обстоятельство было использовано в [5] для аналитического расчета параметров стационарных волн испарения, причем результаты такого расчета оказались близкими к точному численному решению задачи, полученному в [1].

Решая задачу о стационарной волне испарения [1, 5], легко видеть, что градиент температуры на фронте испарения направлен в сторону движения фронта. Согласно [8], плоский фронт испарения в этом случае может быть неустойчив. Для определения условий неустойчивости и расчета инкремента рассмотрим случай малой оптической толщины поглощающего слоя. Этот случай представляет практический интерес. Например [1], для кварцевого стекла и излучения неодимового лазера оптическая толщина не превышает 0.1 при интенсивностях  $q_0 \geq 2 \cdot 10^7$  Вт/см<sup>2</sup> и падает с ростом интенсивности как  $q_0^{-1/2}$ . Если пренебречь малым изменением интенсивности внутри поглощающего слоя, то задача о волне испарения сводится (как и в случае линейного поглощения [8]) к определению температурного поля в диэлектрике. Будем считать, что однородный и постоянный во времени поток излучения  $q_0$  распространяется вдоль оси  $x$ . Температура  $T(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению теплопроводности<sup>1</sup>

$$c\rho(\partial T/\partial t) = \text{div}(\kappa \nabla T) + \mu(T)q_0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\kappa(\nabla T)_n = \rho Lv(T), \quad v(T) = c_0 \exp(-L/RT) \quad (2)$$

на фронте испарения  $x = X(y, t)$  и

$$T \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Уравнение границы фаз  $X(y, t)$  заранее не известно и должно быть найдено в процессе решения задачи (1)–(3). Входящая в граничное условие (2) теплота испарения  $L$  зависит от кривизны границы и дается выражением [8]  $L = L_0 + \sigma/pr$ , где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $L$  — удельная теплота испарения для плоской границы фаз,  $r$  — радиус кривизны границы. Как и в [1, 5, 8], рассматривается испарение в вакуум и пар предполагается прозрачным для лазерного излучения. Для температурной зависимости коэффициента поглощения диэлектрика  $\mu(T)$  принято то же выражение, что и в [1, 5]. Такой выбор оправдан тем, что рассчитанная в [1, 5] зависимость стационарной скорости испарения кварцевого стекла от интенсивности излучения (при постоянном коэффициенте теплопроводности  $\kappa$ ) находится в удивительном согласии с экспериментом.

Задача (1)–(3) имеет частное решение в виде плоской стационарной волны испарения:  $T(x, y, t) = T_s(\xi)$ ,  $\xi = x - v_s t$ . Рассмотрим устойчивость этого решения. Введем малые возмущения границы фаз  $\delta(y, t) = X(y, t) - v_s t$  и температуры  $\theta(\xi, y, t) = T(x, y, t) - T_s(\xi) = f(\xi) \exp(\gamma t +iky)$ . Линеаризуя уравнение (1), получаем

$$\chi f'' + v_s f' + f[\chi U(\xi) - \gamma - \chi k^2] = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$U(\xi) = \frac{q_0}{\kappa} \left[ \frac{d\mu}{dT} \right]_{T=T_s(\xi)},$$

$\chi = \kappa/c\rho$  — температуропроводность. Граничное условие при  $\xi = 0$  для уравнения (4) получается из точного условия (2) разложением в ряд по малым возмущениям  $\delta(y, t)$  и  $\theta(0, y, t)$  с последующим исключением  $\delta(y, t)$ . Оно записывается в виде

$$f'(0) + \alpha f(0) = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{v_s}{\chi} \frac{v_s^2 + \gamma\chi + \Lambda(k\chi)^2}{v_s^2 - m\varepsilon[\varepsilon\gamma\chi + \Lambda(k\chi)^2]}, \quad \Lambda = \frac{\sigma v_s}{\rho L_0 \chi}, \quad m = \frac{c}{R}, \quad \varepsilon = \frac{RT_s(0)}{L_0}. \quad (5)$$

<sup>1</sup> Отметим, что при интенсивностях, меньших порога пробоя, возможны две различных постановки эксперимента по лазерному испарению прозрачного диэлектрика: в первом варианте излучение падает на поглощающий слой со стороны испаренного материала, во втором — со стороны холодного (и поэтому прозрачного) конденсированного диэлектрика. В приближении малого поглощения оба эти случая описываются одними и теми же формулами.

Отметим, что в отличие от рассмотренного в [8] случая линейного поглощения возмущение границы  $\delta(y, t)$  не входит в уравнение для возмущений температуры, что несколько упрощает исследование устойчивости.

