V. L. Usol'tsev, On Hamiltonian ternary algebras with operators, *Chebyshevskii Sb.*, 2014, Volume 15, Issue 3, 100–113

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 3 (2014)

УДК 512.579

О ГАМИЛЬТОНОВЫХ ТЕРНАРНЫХ АЛГЕБРАХ С ОПЕРАТОРАМИ

В. Л. Усольцев[1] (г. Волгоград)

[1] Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и информатизации образования, Волгоградский государственный социально-педагогический университет,
usl2004@mail.ru

Аннотация

В работе дается описание гамильтоновых алгебр в некоторых подклассах класса тернарных алгебр с одним оператором. Универсальная алгебра называется гамильтоновой, если носитель любой ее подалгебры является классом некоторой ее конгруэнции. Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций (перестановочных с основными операциями). Алгебра с операторами называется тернарной, если она имеет единственную основную операцию, и эта операция является тернарной.

Получено достаточное условие гамильтоновости для произвольных алгебр с операторами. Полностью описаны гамильтоновы алгебры в классах тернарных алгебр с одним оператором, основная операция которых является либо функцией Пиксли, либо функцией меньшинства, либо функцией большинства, заданными специальным образом на произвольном унаре.

Пусть V — многообразие алгебр с операторами, имеющее сигнатуру $\Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 — произвольная сигнатура, содержащая функцию почти единогласия, а Ω_2 — множество операторов. Доказано, что в многообразии V алгебра является абелевой тогда и только тогда, когда она одноэлементна.

Ключевые слова: гамильтонова алгебра, абелева алгебра, алгебра с операторами, тернарная операция, функция почти единогласия

ON HAMILTONIAN TERNARY ALGEBRAS WITH OPERATORS

V. L. Usol'tsev[1] (c. Volgograd)

[1] Volgograd State Social and Pedagogical University, Russia, 400131, Volgograd, Lenina av., 27, usl2004@mail.ru

Abstract

In this work is given the description of Hamiltonian algebras in some subclasses of class of algebras with operators having one ternary basic operation and one operator. Universal algebra A is a Hamiltonian algebra if every subuniverse of A is the block of some congruence of the algebra A. Algebra with operators is an universal algebra with additional system of the unary operations acting as endomorphisms with respect to basic operations. These operations are called permutable with basic operations. An algebra with operators is ternary if it has exactly one basic operation and this operation is ternary.

It is obtained the sufficient condition of Hamiltonity for arbitrary universal algebras with operators. It is described Hamiltonian algebras in classes of ternary algebras with one operator and with basic operation that is either Pixley operation, or minority function, or majority function of special view.

Let V be a variety of algebras with operators and V has signature $\Omega_1 \cup \Omega_2$, where Ω_1 is an arbitrary signature containing near-unanimity function and Ω_2 is a set of operators. It is proved that V not contains nontrivial Abelian algebras.

Keywords: Hamiltonian algebra, Abelian algebra, algebra with operators, ternary operation, near-unanimity function

1. Введение

Свойство гамильтоновости для универсальных алгебр было введено в рассмотрение B. Csákány [1] и K. Shoda [2], как естественное обобщение понятия гамильтоновой группы.

Универсальная алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ называется *гамильтоновой*, если носитель любой ее подалгебры является классом некоторой конгруэнции алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Многообразие алгебр называется гамильтоновым, если любая его алгебра гамильтонова. Гамильтоновыми являются, в частности, абелевы группы, модули, унарные алгебры.

Гамильтоновы алгебры и многообразия изучались в ряде работ R. McKenzie, M. Valeriot, E. Kiss, L. Klukovits (см.. напр., [3] – [6]). Как оказалось, гамильтоновость тесно связана со свойствами абелевости и сильной абелевости алгебр.

Абелевость является одним из центральных понятий в теории коммутаторов конгруэнций [7] и, в свою очередь, имеет глубокие связи со свойством полиномиальной (функциональной) полноты алгебр (см. [8], [9]). Изучение абелевости и сильной абелевости оказало значительное влияние на возникновение теории ручных конгруэнций [10], которая в настоящее время служит основным инструментом исследования конечных алгебр.

В [5] показано, что если декартов квадрат алгебры гамильтонов, то сама алгебра абелева. В той же работе доказано, что из гамильтоновости многообразия следует его абелевость, а для локально конечных многообразий свойства абелевости и гамильтоновости эквивалентны. L. Klukovits [6] охарактеризовал гамильтоновы многообразия в терминах строгих мальцевских условий. M. Valeriot [4] показал, что если конечная простая алгебра абелева, то она является гамильтоновой. В [11] изучены связи сильной абелевости и гамильтоновости в локально конечных многообразиях.

