М. А. Шубин, Псевдоразностные операторы и их обращение,
Докл. АН СССР, 1984, том 276, номер 3, 567–570

УДК 517.43 МАТЕМАТИКА

М.А. ШУБИН

ПСЕВДОРАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ОБРАЩЕНИЕ

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 1 VII 1983)

1. Пусть X – дискретное метрическое пространство с метрикой ρ, $B(x_0, r)$ – его (замкнутый) шар радиуса r с центром в точке x_0, $V(x_0, r)$ – число точек в этом шаре. Мы будем предполагать, что $V(x_0, r) \leqslant V(r)$, где функция V: $[0, +\infty) \to (0, +\infty)$ непрерывна, не убывает и субмультипликативна, т.е.

(1) $\quad V(r+s) \leqslant V(r)\,V(s), \quad r, s \geqslant 0.$

Отсюда следует, в частности, что $V(r) \leqslant Ce^{ar}$ при некоторых C, a. Основной пример: $X = G$ – группа с конечным числом образующих $g_1, g_2, \ldots, g_n$ и с такой левоинвариантной метрикой, что расстояние от точки $g \in G$ до единицы группы равно длине наименьшего слова, с помощью которого g записывается через $g_1, g_2, \ldots, g_n$, $g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_n^{-1}$. Тогда можно взять $V(r) = \exp f(r)$, где $f(r)$ получается линейной интерполяцией на каждом отрезке $[n, n+1]$, $n \in \mathbf{Z}_+$, между значениями $f(r) = \ln V(e, r)$, $r \in \mathbf{Z}_+$. Функция $V(r)$, построенная таким образом, растет как степень r^d на решетке $\mathbf{Z}^d$ и как экспонента $(2n-1)^r$ в случае, если G – свободная группа с образующими $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Как показал Р.И. Григорчук [1], возможны группы G такого вида, где $V(r)$ имеет рост промежуточный между степенным и экспоненциальным.

Через $l^p(X)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ будем обозначать обычные банаховы пространства комплекснозначных функций на X с нормами

$$\|f\|_p = \left(\sum_{x \in X} |f(x)|^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Л е м м а 1. *Пусть функция f: $X \to \mathbf{C}$ такова, что*

$$|f(x)| \leqslant CV(\rho(x, x_0))^{-1-\epsilon},$$

где $x_0 \in X$, $C > 0$, $\epsilon > 0$ не зависят от x. Тогда $f \in l^1(X)$, причем $\|f\|_1 \leqslant MC$, где $M = M(\epsilon)$ не зависит от f, C и x_0.

2. Введем теперь такую весовую функцию ψ: $[0, +\infty) \to (0, +\infty)$, что ψ не убывает и выполнены следующие условия:

(2) $\quad \exists N, C: \quad \psi(r+s) \leqslant C\psi^N(r)\psi^N(s), \quad r, s \geqslant 0,$

(3) $\quad \exists N, C: \quad V(r) \leqslant C\psi^N(r), \quad r \geqslant 0.$

Например, из условия (1) следует, что всегда можно взять $\psi(r) = V(r)$ или $\psi(r) = e^{ar}$, где $a > 0$. По существу же условия (2) и (3) означают, что $\psi(r)$ имеет рост, промежуточный между $V(r)$ и e^r. С помощью весовой функции ψ можно ввести п р о с т р а н с т в о Ш в а р ц а $S(X, \psi)$, состоящее из таких функций f: $X \to \mathbf{C}$, что для некоторой фиксированной точки $x_0 \in X$ и для любого $N > 0$ существует такое $C_N > 0$, что

(4) $\quad |f(x)| \leqslant C_N\,\psi^{-N}(\rho(x, x_0)).$

Легко видеть, что если оценки (4) выполнены для какой-то точки x_0, то они выполнены и при любом другом выборе этой точки, так что $S(X, \psi)$ не зависит от выбора x_0. Наилучшие постоянные C_N в (4) определяют на $S(X, \psi)$ полунормы, превращающие его в пространство Фреше. Из леммы 1 и условия (3) следует, что $S(X, \psi) \subset l^1(X)$ (и, следовательно, $S(X, \psi) \subset l^p(X)$ для любого $p \in [1, +\infty]$).

