

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Горин, Что можно сложить из кубиков?,
Квант, 2012, номер 3, 6–11

<https://www.mathnet.ru/kvant2095>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

24 апреля 2025 г., 22:15:38



ЧТО МОЖНО СЛОЖИТЬ ИЗ КУБИКОВ?

В.ГОРИН

Разбиения

Зададимся каким-нибудь натуральным числом n и разложим его в сумму целых положительных слагаемых:

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l.$$

Для определенности будем считать, что слагаемые упорядочены по невозрастанию:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0.$$

Такое разбиение удобно изображать в виде *диаграммы Юнга* λ – набора единичных квадратов на плоскости.

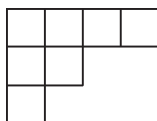


Рис.1. Диаграмма Юнга из 7 клеток, отвечающая разбиению $7 = 4 + 2 + 1$

В первом ряду мы располагаем λ_1 квадратов, во втором – λ_2 и т.д. Пример приведен на рисунке 1. При этом само число n оказывается равным числу клеток в диаграмме. Условимся также считать, что для $n = 0$ существует одна-единственная диаграмма Юнга – «пустая».

Упражнение 1. Изобразите все диаграммы Юнга из 5 клеток. Сколько их?

Диаграммы в прямоугольнике

Пусть $\Upsilon(m, k)$ обозначает множество всех диаграмм Юнга, помещающихся в прямоугольник $m \times k$. Иными словами, λ лежит в $\Upsilon(m, k)$

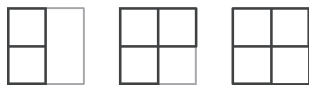
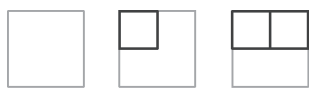


Рис.2. 6 диаграмм Юнга, составляющих множество $\Upsilon(2, 2)$

тогда и только тогда, когда длина первой строчки λ не превосходит k , а число строк в λ не больше m .

Для небольших m и k все элементы из $\Upsilon(m, k)$ нетрудно перечислить. На рисунке 2 приведены диаграммы Юнга из множества $\Upsilon(2, 2)$.

Упражнение 2. Изобразите элементы $\Upsilon(4, 2)$. Сколько их всего?

Как обычно, число элементов в множестве A будем обозначать через $|A|$. Найдем общую формулу для $|\Upsilon(m, k)|$. Чтобы определить это число, посмотрим на *границу* диаграммы Юнга – ломаную, идущую от левого нижнего угла прямоугольника до правого верхнего и ограничивающую диаграмму (как показано на рисунке 3). Двигаясь вдоль границы, мы делаем k шагов вверх и m шагов направо. Запишем последовательность шагов в виде строчки из букв «в» (вверх) и «н» (направо). Диаграмме на рисунке 3 при этом отвечает последовательность *нвннннвнн*. Ясно, что любая последовательность из k букв «в» и m букв «н»

однозначно задает диаграмму из $\Upsilon(m, k)$. Отсюда сразу видно, что $|\Upsilon(m, k)|$ совпадает с количеством способов расставить в ряд k букв «в» и m букв «н», т.е. с соответствующим биномиальным коэффициентом:

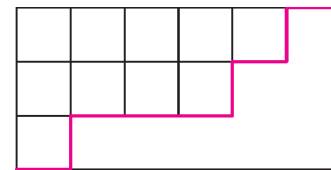


Рис.3. Диаграмма Юнга в коробке 3×3 , граница отмечена красным

$$|\Upsilon(m, k)| = \binom{m+k}{k} = \frac{(m+k)!}{m!k!}. \quad (1)$$

В частности, при $m = k = 2$ получаем $|\Upsilon(2, 2)| = \frac{4!}{2!2!} = 6$, что совпадает с ответом, полученным ранее.

Попробуем теперь ответить на вопрос о том, как выглядит *случайная* диаграмма Юнга из множества $\Upsilon(m, k)$. Чуть более формально, давайте объявим все элементы множества $\Upsilon(m, k)$ равновероятными, иными словами, в случайном эксперименте любая из этих диаграмм выпадает с вероятностью $1/|\Upsilon(m, k)|$. На рисунке 4 приведена «типичная» диаграмма Юнга в

