

В. И. Ведерников

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. СОПРЯЖЕННЫЕ СВЯЗНОСТИ КАК НОРМАЛИЗОВАННАЯ СВЯЗНОСТЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Симметрические пространства	64
§ 2. Нормализованные связности	73
Цитированная литература	87

Работа состоит из двух частей. В первой части (§ 1), некоторые результаты которой используются во второй части, вводится понятие обобщенного симметрического пространства, точнее обобщенной симметрической пары, на основе которой строится обобщенное симметрическое пространство. Оказывается, что все такие факторпространства редуктивны, что важно в приложениях к теории нормализованных связностей. Оказывается также, что частными случаями обобщенной симметрической пары (G, φ) (φ — эндоморфизм группы G) являются симметрические пары $(\varphi^2 = Id)$ и пара, в которой группа G является полупрямым произведением стационарной группы соответствующего факторпространства и некоторого нормального делителя группы G (в этом случае $\varphi^2 = \varphi$). Для всякой пары (G, φ) определяется отображение ρ , которое содержит значительную информацию о соответствующем факторпространстве. В последнем разделе § 1 строятся специальные симметрические пары в группе $G \times G$, которые используются в § 2.

В § 2 определяются нормализованные связности и излагаются основные сведения из теории нормализованных

связностей. Связь теории нормализованных поверхностей А. П. Нордена (см., напр., [7]) с теорией нормализованных связностей указана в работах [1], [2] [3]. В конце параграфа рассматривается пара сопряженных связностей, которая является примером нормализованной связности. Указываются некоторые обобщения этого понятия. Так как локальное изложение этой теории проведено в работе [4], то здесь проведено существенно глобальное изложение теории сопряженных связностей.

§ 1. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Обобщенная симметрическая пара. Рассмотрим пару (G, φ) где G —данная группа, а φ —эндоморфизм (гомоморфизм в себя) группы G . Образ $G_1 = \varphi(G)$ группы G при эндоморфизме φ , очевидно есть подгруппа группы G . Ядро K гомоморфизма φ есть нормальный делитель группы G и G_1 изоморфна факторгруппе G/K . Множество H^φ всех неподвижных элементов эндоморфизма φ образует подгруппу группы G , ибо из $\varphi(h) = h$, $\varphi(h_1) = h_1$ следует $\varphi(h^{-1}h_1) = h^{-1}h_1$. Важным частным случаем рассматриваемых пар является тот случай, когда φ —инволютивный автоморфизм группы G . В этом случае пара (G, φ) называется симметрической парой. Примеры: 1) $G = E_n$ —аддитивная группа векторов n -мерного векторного пространства E_n . Эндоморфизм φ определим матрицей вида $\varphi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где A —квадратная нильпотентная матрица, для которой $A^m = 0$ (m —минимальное из таких чисел), а B —квадратная невырожденная матрица. Тогда очевидно, что $G \supset \varphi(G) \supset \dots \supset \varphi^m(G) = E_{n-m}$, причем ограничение эндоморфизма φ на $\varphi^m(G)$ есть автоморфизм, который определяется матрицей B и в последовательности $G, \varphi(G), \varphi^2(G), \dots, \varphi^m(G)$ нет совпадающих членов; 2) G —мультипликативная группа комплексных чисел вида $z = e^{i\alpha}$. Отображение $\varphi(e^{i\alpha}) = e^{2i\alpha}$ есть очевидно эндоморфизм группы G . Ядро этого эндоморфизма определяется из условия $e^{2i\alpha} = 1$ и состоит из двух элементов $1, e^{i\pi}$. Этот пример показывает, что существуют эндоморфизмы группы G на себя, которые не являются автоморфизмами. Это связано с тем, что рассматриваемая группа односвязна и представляет из себя одномерный тор.

Легко указать также примеры, когда имеются несколько эндоморфизмов данной группы G , которые порождают одну и ту же группу неподвижных элементов H^α .

Переходя к общему рассмотрению, рассмотрим пару (G, φ) такую, что ограничение φ_1 эндоморфизма на под-

группу $G_1 = \varphi(G)$ есть автоморфизм этой подгруппы G_1 . В этом случае суперпозиция отображений $\psi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi$ также является эндоморфизмом группы G , но ψ обладает тем свойством, что $\psi(G) = G_1$ и ограничение ψ_1 эндоморфизма ψ на G_1 есть тождественное преобразование G_1 . Тогда очевидно $\varphi^{-1}(e) = \psi^{-1}(e) = K$, где K — ядро эндоморфизма φ . Для каждого $g_1 \in G_1$ имеет место: $\psi^{-1}(g_1)$ есть класс смежности по подгруппе K и, так как $\psi(g_1) = g_1$, то $g_1 \in \psi^{-1}(g_1)$. Следовательно, всякий класс смежности по подгруппе K можно представить в виде $g_1 K$, где $\psi(g_1 K) = g_1$. Таким образом, между элементами подгруппы $G_1 = \psi(G)$ и классами смежности $g_1 K$ существует взаимно однозначное соответствие, которое устанавливается при помощи эндоморфизма ψ по принципу: $g_1 K \leftrightarrow g_1$, где $g_1 = \psi(g_1 K)$. Поэтому $G_1 = \bigcup_{g_1 \in G_1} g_1 K$, причем различным элементам G_1 соответствуют различные классы смежности по подгруппе K . Следовательно, каждый элемент группы G можно представить в виде

