Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

L. Yu. Kossovich, Investigation of the solution of a problem of wave propagation in a cylindrical shell of variable thickness, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1982, Number 9, 20–24

https://www.mathnet.ru/eng/ivm6875

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.81
December 6, 2025, 06:29:31

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1982 МАТЕМАТИКА № 9 (244)

Л. Ю. Коссович УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В работе [1] решается задача о распространении упругих волн в полубесконечной цилиндрической оболочке переменной толщины при действии внезапно приложенного изгибающего момента. Решение задачи на базе уравнений теории типа Тимошенко сводится асимптотическим методом к решению двух задач, описывающих динамический краевой эффект на базе уравнений теории Кирхгофа—Лява и быстроизменяющееся волновое состояние, названное в работе [1] состоянием типа Тимошенко. В данной статье метод изучения асимптотического поведения контурных интегралов применяется к исследованию перехода решения по теории типа Кирхгофа—Лява в решение для составляющей типа Тимошенко, полученных с помощью метода ВКБ в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа по временной переменной.

§ 1. Решение для динамического краевого эффекта

Разрешающее уравнение динамического краевого эффекта относительно безразмерного прогиба w в случае нулевого показателя изменяемости во времени имеет вид (см. [1]):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi_1^4} + \frac{12}{f^2}(1-\nu^2)\,w + \frac{12}{f^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \tau_0^2} = -\mu\,\frac{6}{f}\,\frac{df}{d\xi_0}\,\frac{\partial^3 w}{\partial \xi_1^3}, \tag{1.1}$$

где $\xi_0 = x/R$, $\xi_1 = \xi_0/\mu$, $\tau_0 = [E/(1-\nu^2)\rho]^{1/2}\,t/R$, $f(\xi_0) = h/h_0$, $\mu = \varepsilon^{1/2}$, $\varepsilon = h_0/R$; x — координата вдоль образующей; t — время; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; ρ — плотность; h — толщина (функция нулевой изменяемости); h_0 — толщина при $\xi_0 = 0$; R — радиус оболочки.

К решению (1.1) применим метод интегрального преобразования Лапласа по τ_0 и метод ВКБ в пространстве изображений, согласно которому изображение прогиба представляется в виде

$$\overline{w} = W(\xi_0, s)\,e^{P(\xi_0, s)/\mu}, \quad W(\xi_0, s) = A(s)\sum_{n=0}\mu^n W_n(\xi_0, s), \tag{1.2}$$

где $s = u + iv$ — параметр преобразования. Корректность применения метода ВКБ в пространстве изображений будет исследоваться ниже.

Подставляя (1.2) в уравнение (1.1), преобразованное в изображениях (используются нулевые начальные условия), и, приравнивая члены при одинаковых степенях малого параметра μ, придем к уравнениям для функции изменяемости p и членов разложения функции интенсивности W, откуда следует вид решения для $\overline{w}$

$$\overline{w} = \sum_{n=0}\mu^n\overline{w}_n, \quad \overline{w}_n = \frac{A_1 W_{n,1}(\xi_0)}{(-1+i)^n\lambda^n}\,e^{(-1+i)\lambda P(\xi_0/\mu)} + \frac{A_2 W_{n,2}(\xi_0)}{(-1-i)^n\lambda^n}\,e^{(-1-i)\lambda P(\xi_0/\mu)}, \tag{1.3}$$

$$\lambda = 3^{1/4}(\omega^2 + s^2)^{1/4}, \quad \omega^2 = 1-\nu^2, \quad P(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0}\int_0^{\xi_0}\frac{d\xi_0}{f^{1/2}},$$

$$W_{n,j}=\frac{1}{f^{3/4}}\Big\{C_{n,j}-\int\limits_0^{\xi_0}\Big[\frac{3}{2}f^{5/4}W''_{n-1,j}+3f^{1/4}f'W'_{n-1,j}+\Big(\frac{21}{16}\frac{f'^2}{f^{3/4}}-\frac{f''f^{1/4}}{2}\Big)W_{n-1,j}+$$

$$+f^{7/4}W'''_{n-2,j}+\frac{15}{4}f^{3/4}f'W''_{n-2,j}-\Big(\frac{f^{3/4}f''}{2}+\frac{3}{2}\frac{f'^2}{f^{1/4}}\Big)W_{n-2,j}-$$

$$-\Big(\frac{f'''f^{3/4}}{8}+\frac{3}{16}\frac{f''f'}{f^{3/4}}+\frac{21}{16}\frac{f'^3}{f^{5/4}}\Big)W_{n-2,j}+\frac{f^{9/4}}{4}W^{\mathrm{IV}}_{n-3,j}+\frac{3}{2}f'f^{5/4}W'''_{n-3,j}\Big]d\xi_0\Big\},$$

A_j — произвольные функции параметра преобразования s, определяемые из граничных условий; $C_{n,j}$ — постоянные интегрирования.