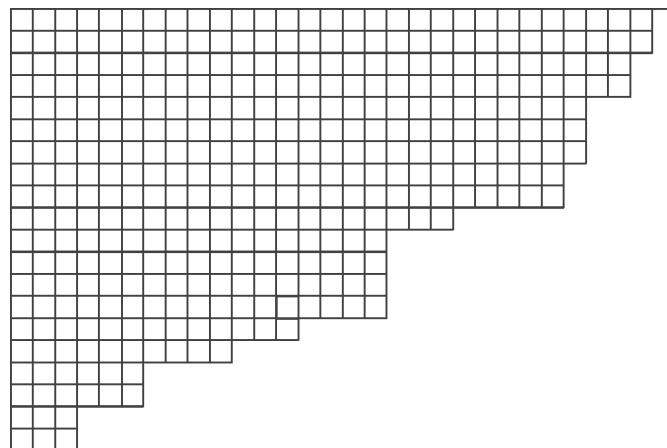


Рис.4. «Типичная» диаграмма Юнга в прямоугольнике 20×30

прямоугольнике размера 20×30 . Как мы видим, эта диаграмма в каком-то смысле «близка» к диагонали. На самом деле имеет место точное утверждение, называемое «законом больших чисел» или же «теоремой о предельной форме».

Прежде чем сформулировать эту теорему, введем вспомогательный целый параметр N , который мы в дальнейшем устремим к бесконечности. Зададимся какими-нибудь *пропорциями* прямоугольника $\mu : \kappa$ и рассмотрим прямоугольник со сторонами $m = \mu N$ и $k = \kappa N$. Например, если $\mu = \kappa = 1$, то речь идет просто о квадрате $N \times N$. Зафиксируем какое-нибудь число

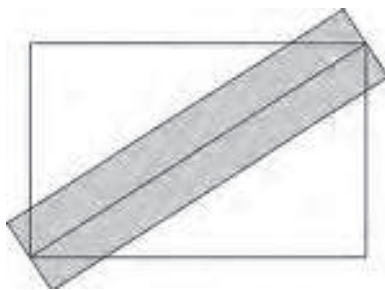


Рис.5. Окрестность диагонали прямоугольника

$\epsilon > 0$. Назовем ϵ -окрестностью диагонали прямоугольника $m \times k$ прямоугольник с высотой $2\epsilon N$, средняя линия которого совпадает с диагональю. Пример изображен на рисунке 5. Менее формально, эта окрестность представляет собой множество тех точек, которые после масштабирования всей картинке в N раз окажутся на расстоянии не более ϵ от диагонали. Обратим особое внимание на то, что (хотя мы и не обозначаем эту зависимость явно) множество точек ϵ -окрестности существенно зависит от выбора числа N .

Можно сказать и по-другому. Мы фиксируем прямоугольник размерами $\mu \times \kappa$, выделяем в нем ϵ -окрестность диагонали. А затем начинаем «измельчать» разбиение прямоугольника на клетки: сначала разбиваем на клеточки 1×1 , потом – на клеточки $1/2 \times 1/2$,, $1/N \times 1/N$, и так далее. Рисуем по этим клеточкам случайные диаграммы Юнга. И оказывается – чем мельче клеточки, тем больше вероятность того, что граница случайной диаграммы Юнга полностью поместится в выбранную нами ϵ -окрестность. Более того, эта вероятность стремится к 1 при стремлении размера клеточек к нулю.

Упражнение 3. Пусть $\epsilon = 1/5$, $\mu = \kappa = 1$, а $N = 6$. Сколько всего существует диаграмм Юнга из $\mathcal{Y}(6, 6)$, граница которых лежит в ϵ -окрестности диагонали квадрата?

Теорема 1 (закон больших чисел для диаграмм в прямоугольнике). Для любого $\epsilon > 0$ вероятность того, что граница случайной диаграммы Юнга из множества $\mathcal{Y}(\mu N, \kappa N)$ лежит в ϵ -окрестности диагонали прямоугольника, стремится к 1 при N , стремящемся к бесконечности.

На рисунке 6, в качестве иллюстрации к теореме 1, показаны границы диаграмм Юнга в прямоугольниках с пропорцией сторон $2 : 3$ при $N = 30, 60$ и 120 . Хорошо видно, что с ростом N граница все сильнее прижимается к диагонали прямоугольника.

Доказательство теоремы 1 достаточно технично, изложим здесь лишь его идею, а подробный план рассуждений приведен в приложении в конце статьи.

Рассмотрим прямую, проходящую через левый верхний угол прямоугольника под углом 45 градусов к осям координат, как на рисунке 7. Эта прямая пересекает границу диаграммы Юнга в одной-единственной точке K . Если диаграмма случайна, то и координата точки K является случайной величиной. Оказывается, для вероятности того, что эта координата принимает заданное значение, можно выписать явную формулу, зависящую от размеров прямоугольника. Анализируя эту формулу, можно убедиться, что при $N \rightarrow \infty$ вероятность того, что точка K лежит в $(\epsilon/2)$ -окрестности диагонали прямоугольника, стремится к единице. Затем можно убедиться, что аналогичное утверждение оказывается верным и для любой другой прямой, параллельной рассмотренной, а отсюда уже легко вывести, что и вероятность того, что вся граница диаграммы Юнга лежит в ϵ -окрестности диагонали, стремится к 1 при N , стремящемся к бесконечности.