$$g = g_1 \cdot k,$$

где $g_1 \in G_1$, $k \in K$. Такое представление единственное, то есть по данному $g \in G$ найдется единственная пара элементов $g_1 \in G_1$, $k \in K$ такая, что $g = g_1 \cdot k$. В самом деле, из $g = g_1 k = g'_1 k'$ следует $\psi(g) = g_1 = g'_1$ и тогда $k = k'$. Отсюда можно заключить, что группа G есть полупрямое произведение подгруппы G_1 и нормального делителя K : $G = G_1 * K$. Обратно, если группа G представляет из себя полупрямое произведение $G_1 * K$ своей подгруппы G_1 и нормального делителя K , то можно определить отображение ψ по принципу: если $g = g_1 \cdot k$, то $\psi(g) = g_1$. Тогда ψ оказывается гомоморфизмом, ибо если $g = g_1 \cdot k$, $g' = g'_1 k$, то

$$\psi(gg') = \psi[g_1 g'_1 ((g_1^{-1}) k g'_1)] = g_1 g'_1 = \psi(g) \cdot \psi(g').$$

Здесь мы воспользовались тем, что K — нормальный делитель группы G и поэтому из $k \in K$ следует $g_1^{-1} k g'_1 \in K$. Кроме того, $\psi(g_1) = g_1$ и ψ есть тождественное преобразование на φ_1 .

Из равенства $\psi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi$ следует, что $\varphi = \varphi_1 \circ \psi$. Здесь для конструирования φ рассматриваемого вида можно брать в качестве φ_1 любой автоморфизм группы G_1 . Отметим, что ядро гомоморфизма ψ , полученного для данного полупрямого произведения, совпадает с нормальным делителем K и факторпространство G/K изоморфно G_1 . Группа H^ψ неподвижных элементов эндоморфизма ψ очевидно совпадает с подгруппой G_1 . Собирая все, получим: Пусть (G, φ) — пара, состоящая из группы G и такого эндоморфизма φ группы G , что ограниче-

ние φ_1 эндоморфизма φ на подгруппу $G_1 = \varphi(G)$ является автоморфизмом, то группа G является полупрямым произведением своей подгруппы G_1 и ядра K гомоморфизма φ . Кроме того, всякий гомоморфизм рассматриваемого вида представим в виде $\varphi = \varphi_1 \circ \psi$, где ψ — эндоморфизм группы G_1 , определяющийся равенством $\psi(g_1 k) = g_1$, $g = g_1 k \in G = G_1 * K$, а φ_1 — произвольный автоморфизм группы G_1 .

Рассмотрим теперь пару (G, φ) с произвольным эндоморфизмом φ группы G . Ядро гомоморфизма φ как и ранее обозначим через K , а подгруппу неподвижных элементов эндоморфизма φ через H^φ . Пусть, далее, $G' = \varphi^{-1}(H^\varphi)$, то есть $G' = \{g' \in G \mid \varphi(g') \in H^\varphi\}$. Подмножество G' группы G является, как легко видеть, подгруппой. Очевидно также, что $\varphi(G') = H^\varphi \subset G'$. Следовательно, можно рассматривать ограничение φ_1 эндоморфизма φ на подгруппу G' . Отображение φ_1 будет, очевидно, эндоморфизмом группы G' , для которого группа H^φ будет подгруппой неподвижных элементов эндоморфизма φ_1 . Поэтому группа G' будет полупрямым произведением подгруппы H^φ и ядра гомоморфизма φ_1 . Таким образом, в данном случае группа G будет расширением полупрямого произведения $G' = H^\varphi * K$, где $K = \varphi_1^{-1}(e)$. Совершенно ясно, что подгруппу H^φ в этом рассуждении можно заменить любой подгруппой группы G , для которой ограничение φ_1 эндоморфизма φ на эту подгруппу есть автоморфизм.

Выделим теперь пары (G, φ) специального, но достаточно общего вида. Этот специальный случай выделим требованиями: 1) Имеется такое целое $k > 0$, что $\varphi^k(G) = \varphi^{k+1}(G) = G_1$. Мы будем считать, что через k обозначено наименьшее число, обладающее указанным свойством.

Тогда

$$G \supset \varphi(G) \supset \dots \supset \varphi^k(G) = \varphi^{k+1}(G) = G_1,$$

где всюду имеет место строгое включение; 2) Если ввести обозначение $Z_k = \{g \in G \mid \varphi^k(g) = e\}$, то имеет место

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_l = Z_{l+1} = Z$$

для некоторого целого $l > 0$, причем считаем, что всюду строгое включение.