Использование формулы Меллина [2] приводит нахождение оригинала для (1.3) к вычислению интегралов вида

$$F_{1,j}=\int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty}\frac{A_j(s)}{\lambda^n}e^{s\tau-(1\mp i)\lambda P(\xi_0/\mu)}ds. \tag{1.4}$$

Интеграл (1.4) сводится к интегралам по действительным переменным при помощи выбора соответствующего контура. Замкнутый контур составляется из отрезка $[u-i\rho_1,\ u+i\rho_1]$; отрезков, лежащих по берегам разрезов вдоль мнимой оси до точек $s=\pm i\omega$; отрезков, лежащих по берегам разрезов до точек ветвления функции $A_j(s)$; дуг окружностей малого радиуса ρ_2, обходящих точки ветвления; дуг окружностей радиуса ρ_1, соединяющих концы отрезка $[u-i\rho_1,\ u+i\rho_1]$ с берегами разрезов и берега разрезов друг с другом. Устремляя ρ_1 к бесконечности, а ρ_2 к нулю и применяя лемму Жордана [2], выразим интеграл (1.4) через интегралы по берегам разрезов.

Достаточным условием того, чтобы оригинал от (1.3) являлся асимптотическим решением уравнения (1.1), является условие равномерной ограниченности интегралов $F_{1,j}$ в области фазовой плоскости $\tau_0<T\ (T=O(1))$ постоянной величиной $O(1)$. В этом случае, подставляя конечную сумму

$$w_{(N)}=\sum_{n=0}^{N}\mu^n w_n \tag{1.5}$$

в (1.1), придем к выводу, что конечная сумма (1.5) решает уравнение (1.1) с асимптотической погрешностью $o(\mu^{N+1})$.

Исследование поведения w с ростом ξ_0 может быть выполнено с помощью метода перевала. Для этого проведем в (1.4) замену переменной интегрирования

$$s=\frac{s_*}{r^2},\ r=\frac{\mu\tau_0}{\xi_0},\ F_{1,j}=\frac{r^{n-2}}{2\pi i}\int\limits_{u_*-i\infty}^{u_*+i\infty}\frac{1}{\tilde\lambda^n}A_j\Big(\frac{s_*}{r^2}\Big)e^{R\varphi_j}ds_*,$$

$$R=(\xi_0^2/\mu^2\tau_0),\ \tilde\lambda=3^{1/4}(s_*^2+\omega^2r^4)^{1/4},\ \varphi_j=s_*-(1\mp i)\tilde\lambda P. \tag{1.6}$$

Асимптотика интеграла (1.6) проводится при $R\gg 1$ и $r\ll 1$. Точкой перевала функций $\varphi_j(s)$ является точка

$$s_*^{(0)}=\pm(3^{1/2}/2)P^2i+O(r^4). \tag{1.7}$$

Пусть функция $A_j(s)$ имеет конечное число особых точек, координаты которых являются величинами $O(1)$ (что естественно предположить для рассматриваемого случая граничных функций нулевой изменяемости во времени).

Все особые точки подынтегральной функции остаются особыми вне контура, содержащего отрезок $[u_* - i\rho_1,\ u_* + i\rho_1]$ и отрезок проходящей через точку перевала линии наискорейшего спуска, уравнение которой в окрестности $s_*^{(0)}$ имеет вид

$$u_* = \frac{1}{3^{1/3}P^2}\left(v_*^2 - \frac{3}{4}P^4\right) + O(r^4). \tag{1.8}$$

Устремляя ρ_1 к бесконечности, получим с помощью метода перевала [2] следующую оценку:

$$F_{1,j} = \frac{M(\pm 2)^{m-1+n/2} r^{2m+n-2}}{\pi^{1/2}P^{2m+n-1}R^{1/2}}(1 \pm i)(i)^{m-1+n/2}\left[\cos\frac{3^{1/2}}{2}P^2R \pm i\sin\frac{3^{1/2}}{2}P^2R + \right.$$
$$\left. + O\left(\frac{1}{R} + r^4R\right)\right], \tag{1.9}$$

где $A_j(s) = M/s^m + o(1/s^m)$, $s \to \infty$.