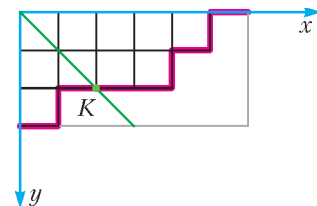


Рис.7. Пересечение границы диаграммы Юнга (красная) с прямой (зеленая)

Производящие функции

При изучении последовательностей конечных множеств (таких, как множества диаграмм Юнга разных размеров) удобно пользоваться производящими функциями. В этом разделе мы определим, что это такое.

Предположим, что у нас есть некоторый набор конечных множеств A_0, A_1, A_2, \dots . Производящей функцией множеств A_n называется степенной ряд

$$G(z; A_n) = |A_0| + z|A_1| + z^2|A_2| + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n |A_n|.$$

Заметим, что в этой записи не предполагается, что z – какое-то фиксированное число, скорее на производящие функции следует смотреть как на формальные суммы, операции с которыми производятся по обычным правилам сложения и умножения многочленов.

Упражнение 4. Пусть A_n – множество всех натуральных чисел, не превышающих 10 и делящихся на $n + 1$. Докажите, что

$$G(z; A_n) = 10 + 5z + 3z^2 + 2z^3 + 2z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9.$$

Чем же удобны производящие функции? Оказывается, производящие функции множеств во многих ситу-

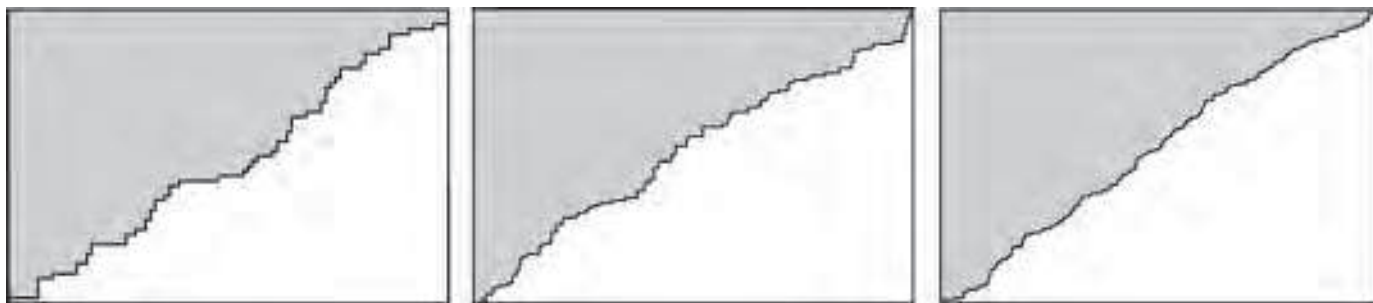


Рис.6. Границы «типичных» диаграмм Юнга в прямоугольниках 60×90 , 120×180 и 240×360

ациях могут быть вычислены и записаны в компактной форме. Например, пусть все A_n – одноэлементные множества, тогда их производящая функция

$$G(z; A_n) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (2)$$

может быть записана в виде

$$G(z; A_n) = 1/(1-z).$$

Как следует воспринимать последнюю формулу, которая очень напоминает известное правило для суммирования геометрической прогрессии? По определению $1/(1-z)$ – это такой степенной ряд, который после умножения на $1-z$ дает единицу. И действительно, умножая (2) на $1-z$ и раскрывая скобки, легко убедиться, что почти все слагаемые сокращаются и остается 1.

Кроме того, над производящими функциями можно производить все обычные операции: складывать, вычитать, перемножать, делить, возводить в степени, многие из этих операций отвечают несложным преобразованиям множеств. Приведем самый простой пример: предположим, что у нас есть два набора множеств A_n и B_n такие, что для каждого n все элементы A_n и B_n различны. Пусть $C_n = A_n \cup B_n$, тогда понятно, что

$$G(z; C_n) = G(z; A_n) + G(z; B_n).$$

Упражнения

5. Пусть A_n и B_n – два набора множеств. Определим C_n как множества пар (a, b) , в которых a является элементом одного из множеств A_k , b – элементом одного из множеств B_l , а сумма индексов этих множеств равна n , т.е. $k + l = n$. Докажите, что

$$G(z; C_n) = G(z; A_n)G(z; B_n).$$

6. Пользуясь результатом упражнения 5, найдите компактную (т.е. содержащую лишь конечное число арифметических операций) форму записи для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, где a_k – это число способов разделить k одинаковых конфет между Ваней, Петей, Машей и Дашей.