Из первого предположения следует, что $\varphi^{k+l}(G) = \varphi^l[\varphi^k(G)] = \varphi^l(G_1) = G_1$. Так как из $\varphi^k(g) = l$ следует $\varphi^{k+1}(g) = e$, то всегда $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots \subseteq Z_k \subseteq \dots$. Поэтому предположение 2) влечет следующее: не только из $\varphi^l(g) = e$ следует $\varphi^{l+1}(g) = e$, но и из $\varphi^{l+1}(g) = e$ следует $\varphi^l(g) = e$. Индуктивным рассуждением получаем $Z_{l+p} = Z_l = Z$ для всякого целого $p > 0$.

Обозначим теперь через $t = \max(k, l)$. Тогда в наших предположениях $\varphi^t(G) = G_1$, $Z_t = Z = \{g \in G \mid \varphi^{t+p}(g) = e\}$, где p — любое целое положительное число. Обозначим, кроме того, φ^t через ψ : $\psi = \varphi^t$. Тогда ψ , так же как и φ , является эндоморфизмом, но ψ обладает дополнительными свойствами:

1) $\psi(G) = G_1$, $\psi(G_1) = G_1$;

2) из $\psi^2(g) = e$ следует $\psi(g) = e$, то есть множества $\tilde{Z}_1 = \{g \in G \mid \psi^2(g) = e\}$ и $\tilde{Z}_2 = \{g \in G \mid \psi(g) = e\}$ совпадают. Рассмотрим теперь какой-либо элемент $g \in G$. Тогда $\psi(g) = g_1 \in G_1$ и, так как $\psi^2(G) = G_1$, то найдется такое $x \in [\psi^2]^{-1}(G_1)$, что $\psi^2(x) = g_1 = \psi(g)$. Имеет место очевидное представление для элемента $g \in G$ в виде

$$g = \{g [\psi(x)]^{-1}\} \cdot \psi(x) = \alpha \cdot \psi(x).$$

Для элемента $\alpha = g [\psi(x)]^{-1}$ имеем

$$\psi(\alpha) = \psi[g\psi(x)^{-1}] = \psi(g) [\psi^2(x)]^{-1} = \psi(g) [\psi(g)]^{-1} = e,$$

то есть $\alpha \in Z$. Очевидно также, что $\beta = \psi(x) \in G_1$. Таким образом, $g = \alpha \cdot \beta$, где $\alpha \in Z$, $\beta \in G_1$. Покажем, что $Z \cap G_1 = e$. Для этого покажем сначала, что ограничение ψ_1 эндоморфизма ψ на подгруппу G_1 есть автоморфизм, то есть ядро гомоморфизма ψ_1 сводится к единице e группы G . Таким образом, следует показать, что если $g_1 \in G_1$ и $\psi_1(g_1) = \psi(g_1) = e$, то и $g_1 = e$. Для этого определим, как и ранее, $x \in \psi^{-1}(g_1)$, для которого $\psi^2(x) = e$. Тогда из $\psi(g_1) = e$ следует $\psi^2(x) = e$, а по второму свойству гомоморфизма ψ имеем также $\psi(x) = e$, то есть $g_1 = \psi(x) = e$. Это доказывает, что ψ_1 — автоморфизм. Предположим теперь, что $g_1 \in Z \cap G_1$. Тогда из $g_1 \in Z$ следует $\psi(g_1) = e$, а по доказанному тогда из $g_1 \in G_1$ следует $g_1 = e$. Следовательно, $Z \cap G_1 = e$. Отсюда следует, что группа G есть полупрямое произведение $G_1 * Z$ своей подгруппы G_1 и нормального делителя Z , являющегося ядром гомоморфизма ψ . При этом ограничение эндоморфизма ψ_1 на подгруппе G_1 есть автоморфизм.

Отметим, что из того, что ограничение ψ_1 эндоморфизма ψ группы G на подгруппе $G_1 = \psi(G)$ является автоморфизмом, следует совпадение $Z'_1 = \{g \in G \mid \psi(g) = e\}$ с $Z'_2 = \{g \in G \mid \psi^2(g) = e\}$. В самом деле, из $\psi^2(g) = \psi[\psi(g)] = e$ и $g_1 = \psi(g) \in G_1$ следует: $\psi(g_1) = e$ влечет $g_1 = e$, ибо ψ на G_1 есть автоморфизм. Поэтому из $\psi^2(g) = \psi(g_1) = e$ следует $g_1 = \psi(g) = e$, то есть Z'_1 совпадает с Z'_2 .

Покажем теперь, что ограничение φ_1 эндоморфизма φ на подгруппе $G_1 = \varphi^k(G) = \varphi^{k+1}(G)$ также является автоморфизмом. В самом деле, если $g_1 \in G_1$ и $\varphi(g_1) = e$, то $\psi(g_1) = \varphi^t(g_1) = e$, а тогда $g_1 = e$.

Следовательно, ядро гомоморфизма φ_1 сводится к единичному элементу и φ_1 — автоморфизм. Кроме того, очевидно, что из $h \in H^\varphi = \{h \in G | \varphi(h) = h\}$ следует $\psi(h) = \varphi^l(h) = h \in G_1$, то есть $H^\varphi \subset G_1$. Поэтому ограничение эндоморфизма φ группы G на подгруппе G_1 имеет ту же подгруппу неподвижных элементов, что и $\varphi: H^\varphi = H^{\varphi_1}$.