Определение. Класс псевдоразностных операторов (ПРО) $\mathcal{L}(X, \psi)$ состоит из таких операторов K, действующих в пространстве функций на X, что матрица $K(x, y)$, $x, y \in X$, этого оператора удовлетворяет оценкам

(5) $\quad |K(x, y)| \leqslant C_N \psi^{-N}(\rho(x, y)), \qquad N = 1, 2, \ldots$

Оператор K записывается через свою матрицу по обычной формуле

(6) $\quad (Kf)(x) = \sum_{y \in X} K(x, y) f(y)$

и априори определен на функциях, отличных от 0 лишь на некотором конечном подмножестве в X, однако далее он продолжается на те функции f, для которых ряды (6) абсолютно сходятся при всех $x \in X$, или по непрерывности. В частности, верно

Предложение 1. *Если $K \in \mathcal{L}(X, \psi)$, то K продолжается до непрерывных операторов*

$$K\colon\ S(X, \psi) \to S(X, \psi),$$

$$K\colon\ l^p(X) \to l^p(X), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Последнее утверждение вытекает из леммы 1 и известной леммы Шура. Легко доказывается также

Теорема 1 (о композиции). *Если $K_1, K_2 \in \mathcal{L}(X, \psi)$, то $K_1 K_2 \in \mathcal{L}(X, \psi)$.*

Примерами ПРО на группе G (см. п. 1) являются операторы свертки с финитными или достаточно быстро (в зависимости от роста ψ) убывающими функциями (например, разностные операторы на решетке). Теплицевы операторы, получаемые из разностных операторов или операторов свертки указанного только что типа применением ортогонального проектирования на подпространство функций с носителем в некотором подмножестве $\Lambda \subset G$, также является ПРО.

3. Перейдем к обсуждению основного вопроса об обращении операторов K типа ПРО. Мы хотим дать условия, достаточные для того, чтобы обратный оператор $L = K^{-1}$ (если он всюду определен и ограничен в $l^p(X)$ при каком-нибудь $p \in [1, +\infty]$) имел матрицу $L(x, y)$, также удовлетворяющую оценкам типа (5).

Пусть даны две неубывающие функции $\psi, \chi\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, причем выполнены следующие условия:

А. χ непрерывна в точке 0 и субмультипликативна;

Б. $\exists \epsilon_0 > 0\colon \quad \lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{\chi(\epsilon_0 r)}{\psi(r)} = 0.$

Теорема 2. *Пусть функции ψ, χ удовлетворяют условиям* А, Б, *и пусть K – такой оператор на X, что для его матрицы $K(x, y)$ выполнена оценка*

(7) $\quad |K(x, y)| \leqslant C \psi^{-1}(\rho(x, y)) V^{-1-\delta}(\rho(x, y)),$

где $C > 0$, $\delta > 0$. Тогда если оператор $K\colon l^p(X) \to l^p(X)$ имеет при каком-либо $p \in [1, +\infty]$ ограниченный всюду определенный обратный оператор $L = K^{-1}$, то матрица $L(x, y)$ обратного оператора удовлетворяет при некоторых $\epsilon > 0$ и $C_1 > 0$ условию

(8) $\quad \|\chi(\epsilon\rho(\cdot, y)) L(\cdot, y)\|_p \leqslant C_1,$

и, в частности,

(9) $\quad |L(x, y)| \leqslant C_1 \chi^{-1}(\epsilon\rho(x, y)), \quad x, y \in X.$

Укажем схему доказательства. Нужно использовать весовые пространства

$$l^p_{\epsilon, y}(X) = \{f\colon \chi(\epsilon\rho(\cdot, y))f(\cdot) \in l^p(X)\}.$$

Оператор K в $l^p_{\epsilon, y}(X)$ подобен оператору $K_{\epsilon, y}$ в $l^p(X)$, который при малом $\epsilon > 0$ оказывается близким к K по операторной норме и, следовательно, обратимым. Но отсюда сразу следует (8), поскольку $L(x, y) = (L\delta_y)(x)$, где δ_y – дельта-функция в точке y (т.е. $\delta_y(y) = 1$, $\delta_y(x) = 0$ при $x \neq y$), а $\delta_y \in l^p_{\epsilon, y}(X)$, причем норма функции δ_y в $l^p_{\epsilon, y}(X)$ ограничена постоянной, не зависящей от y.