Подробнее о производящих функциях можно прочитать в статье С.Воронина и А.Кулагина «Метод производящих функций» в «Кванте» №5 за 1984 год, в книге С.Ландо «Лекции о производящих функциях»¹ и в книге С.Табачникова и Д.Фукса «Математический дивертисмент».

Диаграммы с фиксированным числом клеток

Вернемся теперь к диаграммам Юнга. Давайте изменим постановку задачи и откажемся от ограничивающего прямоугольника размера $m \times k$, вместо этого рассмотрим множество \mathbb{Y}_n всех диаграмм Юнга из n клеток. Снова начнем наше изучение с вопроса, сколько всего таких диаграмм. К сожалению, никакой простой явной формулы для $|\mathbb{Y}_n|$ – числа диаграмм Юнга из n клеток – до сих пор не известно. Но кое-что сделать можно.

Упражнение 7. Найдите $|\mathbb{Y}_n|$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Попробуем вычислить производящую функцию для множеств \mathbb{Y}_n диаграмм Юнга

$$Y(z) = G(z; \mathbb{Y}_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{Y}_n| z^n = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \dots$$

Уже Эйлер заметил следующее:

$$Y(z) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i)^{-1}. \quad (3)$$

Поясним, какой смысл имеет бесконечное произведение (3). Необходимо воспользоваться формулой для суммы геометрической прогрессии

$$(1 - z^k)^{-1} = 1 + z^k + z^{2k} + z^{3k} + \dots,$$

подставить эти выражения в (3), а затем перемножить возникающие ряды по обычным правилам перемножения многочленов. Нас не должен смущать тот факт, что перемножается бесконечное число сомножителей. Действительно, обратим внимание на то, что, чтобы вычислить коэффициент при z^n у бесконечного произведения, достаточно перемножить лишь первые n скобок, так как во всех последующих степени z больше n . А значит, мы можем последовательно, раскрывая скобки, вычислять все коэффициенты интересующего нас степенного ряда.

Давайте подсчитаем коэффициент при z^n у произведения в (3). Пусть из первой геометрической прогрессии мы взяли слагаемое z^{j_1} , из второй – z^{2j_2} , из третьей – z^{3j_3} и так далее. Тогда коэффициент при z^n у произведения (3) равняется количеству способов представить n в виде суммы $n = j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots$. Но это количество в точности и равно числу диаграмм Юнга из n клеток: для диаграммы Юнга λ числа $j_1(\lambda), j_2(\lambda), \dots$ имеют смысл числа строк длины 1, числа строк длины 2 и т.д. соответственно. Это рассуждение доказывает формулу Эйлера.

Упражнение 8. Пусть $\hat{\mathbb{Y}}_n$ – множество диаграмм Юнга из n клеток, все строки которых имеют различную длину. Докажите, что

$$G(z; \hat{\mathbb{Y}}_n) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^k).$$

По аналогии с разделом «Диаграммы в прямоугольнике» зададимся теперь вопросом о том, как выглядит случайная диаграмма Юнга из n клеток. Как и раньше, мы будем предполагать, что все элементы множества \mathbb{Y}_n равновероятны. Оказывается, ответ на этот вопрос сильно отличается от того, что было для множеств $\mathbb{Y}(m, k)$. А именно, для каждого n рассмотрим кривую на плоскости, задаваемую уравнением

$$e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}x\sqrt{n}} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}y\sqrt{n}} = 1. \quad (4)$$

Упражнения

9. Что произойдет с кривой, задаваемой уравнением (4), если умножить n на 4?

10*. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной осью ординат и кривой, задаваемой уравнением (4), равна n .

¹ Эта книга доступна в электронном виде по адресу www.mcsme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf

Поясним причину возникновения коэффициента \sqrt{n} . По определению, площадь диаграммы Юнга из множества Y_n равна n . Трудно ожидать, чтобы фигуры безгранично растущей площади имели какой-то предел. Однако если сжать всю картинку в \sqrt{n} раз, то площадь диаграммы станет равной 1, и для полученных после такого масштабирования фигур уже можно пытаться доказывать предельные теоремы.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1.

Теорема 2 (закон больших чисел для диаграмм с фиксированным числом клеток). Для любого $\varepsilon > 0$ вероятность того, что граница случайной диаграммы Юнга из множества Y_n лежит в ε -окрестности кривой, задаваемой уравнением (4), стремится к 1 при n , стремящемся к бесконечности.

Замечание. Под ε -окрестностью в формулировке теоремы 2 имеется в виду множество точек плоскости, находящихся на расстоянии не больше $\varepsilon\sqrt{n}$ от нашей кривой. Это хорошо согласуется с приведенным выше рассуждением о необходимости масштабирования всей картинки в \sqrt{n} раз.