Инкремент неустойчивости  $\gamma(k)$  является собственным числом задачи (4)–(5). Для дальнейшего удобно несколько преобразовать уравнение (4), приведя его к стандартной форме уравнения Шредингера. Полагая в (4)  $f(\xi) = \varphi(\xi) \exp(-v_* \xi / 2\chi)$ , получаем

$$\varphi'' + (E - U)\varphi = 0, \quad (6)$$

где  $E = k^2 + (\gamma/\chi) - (v_*^2/4\chi^2)$ . Граничное условие (5) преобразуется при этом к виду

$$\varphi'(0) + \omega\varphi(0) = 0, \quad \omega = \alpha - v_*/2\chi. \quad (7)$$

Роль потенциала в уравнении Шредингера (6) играет производная коэффициента поглощения по температуре. Основная температурная зависимость  $\mu(T)$  дается множителем вида  $\exp(-T_g/T)$ , причем  $T_g \gg T$ . Легко видеть, что из-за сильной температурной зависимости  $\mu(T)$  функция  $U(\xi)$  отлична от нуля только в узком интервале значений  $\xi$  вблизи максимума невозмущенной температуры  $T_*(\xi)$ . Поэтому задача определения собственного значения сводится к стандартной квантовомеханической задаче о нахождении уровня энергии в поле короткодействующего потенциала (несущественное в данном случае отличие состоит в ином граничном условии). Простые вычисления приводят к следующей системе уравнений для инкремента неустойчивости:

$$2p(p - \omega) = I[p - \omega + (p + \omega)\exp(-2ap)], \quad p^2 = \frac{v_*^2}{4\chi^2} + \frac{\gamma}{\chi} + k^2, \\ \omega = \frac{v_*}{\chi} \left[ \frac{v_*^2 + \gamma\chi + \Lambda(\chi k)^2}{v_*^2 - m\epsilon\chi(\gamma\epsilon + \Lambda\chi k^2)} - \frac{1}{2} \right]. \quad (8)$$

Здесь

$$I = \frac{q_0}{\chi} \int_0^\infty \mu'(T_*) d\xi, \quad \text{Re } p \geq \frac{v_*}{2\chi},$$

$a$  — координата максимума функции  $T_*(\xi)$ . Систему (8) можно переписать в виде замкнутого уравнения для параметра  $p$

$$(2p - I) \left\{ \left( p - \frac{v_*}{2\chi} \right)^2 - (1 - \Lambda)k^2 + m\epsilon^2 \left( \frac{p\chi}{v_*} + \frac{1}{2} \right) \left[ p^2 - \left( 1 - \frac{\Lambda}{\epsilon} \right) k^2 - \frac{v_*^2}{4\chi^2} \right] \right\} + \\ + I \exp(-2ap) \left\{ \left( p + \frac{v_*}{2\chi} \right)^2 - (1 - \Lambda)k^2 - m\epsilon^2 \left( \frac{p\chi}{v_*} - \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ p^2 - \left( 1 - \frac{\Lambda}{\epsilon} \right) k^2 - \frac{v_*^2}{4\chi^2} \right] \right\} = 0. \quad (9)$$

Инкремент неустойчивости связан с решением уравнения (9) соотношением  $\gamma = \chi(p^2 - k^2) - v_*^2/4\chi$ . При решении уравнения (9) следует учитывать неравенства, вытекающие из анализа невозмущенного решения (см. [1, 5]:  $\epsilon \ll 1$ ,  $\Lambda \ll 1$ ,  $m\epsilon^2\chi \ll av_* < \chi$ ).

Легко видеть, что область параметров, в которой инкремент  $\gamma(k)$  имеет ненулевую мнимую часть (колебательные режимы), совпадает с областью комплексных решений уравнения (9). Эта область в плоскости  $(I, k)$  показана на рисунке. Положение ее границы зависит от параметра  $a$ . С ростом  $a$  область колебательных решений быстро уменьшается.

При исследовании устойчивости интересны в первую очередь моды с  $\text{Re } \gamma > 0$ . Им соответствуют решения уравнения (9) с достаточно большой действительной частью  $\text{Re } p$ . Рассмотрим поэтому предельный случай  $\text{Re}(ap) \gg 1$ , когда второе слагаемое в (9) является малой поправкой. Одна из ветвей решения есть в этом случае ( $aI \gg 1$ )

$$p = \frac{I}{2} (1 + R_1), \quad R_1 \approx \left( 1 + \frac{m\epsilon^2\chi I}{v_*} \right) e^{-aI}. \quad (10)$$

Для инкремента отсюда следует выражение

$$\gamma(k) = \chi \left( \frac{I^2}{4} - k^2 \right) - \frac{v_s^2}{4\chi}.$$

Наибольший инкремент имеют возмущения с  $k=0$ . По мере роста  $k$  происходит стабилизация возмущений вследствие теплопроводности. Качественно подобный характер имеет неустойчивость при тепловом взрыве и оптическом пробое на микровключениях.