Рассмотрим граничные условия относительно прогиба и изгибающего момента M_1 при $\xi_0 = 0$ (см. [1]):

$$M_1 = H(\tau),\ w = 0. \tag{1.10}$$

При условиях (1.10) $A_j(s) = 1/s\lambda^2$ и интегралы (1.4) представляют собой при $n < 2$ (задача решается с исходной погрешностью теории $O(\varepsilon)$) линейные комбинации следующих функций:

$$\int_0^\infty \frac{z^{1-n}S(12^{1/4}\omega^{1/2}z\xi_0/\mu)}{z^4+1}\cos[\omega\tau_0(z^4+1)^{1/2}]\,dz,\quad \left[\frac{sA_j(s)}{\lambda^n}e^{-(1\mp i)\lambda P(\xi_0/\mu)}\right]_{s=0}, \tag{1.11}$$

где под $S(y)$ подразумеваются функции $\sin y$, $\cos y$, e^{-y}. Анализ (1.11) показывает, что эти функции равномерно ограничены постоянными величины $O(1)$, следовательно, сумма (1.5) при $N = 1$ является асимптотическим решением уравнения (1.1) с граничными условиями (1.10); уравнение решается с невязкой $o(\varepsilon)$.

Формула (1.9) приводит к асимптотике M_1 с ростом координаты

$$M_1 = \frac{\mu\tau_0^{1/2}}{\pi^{1/2}3^{1/4}P^{5/2}\xi_0 f^{7/4}}\left(\cos\frac{3^{1/2}P^2\xi_0^2}{2\mu^2\tau_0} - \sin\frac{3^{1/2}P^2\xi_0^2}{2\mu^2\tau_0}\right) + O\left(\frac{\mu^3\tau_0^{3/2}}{\xi_0^3}\right). \tag{1.12}$$

§ 2. Решение для составляющей типа Тимошенко

Система разрешающих уравнений состояния типа Тимошенко относительно прогиба и углового перемещения ψ имеет вид (см. [1]):

$$\varkappa^2\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left[f\left(\frac{\partial w}{\partial\xi_2} + \psi\right)\right] - f\frac{\partial^2 w}{\partial\tau_2^2} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(f^3\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}\right) - 12\varkappa^2 f\left(\frac{\partial w}{\partial\xi_2} + \psi\right) - f^3\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau_2^2} = 0, \tag{2.1}$$

где $\xi_2 = \xi_0/\varepsilon$, $\tau_2 = \tau_0/\varepsilon$, $\varkappa = [k(1-\nu)/2]^{1/2}$, k—коэффициент сдвига.

Как и в случае динамического краевого эффекта, применим к решению (2.1) метод ВКБ в пространстве изображений преобразования Лапласа. Изображения в этом случае принимают вид

$$\bar{w} = \sum_{j=1}^{2} Q_j(s)\,W_j(\xi_0, s)\,e^{-\varphi_j(\xi_0, s)(\xi_0/\varepsilon)},\quad \bar{\psi} = \sum_{j=1}^{2} Q_j(s)\,\Psi_j(\xi_0, s)\,e^{-\varphi_j(\xi_0, s)(\xi_0/\varepsilon)},$$

$$W_j = \sum_{n=0}\varepsilon^n W_{j,n}(\xi_0, s),\quad \Psi_j = \sum_{n=0}\varepsilon^n \Psi_{j,n}(\xi_0, s),$$

$$\Psi_{j,n}=F_j W_{j,n}+\Phi_1,\quad W_{j,n}=\frac{1}{\sqrt{fp_1}}\left[C_{j,n}-\frac{\varkappa^2}{2}\int_0^{\xi_0}\sqrt{\frac{f}{p_1}}\left(\Phi_2+p_2\frac{d\Phi_2}{d\xi_0}+p_3\Phi_1\right)d\xi_0\right],$$

$$\Phi_1=\frac{1}{\chi_j^2-\frac{12\varkappa^2}{f^2}-s^2}\left[2\chi_j\frac{d\Psi_{j,n-1}}{d\xi_0}+\left(\frac{3f'}{f}\chi_j+\chi_j'\right)\Psi_{j,n-1}+\frac{12\varkappa^2}{f^2}\frac{dW_{j,n-1}}{d\xi_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{d^2\Psi_{j,n-2}}{d\xi_0^2}-\frac{3f'}{f}\frac{d\Psi_{j,n-2}}{d\xi_0}\right],\qquad F_j=\frac{\varkappa^2\chi_j^2-s^2}{\varkappa^2\chi_j},\tag{2.2}$$