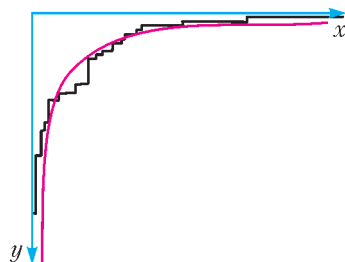


Рис.8. «Типичная» диаграмма Юнга из 524 клеток и предельная кривая

Отметим, что, несмотря на схожие формулировки, доказательство теоремы 2 значительно сложнее, чем теоремы 1, и мы не будем его приводить. Сама кривая (4), а также большая случайная диаграмма Юнга приведены на рисунке 8.

Упражнение 11. Выведите результат упражнения 10 из теоремы 2.

Трехмерные диаграммы Юнга

Теперь давайте повысим размерность и перейдем к *трехмерным* диаграммам Юнга. Трехмерные диаграммы удобно отождествлять с *плоскими разбиениями* — прямоугольными таблицами целых неотрицательных чисел, в которых числа (нестрого) убывают вдоль строк и столбцов. Если мы теперь представим, что такая таблица лежит на столе, и положим на каждую ее клетку, в которой написано число t , ровно t единичных кубиков, то мы получим трехмерное тело — трехмерную диаграмму Юнга. При этом количество кубиков (объем диаграммы) будет в точности равно сумме всех чисел плоского разбиения. Пример приведен на

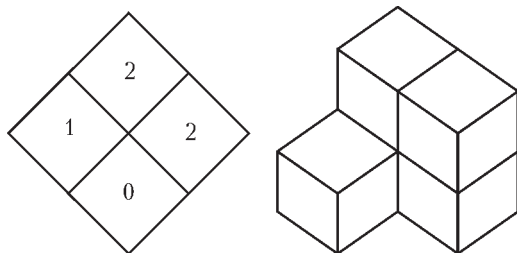


Рис.9. Плоское разбиение и трехмерная диаграмма Юнга

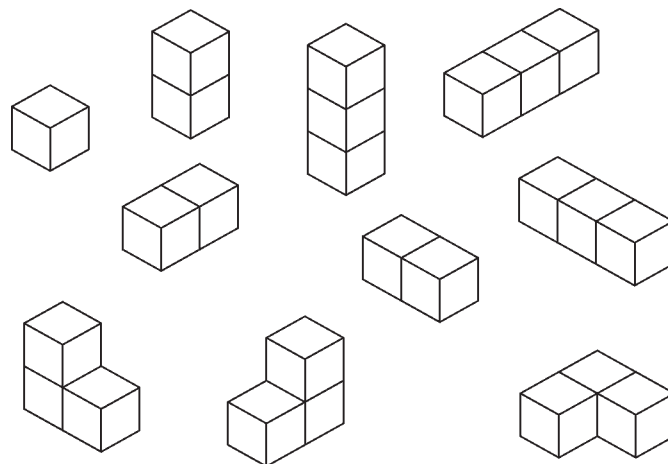


Рис.10. Трехмерные диаграммы Юнга из 1, 2 и 3 кубиков

рисунке 9. А на рисунке 10 приведены все трехмерные диаграммы из 1, 2 и 3 кубиков.

Упражнение 12. Изобразите все трехмерные диаграммы Юнга из 4 кубиков. Сколько их?

Точно так же, как и в двумерном случае, задачу можно рассматривать в двух постановках. Рассмотрим сначала трехмерные диаграммы Юнга в коробке размера $A \times B \times C$. Иными словами, это те трехмерные диаграммы, которые отвечают плоским разбиениям — таблицам размера $A \times B$, все числа в которых не превышают C . Обозначим множество всех таких диаграмм через $Y^{3D}(A, B, C)$. Для количества трехмерных диаграмм Юнга в коробке существуют замечательная формула Макмагона, найденная в начале XX века:

$$|Y^{3D}(A, B, C)| = \prod_{i=1}^A \prod_{j=1}^B \prod_{k=1}^C \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}. \quad (5)$$

Упражнение 13. Убедитесь в справедливости формулы (5) при $A = B = C = 2$.

Заметим, что если $A = 1$, то трехмерные диаграммы Юнга в коробке $A \times B \times C$ есть в точности обычные диаграммы в прямоугольнике $B \times C$.

Упражнение 14. Убедитесь, что формула (5) при $A = 1$, $B = m$, $C = k$ совпадает с формулой (1).

Доказывать формулу (5) можно очень разными способами. Одно из известных доказательств основано на теории *симметрических полиномов*, в другой задача сводится к вычислению *определителя* некоторой матрицы, составленной из биномиальных коэффициентов. Наконец, есть и непосредственное комбинаторное доказательство «по индукции».