Внимание исследователей уделяется также изучению гамильтоновых алгебр, имеющих конкретные сигнатуры. В частности, в [12] описаны гамильтоновы алгебры в классах абелевых полугрупп, конечных и абелевых группоидов с единицей, а также доказано, что любая конечная абелева квазигруппа является гамильтоновой.

В настоящей работе изучаются гамильтоновы алгебры в некоторых подклассах класса алгебр с операторами (см. [13], §13).

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 произвольна, а Ω_2 состоит из унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1, то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1. Унарные операции из Ω_2 называются *операторами*, а операции из Ω_1 — *основными операциями* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

Алгебры с операторами естественным образом связаны с другим важным классом универсальных алгебр — *унарами*, то есть, алгебрами с одной унарной операцией. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω, то унар $\langle A, f\rangle$ называется *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. К настоящему времени теория унаров достаточно хорошо развита (см., например, [14] – [16]), что позволяет использовать ее аппарат для изучения алгебр с операторами в терминах их унарных редуктов.

Алгебра с операторами называется *тернарной*, если она имеет единственную основную операцию, и эта операция является тернарной. Среди тернарных операций особое внимание уделяется операциям, перечисленным ниже.

Мальцевской называется тернарная операция $d(x, y, z)$, удовлетворяющая тождествам Мальцева

$$d(x, y, y) = d(y, y, x) = x. \tag{1}$$

Для многообразий алгебр существование мальцевского терма от основных операций равносильно конгруэнц-перестановочности.

Будем называть мальцевскую операцию d *функцией Пиксли*, если она удовлетворяет тождествам Пиксли $d(y, y, x) = d(x, y, y) = d(x, y, x) = x$. Известно [17], что для многообразия существование тернарного терма d от основных операций, удовлетворяющего тождествам Пиксли, эквивалентно арифметичности (то есть, конгруэнц-перестановочности и конгруэнц-дистрибутивности) этого многообразия.

Мальцевская операция d называется *функцией меньшинства* (minority function), если для нее выполняются тождества $d(y, y, x) = d(x, y, y) = d(y, x, y) = x$. Из определения функции меньшинства следует, что она является *слабой функцией почти единогласия* (weak near-unanimity function), то есть операцией f, удовлетворяющей тождествам $f(x, \ldots, x, y) = f(x, \ldots, x, y, x) = \ldots =$

$f(y, x, \ldots, x)$. Интерес к алгебрам, имеющим термальную слабую функцию почти единогласия, во многом обусловлен их приложениями в области исследования вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem) и в смежных областях (см., напр., [18]).

Тернарная операция $d(x, y, z)$ называется *функцией большинства* (majority function), если она удовлетворяет тождествам

$$d(x, x, y) = d(x, y, x) = d(y, x, x) = x.$$

Функция большинства является тернарным вариантом *функции почти единогласия* (near-unanimity function), то есть операции φ, для которой выполняются тождества

$$\varphi(x, \ldots, x, y) = \varphi(x, \ldots, x, y, x) = \ldots = \varphi(y, x, \ldots, x) = x. \tag{2}$$

Алгебрам с термальной функцией почти единогласия уделяется много внимания в современной универсальной алгебре (см., напр., [19]), теории графов и исследованиях CSP-задач.

В настоящей работе рассматриваются некоторые подклассы многообразий тернарных алгебр с одним оператором, заданных тождествами, определяющими функции Пиксли, меньшинства и большинства (унары с мальцевской операцией и подобные им алгебры).

2. Основные определения и конструкции

Через $ConA$ обозначается решетка конгруэнций алгебры A, через $\bigtriangledown$ и $\bigtriangleup$ — единичная и нулевая конгруэнции алгебры A соответственно. Класс конгруэнции θ, порожденный элементом x, обозначается через $[x]\theta$. Неодноэлементная алгебра называется *простой*, если она имеет в точности две конгруэнции ($\bigtriangledown$ и $\bigtriangleup$).

Пусть $\alpha, \beta \in ConA$. Определим конгруэнцию D_α^β на подалгебре алгебры A^2 с носителем α как наименьшую конгруэнцию, порожденную множеством $\{((x, x), (y, y)) | (x, y) \in \beta\}$. *Коммутатором* конгруэнций α, β называется такое отношение $[\alpha, \beta]$ на A, что $(x, y) \in [\alpha, \beta]$ выполнено тогда и только тогда, когда $((x, x), (x, y)) \in D_\alpha^\beta$.

Алгебра называется *абелевой*, если для нее выполняется условие $[\bigtriangledown, \bigtriangledown] = \bigtriangleup$. Алгебра называется *нейтральной*, если для любых $\alpha, \beta \in ConA$ выполняется соотношение $[\alpha, \beta] = \alpha \cap \beta$. Многообразие называется *нейтральным*, если все его алгебры нейтральны.

Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар. Для любого элемента $z \in A$ через $f^n(z)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу z; также положим $f^0(z) = z$.

Для любых чисел $n > 0$, $m \geqslant 0$ положим $C_n^m = \langle a | f^m(a) = f^{n+m}(a) \rangle$. Унар C_n^0 называется *циклом длины* n. Элемент a унара называется *циклическим*, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \ldots (t_i \geqslant 0)$, $t_1 < t_2 < \ldots$. Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Унар называется периодическим, если любой его элемент является периодическим. Через $T(A)$ обозначается множество периодических элементов унара A.

Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geqslant 1$, называется *глубиной элемента* a и обозначается через $t(a)$. *Глубиной* $t(A)$ *унара* A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, то говорят, что унар имеет бесконечную глубину.

Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их *суммой* и обозначается через $B + C$. Унар $\langle A, f\rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A.

Элемент a унара называется *узловым*, если найдутся такие различные элементы b и c (возможно, циклические), отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется *неподвижным*, если $f(a) = a$.

Через F_1 обозначается свободный однопорожденный унар. Связный унар с неподвижным элементом называется *корнем.* Через $\langle a\rangle_f$ обозначается подунар унара $\langle A, f\rangle$, порожденный элементом a.

Пусть $n \in N$. Через σ_n обозначается конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$, определенная по правилу [21]: $x\sigma_n y$ для $x, y \in A$ выполнено тогда и только тогда, когда $f^n(x) = f^n(y)$. Положим также $\sigma_0 = \triangle$.

Унаром с мальцевской операцией [22] называется алгебра $\langle A, d, f\rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d, на которой выполняются тождества Мальцева (1) и тождество перестановочности $f(d(x, y, z)) = d(f(x), f(y), f(z))$. Таким образом, унар с мальцевской операцией является тернарной алгеброй с одним оператором.

В [22] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно так задать тернарную операцию p, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией. Эта операция определяется следующим образом. Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{3}$$

Из определения вытекает, что операция $p(x, y, z)$ удовлетворяет тождествам Пиксли. Как следствие, алгебры данного класса конгруэнц-перестановочны и конгруэнц-дистрибутивны.

В [23] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно задать тернарную операцию $s(x, y, z)$ (называемую *симметрической*), так, что алгебра $\langle A, s, f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией, удовлетворяющим тождеству

$s(x, y, x) = y$. Предложенная конструкция восходит к [22] и задает функцию меньшинства:

$$s(x,y,z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) < k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \tag{4}$$

Аналогичным способом на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ можно задать функцию большинства $m(x, y, z)$ [24], перестановочную с унарной операцией f:

$$m(x,y,z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \geqslant k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \tag{5}$$

В результате, снова получаем тернарную алгебру с одним оператором $\langle A, m, f\rangle$.

3. Основные результаты

Достаточное условие гамильтоновости для произвольных алгебр с операторами дает следующее

Предложение 1. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$, где $t \in N \cup \{\infty\}$, или $\langle A, f\rangle \cong C_n^0$, где $n \in N$, или $\langle A, f\rangle \cong C_1^0 + C_1^0$, то алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является гамильтоновой.*

Доказательство. Пусть $\langle A, f\rangle \cong C_n^0$ для некоторого $n \in N$. Так как $f^n(x) = x$ для всех $x \in A$, то $\langle A, \Omega\rangle$ не имеет собственных подалгебр. Тогда ее единственная (несобственная) подалгебра является классом конгруэнции $\bigtriangledown$, откуда $\langle A, \Omega\rangle$ — гамильтонова.

Пусть $\langle A, f\rangle \cong C_1^0 + C_1^0$, $A = \{a, b\}$. Если $\langle\{a\}, \Omega\rangle$ или $\langle\{b\}, \Omega\rangle$ являются подалгебрами алгебры $\langle A, \Omega\rangle$, то они являются и классами ее конгруэнции $\triangle$, а несобственная подалгебра — классом конгруэнции $\bigtriangledown$. Таким образом, $\langle A, \Omega\rangle$ — гамильтонова.

Пусть теперь $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$, где $t \in N \cup \{\infty\}$, и B — подалгебра алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Так как B замкнута относительно операции f, то $\langle B, f\rangle$ — подунар унара $\langle A, f\rangle$. Отсюда, если $t < \infty$, то $\langle B, f\rangle \cong C_1^s$ для некоторого $s \leqslant t$. Если же $t = \infty$, то либо $\langle B, f\rangle \cong C_1^s$ для некоторого $s \geqslant 0$, либо $\langle B, f\rangle \cong C_1^\infty$. В последнем случае B — несобственная подалгебра алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ и, значит, B является классом конгруэнции $\bigtriangledown$, поэтому далее достаточно рассмотреть случай, когда $\langle B, f\rangle \cong C_1^s$.