$$\Phi_2=\frac{d^2W_{j,n-1}}{d\xi_0^2}+\frac{f'}{f}\frac{dW_{j,n-1}}{d\xi_0}-\frac{f^2}{12\varkappa^2}F_j\frac{d^2\Psi_{j,n-1}}{d\xi_0^2}-\frac{ff'}{4\varkappa^2}F_j\frac{d\Psi_{j,n-1}}{d\xi_0},$$

$$p_1=\frac{f^2\chi_j}{12}F_j^2-\frac{s^2}{\chi_j},\quad p_2=1+\frac{f^2\chi_j}{6\varkappa^2}F_j,\quad p_3=\frac{f'}{f}+\frac{f^2}{12\varkappa^2}F_j\left(\frac{3f'}{f}\chi_j+\chi_j'\right),$$

$$\varphi_j=\frac{1}{\xi_0}\int_0^{\xi_0}\chi_j\,d\xi_0,\quad \chi_j=Bs^{1/2}\left[s\mp K\left(s^2-\frac{a^2}{f^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2},$$

$$B=\left(\frac{1+\varkappa^2}{2\varkappa^2}\right)^{1/2},\quad K=\frac{1-\varkappa^2}{1+\varkappa^2},\quad a^2=\frac{48\varkappa^4}{(1-\varkappa^2)^2}.$$

Q_j—произвольные функции параметра преобразования s, определяемые из граничных условий; $C_{j,n}$—постоянные интегрирования.

Исследование свойств искомых оригиналов сводится с помощью формулы Меллина к исследованию интеграла

$$F_{2,j}=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}Q(s)\,e^{s\tau_2-\varphi_j(\xi_0/\varepsilon)}\,ds.\tag{2.3}$$

Интеграл (2.3) будем исследовать в области, достаточно удаленной от переднего фронта волны $\xi_2=\tau_2$. Проведем в (2.3) замену переменных

$$s=q^2s_*,\quad q=\frac{\xi_0}{\tau_0},\quad F_{2,j}=\frac{q^2}{2\pi i}\int_{u_*-i\infty}^{u_*+i\infty}Q(q^2s_*)\,e^{R\lambda_j}\,ds_*,$$

$$\lambda_j=s_*-\frac{Bs^{1/2}}{\xi_0}\int_0^{\xi_0}\left[q^2s_*\mp K\left(q^4s_*^2-\frac{a^2}{f^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}d\xi_0.\tag{2.4}$$

Асимптотика (2.4) проводится при $R\gg 1$ и $q\ll 1$, т. е. в области $\varepsilon^{1/2}\tau_0^{1/2}\ll\xi_0\ll\tau_0$. В рассматриваемом случае граничных функций нулевой изменяемости во времени основной вклад в интеграл (2.4), вычисляемый методом контурного интегрирования, вносит окрестность точки перевала

$$s_*^{(0)}=\mp(3^{1/2}/2)P^2i+O(q^2).\tag{2.5}$$

При этом анализ рекуррентных соотношений (2.2) в окрестности точки (2.5) дает асимптотический порядок функций $W_{j,n}$ и $\Psi_{j,n}$ в рассматриваемой области $\varepsilon^{1/2}\tau_0^{1/2}\ll\xi_0\ll\tau_0$

$$W_{j,n}=O(q^{-n}),\quad \Psi_{j,n}=O(q^{-n+1}).\tag{2.6}$$

В случае граничных условий (1.10) нулевой член ряда для изображения изгибающего момента имеет вид

$$\overline{M}_1=-\frac{\varkappa^2}{(1-\varkappa^2)s^2(s^2-a^2)^{1/2}}\left[\chi_1(\xi_0,s)\frac{\Psi_1(\xi_0,s)}{W_1(0,s)}e^{-(\varphi_1\xi_0/\varepsilon)}-\chi_2(\xi_0,s)\frac{\Psi_2(\xi_0,s)}{W_2(0,s)}e^{-(\varphi_2\xi_0/\varepsilon)}\right].\tag{2.7}$$