Как нетрудно убедиться, анализируя формулу (5), количество трехмерных диаграмм Юнга даже в коробках небольшого размера чрезвычайно велико. Уже при $A = B = C = 16$ это количество превышает 10^{87} , что больше, чем число частиц в видимой части Вселенной.

А как же выглядит «типичная» случайная трехмерная диаграмма Юнга из множества $Y^{3D}(A, B, C)$? Ответ на этот вопрос был получен лишь 15 лет назад. Оказывается, здесь снова имеет место закон больших

чисел и ступенчатая поверхность, ограничивающая случайную трехмерную диаграмму, стремится к некоторому пределу. Не будем утомлять читателя точной формулой для предельной поверхности (она достаточно сложна), а проиллюстрируем результат изображением трехмерной диаграммы для больших A, B, C на рисунке 11.

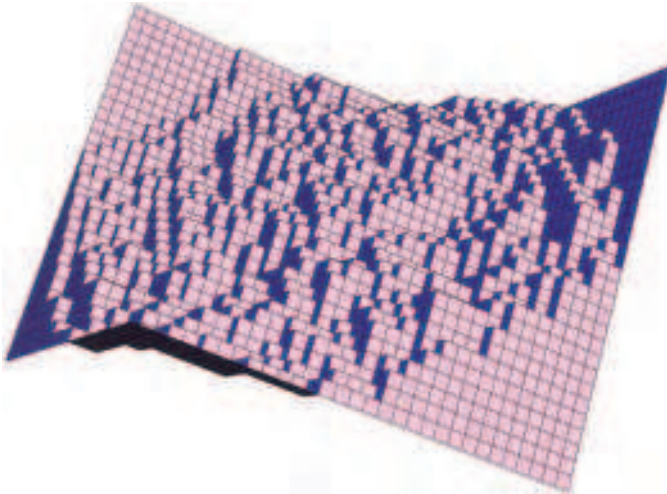


Рис.11. Повернутая трехмерная диаграмма Юнга в коробке $30 \times 30 \times 30$ и стенки этой коробки

Наиболее любопытные картинки получаются, если покрасить грани кубиков в 3 различных цвета (в соответствии с их ориентацией), точно так же покрасить объемлющую коробку, после чего все спроецировать на плоскость вдоль вектора $(1, 1, 1)$, см. рисунок 12. При этом объемлющая коробка проецируется в

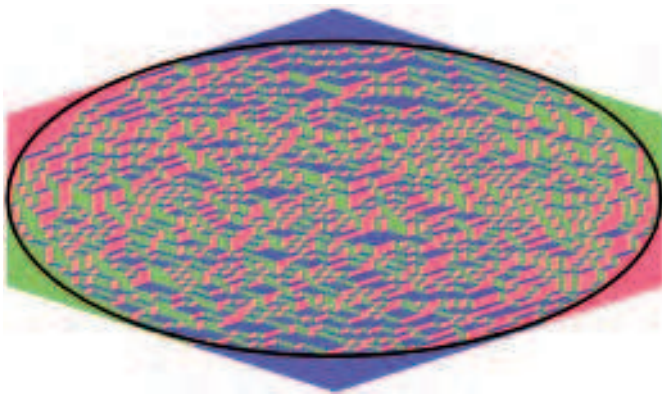


Рис.12. Проекция случайной диаграммы Юнга в коробке $40 \times 50 \times 50$

некоторый шестиугольник, а сами грани кубиков проецируются в ромбы трех типов (как на рисунках 9, 10, 12). Таким образом, трехмерная диаграмма Юнга превращается в замощение шестиугольника ромбами трех типов (трех цветов). Нетрудно показать, что это соответствие является биекцией, иными словами, по замощению трехмерная диаграмма восстанавливается однозначно.

Оказывается, можно доказать, что для больших A, B, C повсюду внутри эллипса, вписанного в шестиугольник, картинка остается нетривиальной, в ней встречаются все 3 цвета, тогда как вне эллипса все «заморажи-

вается» – от трех цветов остается только один. Этот эффект виден уже на рисунке 12 – в самом деле, вблизи каждой из 6 вершин шестиугольника картинка одноцветна.