Заметим, что в приближенную формулу (10) не входит волновое число  $k$ . Однако непосредственно из уравнения (9) легко видеть, что решение (10) неприменимо в экспоненциально узкой области, определяемой неравенством

$$\left| \left( I - \frac{v_s}{\chi} \right)^2 - 4(1 - \Lambda)k^2 + m\varepsilon^2 \left( \frac{\chi I}{v_s} + 1 \right) \left[ I^2 - 4 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( 1 - \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right) k^2 - \frac{v_s^2}{\chi^2} \right] \right| \leq \frac{4v_s I}{\chi} \exp(-aI). \quad (11)$$

В этой области инкремент  $\gamma(k)$  принимает комплексные значения (см. рисунок).

Другая ветвь дисперсионного уравнения описывает при  $aI \gg 1$  неустойчивые моды, аналогичные изученным в [8]. Из (9) находим

$$p = \frac{v_s}{2\chi} k (\sqrt{1 - \Lambda} + R_2) \quad \text{при } 1 \ll ak \ll \frac{av_s}{m\varepsilon^2\chi}, \\ p = k \left( \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{\varepsilon}} + R_3 \right) \quad \text{при } k \gg \frac{v_s}{m\varepsilon^2\chi}. \quad (12)$$

Границы области колебательных режимов при значениях параметра  $av_s/\chi=1$  (1) и 0.1 (2).

В заштрихованной области  $\text{Im}\gamma \neq 0$ .

Выражения для поправок  $R_2=0(m\varepsilon^2 + v_s/k\chi)$  и  $R_3=0(v_s^2/k^2\chi^2)$  приведены в Приложении. Из (12) следуют формулы для инкремента неустойчивости

$$\gamma(k) = \begin{cases} kv_s - \Lambda\chi k^2 & \text{при } k \ll v_s/m\varepsilon^2\chi, \\ \frac{v_s}{m\varepsilon^2\chi} - \frac{\Lambda\chi k^2}{\varepsilon} & \text{при } k \gg \frac{v_s}{m\varepsilon^2\chi}. \end{cases} \quad (13)$$

Для рассматриваемой ветви максимум инкремента достигается при конечном  $k$ . Стабилизация коротковолновых возмущений происходит (как и в [8]) вследствие зависимости теплоты испарения от кривизны фазовой границы. Решение (12) неприменимо в малой области значений  $k \sim I/2$ , определяемой неравенством (11). Нетрудно убедиться, что при  $aI \gg 1$  в этой области  $\text{Re}p \gg \gg \text{Im}p$  и  $\text{Re}\gamma > 0$ , т. е. имеет место неустойчивость.

Рассмотрим теперь случай  $aI \ll 1$ . В этом случае нет решений типа «теплого взрыва», описываемых формулой (10). Аперриодические моды типа (12) существуют теперь только при  $ak \gg 1$ , тогда как при  $ak \ll 1$  нет никаких решений с  $\text{Re}(ap) \gg 1$ . Рассмотрим в области  $aI \ll 1$ ,  $ak \ll 1$  (окрестность начала координат на рисунке) решения, для которых  $|ap| \ll 1$ . Разлагая экспоненту в ряд, находим

$$p \approx \frac{v_s}{2\chi} (1 + 2aI) \pm \sqrt{k^2 - \frac{v_s I}{\chi} (1 + aI)}. \quad (14)$$

При малых  $k$  решение (14) оказывается комплексным. Ему соответствуют колебательные возмущения с инкрементом

$$\gamma(k) \approx -v_s I \pm v_s \sqrt{k^2 - v_s I / \chi}.$$

Решения типа (14) с  $|ap| \ll 1$  можно построить и в рассмотренной ранее области  $aI \gg 1$ ,  $ak \gg 1$ .

Отметим, что возмущения, для которых  $ak > 1$  и  $|ap| < 1$ , очевидно, имеют  $\text{Re } \gamma < 0$ , т. е. являются затухающими. Также не приводят к неустойчивости и здесь не рассматриваются возмущения, у которых  $|\text{Im } p| \gg \text{Re } p$ .