В результате имеем

Теорема 1: Пусть (G, φ) — пара, состоящая из группы G и эндоморфизма φ группы G . Если найдутся такие целые $k > 0$ и $l > 0$, что 1) $\varphi^k(G) = \varphi^{k+l}(G) = G_1$ и 2) $Z_l = \{g \in G | \varphi^l(g) = e\} = Z_{l+1} = \{g \in G | \varphi^{l+1}(g) = e\} = Z$, то: а) группа G является полупрямым произведением своей подгруппы G_1 и нормального делителя Z , то-есть $G = G_1 * Z$, б) ограничение φ_1 эндоморфизма φ на подгруппу G_1 есть автоморфизм группы G_1 , в) $H^\varphi = H^{\varphi_1} \subset G_1$.

Из этой теоремы получаем некоторые следствия:

Следствие 1: Если (G, φ) такая пара, что φ — эндоморфизм группы G на себя, то-есть $\varphi(G) = G$, то φ является автоморфизмом, если найдется такое целое $l > 0$, что $Z_l = \{g \in G | \varphi^l(g) = e\} = Z_{l+1} = \{g \in G | \varphi^{l+1}(g) = e\}$.

В самом деле, в рассматриваемом случае $\varphi(G) = G = \varphi^2(G)$. Отсюда теперь следует:

Следствие 2: Пусть (G, φ) , такая пара, что φ — эндоморфизм группы G на себя. Тогда возможны два случая: а) $Z_1 = \{g \in G | \varphi(g) = e\} = e$ и тогда φ — автоморфизм группы G или б) в последовательности $Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_k \subset Z_{k+1} \subset \dots$ все время имеет место строгое включение.

Отметим, что случай б) имеет место в приведенном выше примере 2), так как в этом примере $G = \{e^{i\alpha}\}$, $\varphi^k(e^{i\alpha}) = e^{2ki\alpha}$, $Z_1 = \{1, e^{i\pi}\}$, $Z_2 = \{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\}$ и так далее. Однако следует заметить, что в случае периодического эндоморфизма, или в более общем случае, когда $\varphi^n = \varphi^m$, условие б) не может выполняться, ибо в этом случае $Z_m = Z_n$.

Определение: Пару (G, φ) , удовлетворяющую условиям теоремы 1, будем называть обобщенной симметрической парой, если ограничение φ_1 эндоморфизма φ на подгруппу $\varphi^k(G)$ есть инволютивный автоморфизм группы $\varphi^k(G)$.

Пусть (G, φ) — обобщенная симметрическая пара, то есть существует подгруппа H группы G , для которой: 1) $G = H * K$; 2) $H^\varphi \subset H$, 3) ограничение φ_1 эндоморфизма φ на H является инволютивным автоморфизмом группы H . В этом случае очевидно $H^{\varphi_1} = H^\varphi \subset H$. Кроме того легко видеть, что однородное пространство $F = G/H^\varphi$ редуکتивно. В самом

деле, полупрямое произведение редуکتивно относительно разложения

$$\underline{G} = \underline{H} \oplus \underline{K},$$

где \underline{H} и \underline{K} — алгебры Ли подгрупп H и K соответственно. Кроме того, в силу инволютивности φ_1 однородное пространство $F_1 = H/H^\varphi = H/H^{\varphi_1}$ редуکتивно относительно соответствующего разложения. Поэтому G/H^φ редуکتивно.

Также легко доказывается, что если группа G является полупрямым произведением своей подгруппы H и нормального делителя K , то пространство G/H будет симметрическим пространством только тогда, когда алгебра Ли группы K будет коммутативной.

2. Отображение ρ и его основные свойства. Для данной пары (G, φ) , где φ — произвольный эндоморфизм группы G , определим отображение $\rho: G \rightarrow G$ равенством

$$y = \rho(x) = x\varphi(x^{-1}), \quad x \in G.$$

Рассмотрим основные свойства этого отображения:

1) Между элементами множества $\rho(G)$ и левыми классами смежности факторпространства G/H^φ имеется взаимно однозначное соответствие, которое осуществляется отображением $\rho: gH^\varphi \leftrightarrow \rho(gH^\varphi) = y$.

В самом деле, так как в группе соответствие ρ не взаимно однозначное, то определится множество $\rho^{-1}(y)$ для $y \in \rho(G)$. Полагая сначала $y = e$, для $x \in \rho^{-1}(e)$ имеем $x\varphi(x^{-1}) = e$, то есть $\varphi(x) = x$ и $x \in H^\varphi$. Таким образом, $\rho^{-1}(e) = H^\varphi$. Если же $y \neq e$ и $x \in \rho^{-1}(y)$, то для любого $x' \in \rho^{-1}(y)$ элемент $h = x^{-1}x' \in H^\varphi$, то есть $x' \in xH^\varphi$. В самом деле, из $\rho(x) = \rho(x')$ следует $\rho(h) = x^{-1}x'\varphi(x'^{-1})\varphi(x) = x^{-1}x\varphi(x^{-1})\varphi(x) = e$. Обратно, если $x' \in xH^\varphi$, то легко видеть, что $\rho(x') = \rho(x)$. Таким образом, $\rho^{-1}(y) = xH^\varphi$, где $y = \rho(x)$.