Обозначим неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$ через a, а порождающий элемент подунара $\langle B, f\rangle$ — через b. По замечанию 1 [21], отношение σ_s является конгруэнцией алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Докажем, что $B = [a]\sigma_s$.

Пусть $x \in B$. Тогда $x = f^d(b)$ для некоторого $d \leqslant t(b)$. Поскольку $t(b) = s$, то $t(x) \leqslant s$, откуда $f^s(x) = a$. С другой стороны, $f^s(a) = a$. Отсюда, $f^s(x) = f^s(a)$, что влечет $x\sigma_s a$ и $x \in [a]\sigma_s$. Таким образом, $B \subseteq [a]\sigma_s$.

Пусть теперь $x \in [a]\sigma_s$. Тогда $f^s(x) = f^s(a) = a$, и следовательно, $t(x) \leqslant s = t(b)$, откуда $x \in B$. Окончательно, $B = [a]\sigma_s$, и $\langle A, \Omega\rangle$ — гамильтонова. $\square$

Лемма 1. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — алгебра с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (3), и неинъективным оператором f. Если унар $\langle A, f\rangle$ содержит подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$, то алгебра $\langle A, p, f\rangle$ не является гамильтоновой.*

Доказательство. Пусть алгебра $\langle A, p, f\rangle$ удовлетворяет условиям леммы, а D — компонента связности унара $\langle A, f\rangle$, содержащая подунар $\langle B, f\rangle$, изоморфный C_n^0, где $n > 1$. Из определения (3) следует, что $\langle B, p, f\rangle$ — подалгебра алгебры $\langle A, p, f\rangle$. Предположим, что ее носитель B является классом некоторой конгруэнции $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$.
Случай 1. B — собственный подунар компоненты связности D.

Тогда найдется такой элемент $a \in D \setminus B$, что $f(a) \in B$. Обозначим $b = f(a)$, $c = f^2(a)$. Поскольку $n > 1$, то $b \neq c$. Заметим, что поскольку B — класс конгруэнции θ, то $b\theta c$. Если $k(a, b) = m$ для некоторого $m > 0$, то $f^m(a) = f^m(b)$, откуда $f^m(a) = f^m(f(a)) = f(f^m(a))$. Обозначив $d = f^m(a)$, имеем $d = f(d)$, что противоречит условию $n > 1$. Таким образом, $k(a, b) = \infty$, а поскольку операция f инъективна на B, то и $k(b, c) = \infty$. Отсюда, по определению (3), $p(a, b, c) = c$. С другой стороны, из (1) следует $p(a, b, b) = a$. Тогда $c = p(a, b, c)\theta p(a, b, b) = a$, откуда $a\theta c$, что противоречит условию $a \notin B$.
Случай 2. $D = B$.

Так как оператор f инъективен на D, но не инъективен на A, то унар $\langle A, f\rangle$ несвязен, и значит, существует элемент $a \in A \setminus D$. Кроме того, так как $n > 1$, то найдутся различные элементы $b, c \in B$. Тогда из $a \notin D$ имеем $k(a, b) = \infty$, а поскольку операция f инъективна на B, то и $k(b, c) = \infty$. Отсюда, по определению (3), $p(a, b, c) = c$. По предположению, $b\theta c$. Отсюда, учитывая, что (1) влечет $p(a, b, b) = a$, получаем $a\theta c$. Из предположения и условия $a \notin B$ следует, что $\theta \neq \bigtriangledown$. Тогда, по лемме 5 [20], имеем $k(a, c) < \infty$, что противоречит выбору элемента a. $\square$

Замечание 1. *Для алгебр $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$, где операции s и m заданы по определениям (4) и (5) соответственно, верны аналоги леммы 1.*

Доказательство. Для алгебры $\langle A, s, f\rangle$, в Случае 1 из доказательства леммы 1, из (4) имеем $s(a, b, c) = b$. Так как $s(a, b, b) = a$, то $a\theta b$, что противоречит условию $a \notin B$. В Случае 2 из $s(a, b, c) = b$ снова имеем $a\theta b$.