Приведенные результаты относятся к волнам испарения, в которых оптическая толщина поглощающего слоя мала. Увеличение оптической толщины само по себе не ведет к каким-либо принципиальным трудностям в исследовании устойчивости, если геометрическая толщина поглощающего слоя остается малой по сравнению с масштабом теплопроводности  $\chi/v_s$ . Описанный выше простой подход, использующий дельтаобразный характер функции  $U(\xi)$ , требует лишь незначительных изменений. Ситуация существенно меняется, однако, если рост оптической толщины связан с геометрическим расширением поглощающего слоя. Из анализа стационарной задачи следует, что это происходит при относительно слабой температурной зависимости коэффициента поглощения  $\mu(T)$ . Качественно ясно, что при этом замедляется рост однородных возмущений типа (10) и вся картина приближается к рассмотренному в [8] случаю линейного ( $\mu = \text{const}$ ) поглощения.

## П р и л о ж е н и е

Приведем приближенные решения уравнения (9) при  $aI \gg 1$ . Для первой ветви вдали от экспоненциально малой области комплексных  $p$  решение дается формулой (10). Более точное выражение для  $R_1$ , справедливое вплоть до границы области колебательных режимов, имеет вид

$$R_1 \simeq \frac{A_2 B + A_1^2 - 4k^2}{A_1 B + A_2^2 - 4k^2} e^{-aI}, \quad A_{1,2} = I \pm \frac{v_s}{\chi}, \quad B = \frac{m\varepsilon^2 \chi}{2v_s} (A_1 A_2 - 4k^2).$$

Для второй ветви, обозначая  $z = k(\chi/v_s)$ , имеем

$$R_2 = -m\varepsilon^2 \frac{(z+1)(\Delta z/\varepsilon + 1)}{2z+1} \quad \text{при} \quad \frac{\chi}{av_s} \ll z \ll \frac{1}{m\varepsilon^2},$$

$$R_3 = \frac{1 + \Delta z/\varepsilon}{2m\varepsilon^2 z^2} \quad \text{при} \quad z \gg \frac{1}{m\varepsilon^2}.$$

В формулах для  $R_2$  и  $R_3$  мы опустили экспоненциальные поправки, которые обычно малы.

Решения уравнения (9), соответствующие колебательной неустойчивости при  $aI \gg 1$ , имеют вид

$$p = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[ C_1 \pm \sqrt{C_2^2 - \frac{8I^2 v_s}{\chi A_2} \exp(-aI)} \right], & k \ll \frac{v_s}{\chi m\varepsilon^2}, \\ \frac{1}{4} \left[ D_1 \pm \sqrt{D_2^2 - \frac{8v_s^2}{m\varepsilon^2 \chi^2} \left(1 - \frac{\Delta}{2\varepsilon} \frac{\chi I}{v_s}\right) \exp(-aI)} \right], & k \gg \frac{v_s}{\chi m\varepsilon^2}, \end{cases}$$

$$C_{1,2} = A_{1,2} \pm 2(k + R_2), \quad D_{1,2} = I \pm 2(k + R_3).$$

Волновой вектор колебательной моды близок к  $A_1/2$ .

## Л и т е р а т у р а

- [1] И. В. Алешин, А. М. Бонч-Бруевич, Я. А. Имас и др. ЖТФ, 47, 2420 (1977).
- [2] С. А. Белозеров, А. А. Орлов, П. И. Уляков. Квант. электр., 4, 641 (1977).
- [3] Н. В. Зеликин, Н. Е. Каск, В. В. Радченко и др. Письма ЖТФ, 4, 1296 (1978).
- [4] Н. Е. Каск, В. В. Радченко, Г. М. Федоров и др. Квант. электр., 5, 438 (1978).
- [5] А. А. Ковалев. ЖТФ, 49, 1041 (1979).
- [6] Ю. П. Райзер. Лазерная искра и распространение разрядов, гл. 6. «Наука», М. (1974).
- [7] В. А. Гальбурт, М. Ф. Иванов. Препринт ИТФ им. Ландау АН СССР № 16-79, Черноголовка (1979).
- [8] С. И. Анисимов, М. И. Трибельский, Я. Г. Эпельбаум. ЖЭТФ, 78, 1597 (1980).
- [9] С. И. Анисимов, Б. И. Макшанцев. ФТТ, 15, 1090 (1973).
- [10] С. И. Анисимов, В. А. Гальбурт, М. И. Трибельский. Квант. электр., 8, 1671 (1981).