Точно так же, как и для случая обычных диаграмм Юнга, давайте теперь откажемся от ограничивающей коробки и рассмотрим множество \mathbb{Y}_n^{3D} всех трехмерных диаграмм Юнга объема n (т.е. состоящих из n кубиков). Для количества таких диаграмм снова не существует явной формулы, но выражение для производящей функции очень похоже на (3) и, так же, как и (5), носит имя Макмагона. А именно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{Y}_n^{3D}| z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i)^{-i}. \quad (6)$$

Выпишем несколько первых членов формулы (6):

$$1 + z + 3z^2 + 6z^3 + 13z^4 + 24z^5 + \dots$$

В частности, заключаем, что $|\mathbb{Y}_1^{3D}| = 1$, $|\mathbb{Y}_2^{3D}| = 3$, $|\mathbb{Y}_3^{3D}| = 6$, и это согласуется с рисунком 10, а тот факт, что $|\mathbb{Y}_4^{3D}| = 13$, был нами проверен в упражнении 12.

Наконец, спросим, как же выглядит большая случайная трехмерная диаграмма из множества \mathbb{Y}_n^{3D} ? Этот вопрос имеет любопытную бытовую интерпретацию. Возьмите в руки кубик сахара-рафинада и посмотрите, как выглядит угол этого кубика. Он состоит из тысяч маленьких песчинок сахара и имеет закругленную форму. Естественная модель для описания этой формы как раз и связана со случайными диаграммами: угол куска сахара можно представлять себе как дополнение трехмерной диаграммы Юнга до октанта, составленного из осей координат.

Мы снова не будем приводить точных формул, а лишь покажем на рисунке проекцию «типичной» трехмерной диаграммы Юнга из \mathbb{Y}_n^{3D} при большом n (рис.13). Так же, как и в случае трехмерных диаграмм в коробке, здесь возникают некоторые замороженные области, но их граница (в данном случае это просто линии раздела между границей трехмерной диаграммы и стенками коробки) уже описывается несколько более сложными формулами.

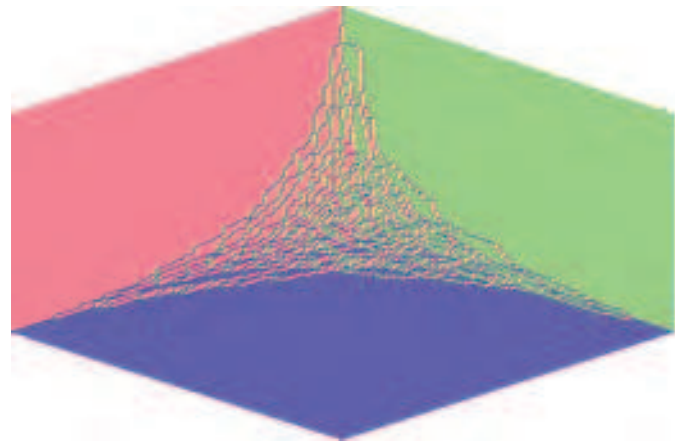


Рис.13. Проекция случайной диаграммы Юнга из множества \mathbb{Y}_n^{3D} , $n = 16528$

В заключение хочется отметить, что теоремы, приведенные в этом разделе, весьма сложны, получением их доказательств занимался целый ряд выдающихся математиков, а работы на эту тематику отмечены многими престижными наградами, в частности медалью Филдса в 2006 году.

Что дальше?

Логично было бы спросить, а что же происходит в больших размерностях? Существуют ли там такие же простые и красивые формулы для числа диаграмм и для производящих функций, как и (1), (3), (5), (6)? А как устроена случайная 4-мерная диаграмма Юнга?

К сожалению, несмотря на то что на вопросы о числе и форме двух- и трехмерных диаграмм к настоящему времени получены полные и исчерпывающие ответы, о 4-мерных диаграммах не известно практически ничего. С помощью существующей техники не удается ни посчитать количество 4-мерных диаграмм Юнга, ни доказать (или хотя бы визуальнo представить!) какие-либо предельные теоремы для случайных диаграмм в больших размерностях. Эти вопросы остаются открытыми, и с ними математикам еще предстоит разобраться в будущем.

Приложение. Схема доказательства теоремы 1

Введем декартову систему координат $(x; y)$, в которой левый нижний угол прямоугольника имеет координаты $(0; 0)$, правый верхний — $(m; k)$ (как на рисунке 7), а диаграмма Юнга прилегает к углу с координатами $(0; 0)$. Пусть λ — диаграмма Юнга, обозначим через $z(\lambda)$ координату (единственного) пересечения границы λ с прямой $x = y$, иными словами, пусть точка $(z(\lambda), z(\lambda))$ лежит на границе диаграммы. Если теперь диаграмма λ случайная, то и точка z — случайная величина, принимающая значения от 0 до $\min(m, k)$.