Функция $\overline{M}_1$ имеет точки ветвления при $s_* = 0$, $\pm a/q^2 f$, $\pm ib/q^2 f$ (для текущего значения ξ_0 и $\xi_0 = 0$), где $b = \sqrt{12\varkappa}$. Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из отрезка прямой $[u_* - i\rho_1, u_* + i\rho_1]$, отрезков на берегах разрезов, проходящих через точки ветвления $s_* = \pm ib/q^2 f$ и параллельных действительной оси, отрезков на берегах разреза вдоль действительной оси, проходящего через точку ветвления $s_* = a/q^2 f$, отрезка линии наискорейшего спуска, проходящей через точку ветвления (2.5), и отрезка линии, симметричной ей относительно действительной оси, дуг окружностей малого радиуса ρ_2, обходящих точки ветвления, дуг окружностей радиуса ρ_1, соединяющих концы отрезка $[u_* - i\rho_1, u_* + i\rho_1]$ с берегами разрезов.

Устремим радиус ρ_1 к бесконечности, а радиус ρ_2 к нулю. Интегралы вдоль дуг окружностей стремятся к нулю. Определим с помощью метода Лапласа, что интегралы по берегам разрезов, проходящих через точки $s_* = \pm ib/q^2 f$, имеют асимптотический порядок $O(q^2/R)$. Интегралы по берегам разреза, проходящего через точку $s_* = a/q^2$, уничтожаются в рассматриваемой области изменения переменных.

На основании вышеприведенных рассуждений с учетом (2.6), применяя метод перевала, получим асимптотику

$$M_1 = \frac{\mu\tau_0^{1/2}}{\pi^{1/2} 3^{1/4} P^{5/2} \xi_0 f^{7/4}} \left(\cos \frac{3^{1/2} P^2 \xi_0^2}{2\varepsilon\tau_0} - \sin \frac{3^{1/2} P^2 \xi_0^2}{2\varepsilon\tau_0} \right) + \delta,$$

$$\delta = O\left(\frac{\varepsilon^{3/2} \tau_0^{3/2}}{\xi_0^3} + \frac{\xi_0^3}{\varepsilon^{1/2} \tau_0^{5/2}} \right). \tag{2.8}$$

Сравнивая (2.8) и (1.12), заключаем, что решение для динамического краевого эффекта и быстроизменяющаяся волновая составляющая совпадают в области $\varepsilon^{1/2}\tau_0^{1/2} \ll \xi_0 \ll \varepsilon^{1/4}\tau_0^{3/4}$ с асимптотической погрешностью δ.

Анализ полученных решений показывает, что решение по теории Кирхгофа—Лява описывает изгибное состояние в зоне $\xi_0 \ll \varepsilon^{1/4}\tau_0^{3/4}$. Состояние типа Тимошенко имеет место в области $\xi_0 \gg \varepsilon^{1/2}\tau_0^{1/2}$. В области $\varepsilon^{1/2}\tau_0^{1/2} \ll \xi_0 \ll \varepsilon^{1/4}\tau_0^{3/4}$ решение по теории Кирхгофа—Лява с асимптотической погрешностью δ совпадает с решением для составляющей типа Тимошенко. Заметим, что такое совпадение возможно только при значениях времени $\tau_0 \gg \varepsilon$, что отражает факт непригодности теории Кирхгофа—Лява в начальный период времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю. Применение метода асимптотического интегрирования к задаче о распространении волн в цилиндрической оболочке переменной толщины.—Тр. XII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1980, т. I, с. 233—239.

2. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.—М., 1970.

г. Саратов

Поступила
25 XI 1980

Я. Л. Шапиро, В. А. Игошин. Отображения, сохраняющие траектории квазигеодезических потоков

(аннотация статьи, принятой к печати)

Основное содержание работы—доказательства теорем, анонсированных авторами в ДАН СССР (1980, т. 252, № 2) и в Изв. вузов. Матем. (1980, № 11, с. 85—87).

Получены также и некоторые новые результаты. В частности, с помощью (построенной в работе) проективной риманово геодезической модели консервативной динамической системы для каждой точки p ее конфигурационного многообразия доказано существование такой пары окрестностей $V \supset W \ni p$ и такого числа $\delta > 0$, что для каждого $\Delta\tau \in (0, \delta)$ любые две точки $p', p'' \in W$ соединены единственной лежащей в V траекторией, пробегаемой за „модельное время“ $\Delta\tau$; существование в любой окрестности $V \ni p$ траектории, являющейся невырожденной петлей с началом в точке p (последнее при условии: p не совпадает с положением равновесия).
(Работа поступила в журнал „Математика“ 20 XI 1981.)