Для алгебры $\langle A, m, f\rangle$ противоречие в обоих случаях также следует из утверждения $a\theta b$, которое здесь обусловлено соотношениями

$$m(c, b, a) = a, \quad m(b, b, a) = b,$$

вытекающими из (5). $\square$

Лемма 2. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — алгебра с оператором f и мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (3). Если унар $\langle A, f\rangle$ содержит подунар, изоморфный F_1, то алгебра $\langle A, p, f\rangle$ не является гамильтоновой.*

Доказательство. Пусть алгебра $\langle A, p, f\rangle$ удовлетворяет условиям леммы, а B — подунар унара $\langle A, f\rangle$, изоморфный F_1. Обозначим его порождающий элемент через b. Положим также $c = f(b)$, $d = f^2(b)$. Из (3) следует, что подунар $\langle c\rangle_f$ является подалгеброй алгебры $\langle A, p, f\rangle$. Предположим, что носитель этой подалгебры является классом некоторой конгруэнции $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$. Тогда $c\theta d$ и $(b, d) \notin \theta$. Поскольку операция f на B инъективна, то $k(b, c) = k(c, d) = \infty$. Отсюда, по определению (3), $p(b, c, d) = d$. С другой стороны, $p(b, c, c) = b$, откуда $d\theta b$, что противоречит условию $(b, d) \notin \theta$. Таким образом, алгебра $\langle A, p, f\rangle$ не является гамильтоновой. □

Замечание 2. *Для алгебр $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$, где операции s и m заданы по определениям (4) и (5) соответственно, верны аналоги леммы 2.*

Доказательство. Для алгебры $\langle A, s, f\rangle$ искомое противоречие следует из утверждения $b\theta c$, которое обусловлено соотношениями $s(b, c, d) = c$, $s(b, c, c) = b$.

Для алгебры $\langle A, m, f\rangle$ к противоречию ведет утверждение $b\theta d$, вытекающее из соотношений $m(d, c, b) = b$, $m(d, d, b) = d$. □

Лемма 3. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — алгебра с оператором f и мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (3). Если унар $\langle A, f\rangle$ имеет не менее трех компонент связности, содержащих одноэлементные циклы, то алгебра $\langle A, p, f\rangle$ не гамильтонова.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условиям леммы. Обозначим элементы, образующие одноэлементные циклы в соответствующих компонентах связности, через a, b и c.

Поскольку $f(a) = a$, $f(b) = b$, то подмножество $\{a, b\}$ является подунаром унара $\langle A, f\rangle$, а следовательно, из (3), и подалгеброй алгебры $\langle A, p, f\rangle$. Предположим, что ее носитель является классом некоторой конгруэнции $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$. Поскольку элементы a, b, c лежат в разных компонентах связности, то $k(c, b) = \infty$ и $k(b, a) = \infty$. Тогда из (3) следует, что $p(c, b, a) = a$. В то же время, из (1) вытекает $p(c, a, a) = c$. Тогда, учитывая, что $a\theta b$, из двух последних равенств имеем $a\theta c$, что противоречит предположению. □

Замечание 3. *Для алгебр $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$, где операции s и m заданы по определениям (4) и (5) соответственно, верны аналоги леммы 3.*

Доказательство. Для алгебры $\langle A, s, f\rangle$ искомое противоречие следует из утверждения $b\theta c$, которое обусловлено соотношениями $s(c, b, a) = b$, $s(c, a, a) = c$.

Для алгебры $\langle A, m, f\rangle$ к противоречию ведет утверждение $c\theta a$, вытекающее из соотношений $m(a, b, c) = c$, $m(a, a, c) = a$. □

Лемма 4. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — алгебра с оператором f и мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (3), причем унар $\langle A, f\rangle$ является корнем. Алгебра $\langle A, p, f\rangle$ гамильтонова тогда и только тогда, когда $\langle A, f\rangle \cong C_1^t$, где $t \in N \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.*

Доказательство. Достаточность утверждения следует из предложения 1.

Докажем необходимость леммы. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ является корнем, не изоморфным унару C_1^t ни при каком $t \in N \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.

По условию, $\langle A, f\rangle$ содержит неподвижный элемент a, причем $A \neq \{a\}$. Кроме того, из неизоморфности $\langle A, f\rangle$ унару C_1^t вытекает, что $\langle A, f\rangle$ имеет узловой элемент v, и следовательно, найдутся такие элементы $b, c \in A$, что $|\{v, b, c\}| = 3$ и $f(b) = v = f(c)$. Обозначим через $\langle B, f\rangle$ подунар $\langle b\rangle_f$ унара $\langle A, f\rangle$.

Поскольку $\langle B, f\rangle$ однопорожден, то он должен быть изоморфен либо F_1, либо C_h^0, либо C_h^t для некоторых $h > 0$, $t > 0$. Так как $\langle A, f\rangle$ связен и содержит подунар C_1^0, то исключаются случаи, когда $\langle B, f\rangle \cong F_1$ и $h > 1$. Поскольку $f(b) = v \neq b$, то случай $\langle B, f\rangle \cong C_1^0$ также исключен. Таким образом, $\langle B, f\rangle \cong C_1^{t(b)}$.