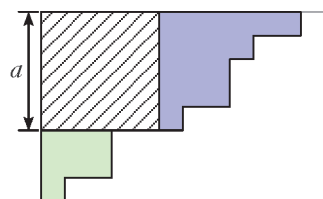


Рис.14. Представление диаграммы из $\mathbb{Y}(m, k)$ в виде квадрата со стороной a и двух меньших диаграмм

Какова вероятность того, что $z(\lambda) = a$? В силу определений она равна отношению количества диаграмм Юнга из $\mathbb{Y}(m, k)$, граница которых проходит через точку $(a; a)$, к общему числу элементов в $\mathbb{Y}(m, k)$. Понятно, что каждая диаграмма, проходящая через $(a; a)$, представляется объединением квадрата $a \times a$, диаграммы Юнга в прямоугольнике $a \times (k - a)$ и диаграммы Юнга в прямоугольнике $(m - a) \times a$ (рис. 14). Значит, искомая вероятность равна

$$\mathbb{P}(a) = \frac{m!}{a!(m-a)!} \frac{k!}{a!(k-a)!} \frac{m!k!}{(m+k)!}. \quad (7)$$

Вспомним, что $m = \mu N$, $k = \kappa N$, и также положим $a = [\alpha N]$. Для оценки факториалов воспользуемся формулой Стирлинга, которая говорит, что

$$\ln(M!) = M(\ln(M) - 1) + M\delta(M),$$

где функция $\delta(M)$ стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$ (на самом деле, для функции $\delta(M)$ известно достаточно точное выражение, но мы его не используем). Опуская целые части, получаем

$$\begin{aligned} \ln(\mathbb{P}(\alpha N)) &\approx 2\mu N(\ln(\mu N) - 1) + 2\kappa N(\ln(\kappa N) - 1) - \\ &- 2\alpha N(\ln(\alpha N) - 1) - (\mu - \alpha)N(\ln((\mu - \alpha)N) - 1) - \\ &- (\kappa - \alpha)N(\ln((\kappa - \alpha)N) - 1) - (\mu + \kappa)N(\ln((\mu + \kappa)N) - 1) = \\ &= N(2g(\mu) + 2g(\kappa) - 2g(\alpha) - g(\mu - \alpha) - g(\kappa - \alpha) - g(\mu + \kappa)), \end{aligned} \quad (8)$$

где $g(x) = x \ln(x)$. Посмотрим на полученное выражение как на функцию от α и найдем ее максимум. Для нахождения максимума посчитаем производную по α и приравняем ее нулю. Учтывая, что $g'(x) = \ln(x) - 1$, получаем уравнение на экстремум $\hat{\alpha}$:

$$-2(\ln(\hat{\alpha}) - 1) + (\ln(\mu - \hat{\alpha}) - 1) + (\ln(\kappa - \hat{\alpha}) - 1) = 0.$$

Решая его, находим

$$\ln\left(\frac{(\mu - \hat{\alpha})(\kappa - \hat{\alpha})}{\hat{\alpha}^2}\right) = 0, \quad \hat{\alpha}^2 = (\mu - \hat{\alpha})(\kappa - \hat{\alpha}),$$

$$\hat{\alpha} = \mu\kappa/(\mu + \kappa).$$

Теперь заметим, что при $\alpha = \hat{\alpha}$ правая часть (8) обращается в ноль.

Упражнение 15. Убедитесь в этом.

Теперь мы можем заключить, что если $\alpha \neq \hat{\alpha}$, то $\frac{\ln \mathbb{P}(\alpha N)}{N} < 0$ при больших N . Другими словами, это означает, что если a далеко от $\hat{\alpha}N$, то при больших N вероятность $\mathbb{P}(a)$ экспоненциально (как функция от N) мала.

Упражнения

16. Тот факт, что мы опустили целые части (т.е. заменили $[aN]$ на aN), не влияет на справедливость вывода. Убедитесь в этом.

17. Из наших рассуждений следует, что для любого $\epsilon > 0$ вероятность того, что координата $z(\lambda)$ пересечения границы λ с прямой $x = y$ отличается от $\hat{\alpha}N$ больше чем на ϵN , стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Убедитесь в этом.

Остается заметить, что точка $(\hat{\alpha}N; \hat{\alpha}N)$ в точности лежит на диагонали прямоугольника со сторонами μN , κN . Таким образом, мы доказали, что при больших N точка пересечения границы диаграммы λ и прямой $x = y$ лежит вблизи диагонали прямоугольника.

Упражнение 18 (сложное). Обобщая приведенные рассуждения, дайте полное доказательство теоремы 1. *Указание.* Рассмотрите вместо прямой $x = y$ более общую прямую $x = y + cN$ и докажите для нее аналог результата упражнения 17. Затем убедитесь, что и для конечного набора c_1, \dots, c_h вероятность того, что точки пересечения границы диаграммы λ с каждой из прямых $x = y + c_i N$ лежат вблизи диагонали прямоугольника, стремится к 1. Отсюда уже выведите теорему 1.