2) Ядро неэффektivности N группы преобразований G , действующей в пространстве G/H^φ , совпадает с пересечением централизатора Z множества $\rho(G)$ с подгруппой H^φ : $N = Z \cap H^\varphi$. Оно также совпадает с множеством элементов $n \in G$, для которых равенство $n\varphi(n^{-1}) = x$ выполняется для любого $x \in \rho(G)$. В частности, пространство G/H^φ будет однородным пространством тогда и только тогда, когда $Z \cap H^\varphi = e$, и оно будет факторгруппой, если $H^\varphi \subset Z$.

В самом деле, из $n\varphi(n^{-1}) = x$ при $x = e$ следует $n \in H^\varphi$ и тогда $n\varphi(n^{-1}) = x$ для любого $x \in \rho(G)$, то есть $n \in Z \cap H^\varphi$. Полагая $x = g\varphi(g^{-1})$, $\rho = gng^{-1}$, из $n\varphi(n^{-1}) = x$ получим $\varphi(\rho) = \rho$, то есть $gng^{-1} \in H^\varphi$ и $n \in g^{-1}H^\varphi g$ при любом $g \in G$.

Поэтому n принадлежит ядру неэффективности N , то есть $Z \cap H^\varphi \subset N$. Обратное включение очевидно.

3) Отображение $\rho: G \rightarrow G$ есть гомоморфизм группы G в группу $\rho(G)$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in G$ $\rho(y)$ перестановочно с любым элементом группы $\varphi(G)$. Ядром гомоморфизма ρ является H^φ и поэтому $\rho(G)$ изоморфно G/H^φ .

Это свойство очевидно.

4) Эндоморфизм φ есть инволютивный автоморфизм группы G тогда и только тогда, когда для любых $x \in G$ выполняется равенство

$$\varphi[\rho(x)] = [\rho(x)]^{-1}.$$

В самом деле, последнее равенство можно переписать в виде

$$\varphi[x\varphi(x^{-1})] = \varphi(x)\varphi^2(x^{-1}) = [x\varphi(x^{-1})]^{-1} = \varphi(x)x^{-1}$$

и оно эквивалентно равенству $\varphi^2(x) = x$ для любых $x \in G$. Но в случае выполнения этого равенства будем иметь $G \supset \varphi(G) \supset \varphi^2(G) = G$, то есть ряд $G, \varphi(G), \varphi^2(G) \dots$ состоит из совпадающих членов. Также ряд $Z_1 = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\} \subset Z_2 = \{g \in G \mid \varphi^2(g) = e\} = e \subset \dots$ состоит из совпадающих членов. Поэтому φ есть инволютивный автоморфизм.

Замечание. Наряду с отображением ρ можно рассматривать отображения $\rho_1: x \rightarrow \varphi(x)x^{-1} = [\rho(x)]^{-1}$, $h_1: x \rightarrow \varphi(x^{-1})x = \rho_1(x^{-1})$, и $h_2: x \rightarrow x^{-1}\varphi(x) = \rho(x^{-1})$. Все эти отображения позволяют координацию, имеющуюся в группе G , переносить в факторпространство G/H^φ . Эту координацию в G/H^φ будем называть канонической.

Инволютивные автоморфизмы в прямом произведении групп. Пусть дана тройка (G, φ, ψ) , где G — данная группа, а φ и ψ — эндоморфизмы группы G . Образы группы G при этих эндоморфизмах обозначим через G_1 и G_2 . Рассмотрим далее прямое произведение групп $G_1 \times G_2$. Тогда каждый элемент этого прямого произведения можно представить в виде $(\varphi(a), \psi(b))$, $a \in G, b \in G$. Если элементы a и b фиксированы, то можно определить отображение γ группы $G_1 \times G_2$ в себя равенством

$$\gamma[\varphi(a), \psi(b)] = [\varphi(b), \psi(a)]. \quad (1)$$

Следует, однако, иметь в виду, что это отображение зависит от выбора элемента a из класса $\varphi^{-1}(g_1) = aK_1$ и b из класса $\psi^{-1}(g_2) = bK_2$, где K_1 и K_2 — ядра гомоморфизмов φ и ψ соответственно. Для того чтобы отображение γ определялось однозначно на $G_1 \times G_2$ необходимо и достаточно, чтобы ре-

зультат не зависел от выбора элементов a и b , то есть чтобы выполнялось неравенство

$$[\varphi(b), \psi(a)] = [\varphi(bk_2), \psi(ak_1)]$$

при любых $k_1 \in K_1$ и $k_2 \in K_2$. Полученное равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi(bk_2) = \varphi(b) \cdot \varphi(k_2) = \varphi(b)$ и $\psi(ak_1) = \psi(a)\psi(k_1) = \psi(a)$, то есть когда $\varphi(k_2) = e$, $\psi(k_1) = e$, но это означает, что $K_2 \subset K_1$ и $K_1 \subset K_2$, то есть $K_1 = K_2$. Таким образом, отображение γ будет однозначным на $G_1 \times G_2$ только тогда, когда группы G_1 и G_2 изоморфны. Обозначим через α изоморфное отображение группы G_1 на G_2 , а через φ_0 и ψ_0 изоморфное отображение группы G_1 на G/K и группы G_2 на G/K соответственно. Очевидно, можно положить $\alpha = \psi_0^{-1} \circ \varphi_0$ и для элементов $G_1 \times G_2$ получим

$$(g_1, g_2) = [\varphi(a), \psi(b)] = [g_1, \alpha(g'_1)] = [g_1, \psi_0^{-1} \circ \varphi_0(g'_1)].$$