Докажем, что $c \notin B$. Предположив обратное, получаем, что $c = f^k(b)$ для некоторого $k \geqslant 0$. Тогда из $f(b) = f(c)$ следует $f(b) = f^{k+1}(b)$ и $f(b) = f^k(f(b))$. Отсюда, $f(b) = a$ и, следовательно, $v = a$, откуда $t(b) = 1$. Последнее влечет $c \in \{a, b\}$, что противоречит условию $|\{v, b, c\}| = 3$. Таким образом, $c \notin B$.

Из (3) следует, что B — подалгебра алгебры $\langle A, p, f\rangle$. Предположим, что B — класс некоторой конгруэнции $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$. Отсюда, $b\theta v$ и $(c, v) \notin \theta$. Из условий $b \neq c$ и $f(b) = f(c)$ следует, что $k(c, b) = 1$. В то же время, из $v \neq b$ и $f(b) = v$ вытекает неравенство $t(b) > t(v)$, откуда, по лемме 10 [21] имеем $k(b, v) = t(b) \geqslant 1$. Тогда, по определению (3), $p(c, b, v) = v$. С другой стороны, из тождеств (1) вытекает $p(c, v, v) = c$. Следовательно, учитывая $b\theta v$, получаем $v = p(c, b, v)\theta p(c, v, v) = c$. Отсюда, $c \in B$, что противоречит доказанному ранее для элемента c. □

Замечание 4. *Для алгебр $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$, где операции s и m заданы по определениям (4) и (5) соответственно, верны аналоги леммы 4.*

Доказательство. Для алгебры $\langle A, m, f\rangle$ к противоречию ведет утверждение $c\theta b$, вытекающее из $c = m(v, b, c)\theta m(b, b, c) = b$.

Для алгебры $\langle A, s, f\rangle$ требуется рассмотреть два случая:

$k(b, v) = 1$ и $k(b, v) > 1$.

В первом из них $b = s(c, b, v)\theta p(c, b, b) = c$.

Во втором $v = s(c, b, v)\theta p(c, b, b) = c$.

Оба случая противоречат утверждению $c \notin B$. □

Лемма 5. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — алгебра с оператором f и мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (3). Если унар $\langle A, f\rangle$ является суммой корней, содержащей хотя бы одну неодноэлементную компоненту связности, то алгебра $\langle A, p, f\rangle$ не гамильтонова.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условиям леммы. Тогда он несвязен. Если $\langle A, f\rangle$ содержит не менее трех компонент связности, то он удовлетворяет условиям леммы 3, и значит, алгебра $\langle A, p, f\rangle$ не гамильтонова.

Таким образом, далее можно считать, что $\langle A, f\rangle$ имеет в точности две компоненты связности.

Обозначим через D неодноэлементную компоненту связности унара $\langle A, f\rangle$, а через E — другую его компоненту. Из условия леммы следует, что $f(b) = b$ и $f(a) = a$ для некоторых элементов $b \in D$, $a \in E$. Кроме того, так как $|D| > 1$, то найдется элемент $c \in D$, для которого $f(c) = b$.

Поскольку $f(a) = a$, $f(b) = b$, то подмножество $\{a, b\}$ является подунаром унара $\langle A, f\rangle$, а следовательно, и подалгеброй алгебры $\langle A, p, f\rangle$. Предположим, что ее носитель является классом некоторой конгруэнции $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$, и значит, $a\theta b$. Поскольку элементы a и b лежат в разных компонентах связности, то $k(a, b) = \infty$. Тогда из (3) следует, что $p(a, b, c) = a$. В то же время, из (1) вытекает $p(a, a, c) = c$. Следовательно, учитывая $a\theta b$, получаем $a = p(a, b, c)\theta p(a, a, c) = c$, то есть, $a\theta c$, что противоречит предположению. □

Замечание 5. *Для алгебр $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$, где операции s и m заданы по определениям (4) и (5) соответственно, верны аналоги леммы 5.*

Доказательство. Для алгебры $\langle A, m, f\rangle$ к противоречию ведет утверждение $c\theta a$, вытекающее из $c = m(a, b, c)\theta m(a, a, c) = a$.

Для алгебры $\langle A, s, f\rangle$ учитываем, что так как $b \neq c$ и $f(c) = b = f(b)$, то $k(b, c) = 1$. Отсюда, $a = s(a, b, c)\theta s(a, a, c) = c$. □

Теорема 1. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — тернарная алгебра с оператором f, где d — операция, определенная по одному из правил (3)–(5). Алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является гамильтоновой тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен одному из следующих унаров:*
1) C_n^0 для некоторого $n > 0$;
2) $C_1^0 + C_1^0$;
3) C_1^t, для некоторого $t \in N \cup \{\infty\}$.