Отметим, что по существу та же схема использовалась в [2] с той же целью, хотя и в совершенно другом контексте: для псевдодифференциальных операторов в $\mathbf{R}^n$ и для конкретных весовых функций (степенной и экспоненциальной). Различные классы операторов в весовых пространствах на $\mathbf{R}^n$ изучались также в работах [3–6].

Укажем несколько более конкретных результатов, получающихся из теоремы 2 выбором X, ψ, χ и K (или части этих объектов).

Для произвольного X мы можем взять $\chi(r) = e^{r^\alpha}$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, $\psi(r) = e^{r^\alpha}$, и тогда получается, что если

(10) $\quad |K(x, y)| \leqslant C \exp[-a\rho(x, y)^\alpha]\, V^{-1-\delta}(\rho(x, y))$,

то

(11) $\quad |L(x, y)| \leqslant C_1 \exp[-\epsilon\rho(x, y)^\alpha]$.

В частности, это верно, если K – обратимый разностный оператор на группе G и тогда можно взять $\alpha = 1$. В более общем случае: если K – обратимый (в $l^p(G)$ при каком-либо $p \in [1, +\infty]$) оператор свертки с такой функцией φ на G, что

(12) $\quad |\varphi(x)| \leqslant C_a \exp[-a\rho(x, e)]$

для любого $a > 0$, то $L = K^{-1}$ – также оператор свертки с такой φ_1, что

(13) $\quad |\varphi_1(x)| \leqslant C' \exp[-\epsilon\rho(x, e)]$.

Пример $G = \mathbf{Z}$ и финитной φ, где оператор свертки на $l^2(\mathbf{Z})$ легко обращается с помощью перехода к $L^2(S^1)$ (с помощью соответствия между функциями и наборами их коэффициентов Фурье), показывает, что (13) нельзя заменить на оценки типа (12) с любым $a > 0$ (более того, в этом примере $\epsilon > 0$ может оказаться сколь угодно малым).

Беря $\chi(r) = V(r)$, мы получаем, что если

(14) $\quad |K(x, y)| \leqslant CV(\rho(x, y))^{-N}, \quad x, y \in X$,

где $N > 1$, то для любого $\kappa > 0$ существуют такие $\epsilon > 0$ и $C_1 > 0$, что

(15) $\quad |L(x, y)| \leqslant C_1 V^{-N+1+\kappa}(\epsilon\rho(x, y))$.

В частности, при $X = \mathbf{Z}^d$ это дает следующий результат: если

(16) $\quad |K(x, y)| \leqslant C(1 + \rho(x, y))^{-N}$,

где $N > d$, то для любого $\delta > 0$ существует такое $C_1 > 0$, что

(17) $\quad |L(x, y)| \leqslant C_1(1 + \rho(x, y))^{-N+d+\delta}$.

В частности, если $K \in \mathcal{L}(\mathbf{Z}^d, 1 + r)$, то $K^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{Z}^d, 1 + r)$, так что алгебра $\mathcal{L}(\mathbf{Z}^d, 1 + r)$ выдерживает переход к обратному оператору. Разумеется, при переходах от (14) к (15) и от (16) к (17) так же, как и при переходе от (10) к (11) и от (12) к (13), предполагается обратимость оператора K в $l^p(X)$ при каком-нибудь $p \in [1, +\infty]$.

Отметим, что в случае $X = \mathbf{Z}^d$ результаты типа оценок (11) или (17) имеются в работе П.М. Блехера [7], где они получены другим методом и при некоторых дополнительных предположениях (например, для положительных или близких к единичному операторов). В работе [7] указан также ряд вероятностных приложений, которые легко могут быть перенесены на рассматриваемую здесь более общую ситуацию.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
1 VII 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорчук Р.И.* – ДАН, 1983, т. 271, № 1, с. 30–33. 2. *Шубин М.А.* – УМН, 1978, т. 33, № 2, с. 3–47. 3. *Фейгин В.И.* Тр. ММО, 1977, т. 36, с. 155–194. 4. *Луцкий Я.А.* – ДАН, 1977, т. 235, № 3, с. 527–530. 5. *Луцкий Я.А., Рабинович В.С.* – Функц. анализ и его прилож., 1978, т. 12, № 1, с. 79. 6. *Левендорский С.З., Рабинович В.С.* – Изв. вузов. Математика, 1979, № 3, с. 38–44. 7. *Блехер П.М.* Препринт Ин-та прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, № 167 за 1981 г. М., 1982.