Рассматривая, далее, только тот случай, когда отображение γ является однозначным отображением, покажем, что отображение γ есть инволютивный автоморфизм группы $G_0 = G_1 \times G_2$. Гомоморфность γ следует из равенств:

$$\begin{aligned} \gamma[(g_1, g_2)(g'_1, g'_2)] &= \gamma[g_1g'_1, g_2g'_2] = \gamma[\varphi(aa'), \psi(bb')] = \\ &= [\varphi(bb'), \psi(aa')] = [\varphi(b), \psi(a)][\varphi(b'), \psi(a')] = \\ &= \gamma(g_1, g_2) \cdot \gamma(g'_1, g'_2). \end{aligned}$$

То, что γ есть отображение на группу $G_1 \times G_2$, очевидно. Ядро гомоморфизма определяется из равенства $\gamma(g_1, g_2) = (e, e)$, откуда $a, b \in K$, где K — общее ядро гомоморфизмов φ и ψ . Поэтому $g_1 = \varphi(a) = e$ и $g_2 = \psi(b) = e$ и ядро гомоморфизма γ тривиально. Поэтому γ есть автоморфизм, который очевидно инволютивен. В результате определяется симметрическая пара $(G_1 \times G_2, \gamma)$.

Подгруппа H^γ неподвижных элементов инволютивного автоморфизма γ легко определяется и состоит, очевидно, из элементов вида $[\varphi(a), \psi(a)] \in G_1 \times G_2$. Соответственно определится симметрическое пространство $G_1 \times G_2 / H^\gamma$, которое мы будем считать состоящим из левых классов смежности.

Каноническая координата в $G_1 \times G_2 / H^\gamma$ определится по общему правилу: если $\alpha = (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, то

$$x = \alpha \gamma(\alpha^{-1}) = [\varphi(ab^{-1}), \psi(ba^{-1})].$$

Таким образом, элемент x , вводящий координату в $G_1 \times G_2 / H^\gamma$, определяется заданием того класса смежности факторгруппы G/K , который содержит элемент $ab^{-1} \in G$.

Как известно (см. [4]), действие группы G в пространстве $F = G/H^\Phi$ можно записать в канонических координатах в следующей форме: если $a \in G$, то $x = g\varphi(g^{-1}) \xrightarrow{a} ax\varphi(a^{-1})$. При этом группа G может быть представлением какой-либо другой группы G' , то есть имеется гомоморфизм η группы G' в группу G . Тогда можно считать, что в пространстве F действует группа G' по принципу: если $a' \in G'$, $x \in F$, то

$$x' = \eta(a'g') \varphi [\eta(a'g')^{-1}].$$

В нашем случае, когда $F = G_1 \times G_2 / H^\Psi$, мы имеем как раз представление η группы $G \times G$ в группу $G_0 = G_1 \times G_2$, где $\eta(g, g') = [\varphi(g), \psi(g')]$. Преобразование $G \times G$ в F здесь может быть выражено формулой: если $x = [\varphi(ab^{-1}), \psi(ba^{-1})]$, то

$$x' = [\varphi(agg'^{-1}b^{-1}), \psi(bg'g^{-1}a^{-1})].$$

Ядру неэффективности N действия группы G в факторпространстве принадлежат те элементы, для которых имеет место

$$x' = (a, b)x = x, \quad x = [\varphi(gg^{-1}), \psi(g'g^{-1})] \quad (2)$$

для любых $g, g' \in G$. Полагая здесь $g'g^{-1} = e$ получим

$$[\varphi(ab^{-1}), \psi(ba^{-1})] = (e, e),$$

откуда $ab^{-1} \in K$, где K — общее ядро гомоморфизмов φ и ψ . Это также значит, что $\varphi(a) = \varphi(b)$ и $\psi(a) = \psi(b)$. Отсюда и из $\psi(bg'g^{-1}a^{-1}) = [\psi(agg'^{-1}b^{-1})]^{-1}$ следует, что равенство (2) сводится к условиям $\varphi(agg''a^{-1}) = \varphi(g'')$, $\psi(agg''a^{-1}) = \psi(g'')$, то есть к условиям $\varphi(a)\varphi(g'')\varphi(a^{-1}) = \varphi(g'')$, $\psi(a)\psi(g'')\psi(a^{-1}) = \psi(g'')$, где $g'' = g'g^{-1}$ — произвольный элемент группы G . Отсюда заключаем, что $\varphi(a) \in C_1$, где C_1 — центр группы $\varphi(G)$, а $\psi(a) \in C_2$, где C_2 — центр группы $\psi(G)$. Таким образом, ядру неэффективности представления группы $G \times G$ в пространстве $F = G_0/H^\Psi$ принадлежат те и только те элементы группы $G \times G$, которые определяют в $\varphi(G) \times \psi(G)$ элементы вида $[\varphi(a), \psi(a)]$, где $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ принадлежат центрам групп $\varphi(G)$ и $\psi(G)$ соответственно. В случае, если φ и ψ — автоморфизмы группы G , можно положить $[\varphi(a), \psi(a)] = [g, \psi \circ \varphi^{-1}(g)]$ и ядру неэффективности принадлежат те и только те элементы, для которых g и $\psi \circ \varphi^{-1}(g)$ одновременно принадлежат центру группы G . Следует иметь в виду, что при любом автоморфизме центр группы переходит в себя. Поэтому достаточно потребовать, чтобы элемент g принадлежал центру G . Если группа не имеет центра, то факторпространство является однородным пространством.