Доказательство. Поскольку $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором, то достаточность теоремы следует из предложения 1.

Докажем необходимость теоремы. Рассмотрим сначала алгебры $\langle A, d, f\rangle$, где операция $d(x, y, z)$ определена по правилу (3). Пусть унар $\langle A, f\rangle$ неизоморфен ни одному из унаров, перечисленных в условиях теоремы.

Если унар $\langle A, f\rangle$ содержит подунар, изоморфный F_1, то, по лемме 2, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ не является гамильтоновой. Поэтому далее предполагаем, что каждая компонента связности унара $\langle A, f\rangle$ (или сам унар, в случае его связности) содержит цикл.

Рассмотрим случай, когда операция f инъективна на A. Так как по условию унар $\langle A, f\rangle$ неизоморфен циклу, то в этом случае он несвязен. Тогда, учитывая инъективность f, получаем, что $\langle A, f\rangle$ является суммой циклов.

Допустим, что унар $\langle A, f\rangle$ содержит хотя бы одну неодноэлементную компоненту связности B, то есть, цикл длины $m > 1$. Из (3) следует, что B является подалгеброй алгебры $\langle A, d, f\rangle$, причем, в силу несвязности унара $\langle A, f\rangle$, собственной.

Предполагая, что B является классом некоторой конгруэнции

$$\theta \in Con\langle A, d, f\rangle,$$

получаем, что θ должна быть нетривиальна. Действительно, из условия $m > 1$ следует, что $\theta \neq \triangle$, а поскольку B — собственная подалгебра, то $\theta \neq \bigtriangledown$. Однако, по Теореме 2 [21], из инъективности операции f на A следует, что алгебра $\langle A, d, f\rangle$ проста, а это противоречит нетривиальности конгруэнции θ.

Таким образом, далее можно считать, что все компоненты связности унара $\langle A, f\rangle$ — одноэлементные циклы. По условию, $\langle A, f\rangle$ неизоморфен $C_1^0 + C_1^0$, то есть, содержит не менее трех компонент связности. Тогда он удовлетворяет условиям леммы 3, и следовательно, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ не гамильтонова.

Пусть теперь операция f не инъективна на A. По лемме 1, из наличия в $\langle A, f\rangle$ хотя бы одного подунара, изоморфного C_n^0 для некоторого $n > 1$, следует, что $\langle A, p, f\rangle$ не гамильтонова. Поэтому далее считаем, что все циклы в компонентах связности одноэлементны, то есть, унар $\langle A, f\rangle$ является либо корнем, либо суммой корней.

По условию, унар $\langle A, f\rangle$ не изоморфен унару C_1^t ни при каком $t \in N \cup \{0\} \cup \{\infty\}$, поэтому, если $\langle A, f\rangle$ — корень, то, по лемме 4, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ не гамильтонова.

В оставшемся случае, в силу неинъективности f на A, хотя бы одна из компонент связности неодноэлементна. Тогда унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условиям леммы 5 и, следовательно, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ снова не гамильтонова.

С учетом замечаний 1–5, рассуждения, аналогичные проведенным выше, приводят к выполнению необходимого условия теоремы для алгебр $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$, где операции s и m заданы по определениям (4) и (5) соответственно. □

В [24] были описаны абелевы и полиномиально полные алгебры в классах тернарных алгебр с одним оператором, основные операции которых задаются по правилам (3) и (4).

Рассмотрим теперь абелевы алгебры в классе алгебр с операторами, имеющих сигнатуру $\Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 — произвольная сигнатура, содержащая функцию почти единогласия $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а Ω_2 — множество операторов, то есть, унарных операций, перестановочных с каждой операцией из Ω_1.

Обозначим через V многообразие алгебр сигнатуры $\Omega_1 \cup \Omega_2$, заданное тождествами (2) и тождествами перестановочности каждого оператора $f \in \Omega_2$ с любой операцией из основной сигнатуры Ω_1.

В [19] показано, что для произвольного многообразия из существования терма почти единогласия от основных операций следует конгруэнц-дистрибутивность этого многообразия. Отсюда, многообразие V дистрибутивно. Известно [25], что многообразие дистрибутивно тогда и только тогда, когда оно нейтрально. Таким образом, для любых конгруэнций α и β любой алгебры из V выполняется соотношение $[\alpha, \beta] = \alpha \cap \beta$. Тогда, если алгебра $A \in V$ неодноэлементна, то для нее $[\bigtriangledown, \bigtriangledown] = \bigtriangledown \neq \triangle$.