Для нас особенно интересен тот случай, когда φ и ψ являются автоморфизмами группы G . В этом случае группы $G_1 = \varphi(G)$ и $G_2 = \psi(G)$ связаны изоморфным соответствием α . Отметим частные случаи: 1) φ — тождественное преобразование. Тогда $\alpha = \psi$, $\gamma[a, \psi(b)] = [b, \psi(a)]$, $H^\alpha = \{(a, \psi(a))\}$; 2) φ и ψ — тождественные преобразования. В этом случае $\gamma(a, b) = (b, a)$, $H^\alpha = \{(a, a)\}$, $x = (ab^{-1}, ba^{-1})$; 3) φ и ψ — инволютивные автоморфизмы, то есть $\varphi = \varphi^{-1}$, $\psi = \psi^{-1}$; $\gamma_1(a, b) = [\varphi \circ \psi(b), \varphi \circ \psi(a)]$.

§ 2. НОРМАЛИЗОВАННЫЕ СВЯЗНОСТИ

Здесь будут рассмотрены вопросы, касающиеся основных понятий теории нормализованных связностей. Так как эти рассуждения будут аналогичны тем, которые были проведены в работах [6], [10], [11] и [9], то изложение будет кратким и в нем будут использованы основные определения и теоремы, имеющиеся в указанных работах.

1. Основные определения. Пусть $P(M, G, p)$ — главное расслоенное пространство, в котором задана инфинитезимальная связность Γ формой связности ω . Мы введем следующие определения: если в P группа G редуцирована к подгруппе H , то есть в P задано подмногообразие $P'(M, H, p')$, являющееся главным расслоенным пространством с структурной группой H , то это подмногообразие будем называть нормализующим подмногообразием, а ограничение ω_H формы ω на P' будем называть формой нормализованной связности. В этом случае будем также говорить, что в P' задана нормализованная связность. Аналогичные определения будем применять для случая, когда в P задана нормализованная связность. Легко видеть, что, если в P задана нормализованная связность, то в нормализующем подмногообразии определяется нормализованная (из инфинитезимальной) связность, так как, если P есть нормализующее подмногообразие в P_0 , а P' — нормализующее подмногообразие в P , то P' будет нормализующим подмногообразием в P_0 . Известно, что имеется взаимно однозначное соответствие между нормализующими подмногообразиями в $P(M, G, p)$ и секущими поверхностями $\sigma: M \rightarrow E$, где $E(M, G/H, G, p)$ — присоединенное к P расслоенное пространство. Поэтому нормализующее подмногообразие можно определять секущей поверхностью в E (подгруппа H должна быть определена). Эту секущую поверхность будем называть нормализатором или секущей нормализующей поверхностью.

В случае, когда пространство G/H редуктивно, то есть когда для алгебры Ли \underline{G} группы G имеет место разложение

$$\underline{G} = \underline{H} \oplus \underline{K},$$

где \underline{H} — алгебра Ли группы H , то для формы нормализованной (из инфинитезимальной) связности будем иметь

$$\omega_H = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_1 \in \underline{H}, \quad \omega_2 \in \underline{K}. \quad (3)$$

Легко показать, что форма ω_1 определяет инфинитезимальную связность в нормализующем подмногообразии P' . В частности, нормализацию можно определять в главном расслоенном пространстве, в котором задана связность Картана (ее можно рассматривать как частный случай нормализованной связности). Также можно рассматривать редуктивную связность Картана и полуредуктивную связность Картана. Имеют место формулы для форм кривизны нормализованной связности, которые являются ограничениями на P' форм кривизны инфинитезимальной связности. Отсюда определяются формы кривизны инфинитезимальной связности с формой ω_1 , определенной равенством (3).

2. Локальное рассмотрение. Здесь мы будем предполагать, что рассмотрение проводится в главном расслоенном пространстве, являющемся прямым произведением: $P = M \times G$, где M — многообразие, а G — группа Ли. Так как любое главное расслоенное пространство по определению является «в малом» прямым произведением, то есть над достаточно малой координатной окрестностью U имеет место $P|_U = U \times G$, то мы фактически переходим здесь к локальному рассмотрению.