Окончательно, получаем

Предложение 2. *Пусть V — многообразие алгебр с операторами, имеющее сигнатуру $\Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 — основная (произвольная) сигнатура, содержащая функцию почти единогласия, а Ω_2 — множество операторов. В многообразии V алгебра является абелевой тогда и только тогда, когда она одноэлементна.*

Следствие 1. *Пусть W — многообразие тернарных алгебр с операторами, имеющее сигнатуру $\{d\} \cup \Omega$, где $d(x, y, z)$ — функция большинства, а Ω — множество операторов. В многообразии W алгебра является абелевой тогда и только тогда, когда она одноэлементна.*

Следствие 2. *Пусть $\langle A, m, f\rangle$ — тернарная алгебра с оператором f, где операция $m(x, y, z)$ задана по правилу (5). Класс алгебр $\langle A, m, f\rangle$ не содержит нетривиальных абелевых алгебр.*

4. Заключение

Основным результатом работы являются необходимые и достаточные условия гамильтоновости для тернарных алгебр с одним оператором, основная операция которых является либо функцией Пиксли, либо функцией меньшинства, либо функцией большинства, заданными специальным образом на произвольном унаре.

Получены также достаточное условие гамильтоновости для алгебр с операторами, имеющих произвольную сигнатуру, и описание абелевых алгебр в многообразии алгебр с операторами, где основная сигнатура содержит функцию большинства.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Csákány B. Abelian properties of primitive classes of universal algebras // Acta. Sci. Math. 1964. Vol. 25. P. 202–208.

2. Shoda K. Zur theorie der algebraischen erweiterungen // Osaka Math. Journal. 1952. Vol. 4. P. 133–143.

3. McKenzie R. Congruence extencion, Hamiltonian and Abelian properties in locally finite varieties // Algebra Universalis. 1991. N 28. P. 589–603.

4. Valeriot M. Finite simple Abelian algebras are strictly simple // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1990. N 108. P. 49–57.

5. Kiss E., Valeriot M. Abelian algebras and the Hamiltonian property // J. Pure Appl. Algebra. 1993. Vol. 87. N 1. P. 37–49.

6. Klukovits L. Hamiltonian varieties of universal algebras // Acta. Sci. Math. 1975. Vol. 37. P. 11–15.

7. Freese R., McKenzie R. Commutator theory for congruence modular varieties. London, 1987.

8. Werner H. Congruences on products of algebras and functionally complete algebras // Algebra Universalis. 1974. Vol. 4. N 1. P.99–105.

9. Hagemann, J., Herrmann C. Arithmetically locally equational classes and representation of partial functions // Universal algebra, Estergom (Hungary). Vol. 29. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. 1982. P. 345-360.

10. Хобби Д., Маккензи Р. Строение конечных алгебр. М.: Мир, 1993. 287 с.

11. Kiss E., Valeriot M. Strongly Abelian varieties and the Hamiltonian property // The Canadian J. of Mathematics. 1991. V. 43. P. 331–346.

12. Степанова А.А., Трикашная Н.В. Абелевы и гамильтоновы группоиды // Фундам. и приклад. математика. 2009. Т. 15, вып. 7. С. 165–177.

13. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года. М.: Наука, 1974. 160 с.

14. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, Acts and Categories with Applications to Wreath Products and Graphs. Berlin: Walter de Gruyter, 2000. 529 p.

15. Skornyakov L.A. Unars // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1982. Vol. 29. Universal Algebra (Esztergom 1977). P. 735–743.

16. Wenzel G.H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Arch. Math. (Basel) 21. 1970. P. 256–264.

17. Pixley A.F. Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 14. N 1. P.105–109.

18. Maróti M., McKenzie R. Existence theorems for weakly symmetric operations // Algebra Universalis. 2008. Vol. 59. N 3-4. P.463–489.

19. Marković P., McKenzie R. Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms // Algebra Universalis, 2008. Vol. 58, P. 119–128.

20. Усольцев В.Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // Изв. Волгоградского гос. пед. ун-та. Сер. "Естеств. и физ.-мат. науки". 2005. N4(13). С. 17–24.

21. Усольцев В. Л. Простые и псевдопростые алгебры с операторами // Фундам. и приклад. математика. 2008. Т. 14, вып. 7. С. 189–207.

22. Карташов В.К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: тез. докл. межд. семинара, посв. памяти проф. Л. А. Скорнякова. Волгоград, 1999. С. 31–32.

23. Усольцев В.Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сб. 2011. Т. 12. Вып. 2(38). С. 127–134.

24. Усольцев В.Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 229–236.

25. Hagemann J., Herrmann C. A concrete ideal multiplication for algebraic systems and its relation to congruence distributivity // Arch. d. Math. 1979. Vol. 32. N 3. P.234–245.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет
Поступило 12.06.2014