Сначала сделаем следующее замечание. Предположим, что дано множество M и группа G . Обозначим через G^M множество отображений φ множества M в группу G ($\varphi: M \rightarrow G$). В этом множестве естественно вводится структура группы по правилу: если $x \in M$, $g \in G^M$, $h \in G^M$, то есть $g: x \rightarrow g(x)$, $h: x \rightarrow h(x)$, то определяется композиция этих отображений $h \cdot g: x \rightarrow h(x) \cdot g(x)$. Отображение $x \rightarrow e$ есть единица этой группы. Если $P = M \times G$, то элементы G^M есть секущие поверхности в главном расслоенном пространстве P . Здесь M — дифференцируемое многообразие и следует ограничиться только дифференцируемыми отображениями $M \rightarrow G$. Предположим теперь, что в группе выделена замкнутая подгруппа Ли H . Тогда все отображения (дифференцируемые) многообразия M в H образуют подгруппу H^M группы G^M . Поэтому можно

определить факторпространство G^M/H^M , которое состоит из классов смежности $H^M g$, где $g \in G^M$, то есть g — секущая поверхность в $P = M \times G$. Каждые два элемента данного класса смежности отличаются тем, что они могут быть переведены один в другой левыми сдвигами в G^M при помощи элементов $h \in H^M$. Ясно отсюда, что элемент факторпространства G^M/H^M есть множество секущих поверхностей нормализующего подмногообразия $P'(M, H, p')$, которое можно также рассматривать как прямое произведение $P' = M \times H$.

Предположим теперь, что в $P = U \times G$ задана инфинитезимальная связность Γ с формой связности $\omega(x, dx, g, dg)$. Тогда для каждой секущей поверхности $g: x \rightarrow g(x)$ можно определить значение формы связности

$$\omega(g) = \omega[x, dx, g(x), dg(x)] = dg(x)[g(x)]^{-1} + \\ + ad[g(x)]\pi(x, dx),$$

которое будет формой в окрестности U .

При левых сдвигах в множестве S секущих поверхностей вида $g \rightarrow hg$ значение формы связности будет изменяться по закону

$$\omega(hg) = dh(x)[h(x)]^{-1} + ad[h(x)]\omega(g). \quad (4)$$

При этом, как легко подсчитать, имеет место $\omega[(h_1 h)g] = = \omega[h_1(hg)]$. Отметим, что для двух значений форм связности $\omega(g)$ и $\omega(g_1)$, найдется секущая поверхность $h: x \rightarrow h(x)$ такая, что $g_1 = hg$ и тогда $\omega(g_1) = \omega(hg)$.

Точно такое же рассмотрение можно провести для случая нормализованных связностей. Следует лишь ограничить рассмотрение на классе смежности $H^M g$, $g \in G^M$, то есть на нормализующем подмногообразии $P'(M, H, p')$. Левые сдвиги здесь следует определять при помощи секущих поверхностей в P' или, что тоже самое, при помощи элементов H^M . В дальнейшем мы будем употреблять слово связность, понимая под этим более общий случай нормализованной связности.

Предположим теперь, что в главных расслоенных пространствах $P = U \times G$ и $P' = U' \times G$ (с одной и той же структурной группой G) заданы связность Γ в P с формой связности ω и связность Γ' в P' с формой связности ω_1 . Связности Γ и Γ' назовем эквивалентными, если существует такой диффеоморфизм f окрестности U на U' , что имеются секущие поверхности g в P и g_1 в P_1 , для которых

$$\omega(g) = \omega_1(g_1), \quad (5)$$

где $x' = f(x)$. Всякому диффеоморфизму $f: U$ на U' соответствует отображение секущих поверхностей по принципу: каждой секущей $h': x' \rightarrow h'(x)$ в P' соответствует секущая в P , определяемая отображением $h': x \rightarrow h'[f(x)]$. При этом диффеоморфизм можно считать отождествлением координат. Тогда $x' = x$, $h(x) = h'(x)$.

Так как из данной секущей поверхности левыми сдвигами может быть получена любая секущая поверхность, то условие (5) в силу (4) может быть записано в более употребительном виде

$$\omega(g) = \omega_1(h'g') = dh'(x)[h'(x)]^{-1} + ad[h'(x)]\omega_1[g'(x)], \quad (6)$$

где значения форм $\omega(g)$ и $\omega_1(g')$ подсчитаны для произвольных секущих поверхностей в P и P' соответственно, а $h'(x)$ — подходящая секущая поверхность в P' . Можно также говорить о совпадении множеств всех значений форм связностей $\omega(g)$ и $\omega_1(g')$, определенных для всех секущих поверхностей в P и P' .

Пусть для алгебры \widetilde{G} структурной группы G главного расслоенного пространства $P = U \times G$ определено разложение $\widetilde{G} = \widetilde{H} \oplus \widetilde{K}$, относительно которого эта алгебра редуцируема. Тогда, если в P задана связность Γ с формой связности ω , то для любой нормализации к подгруппе \widetilde{H} определится инфинитезимальная связность Γ_1 с формой связности ω_1 , которая определится из равенства

$$\omega_H = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_1 \in \widetilde{H}, \quad \omega_2 \in \widetilde{K}, \quad (7)$$

где ω_H — форма нормализованной связности. Выясним, когда связность Γ_1 не зависит от нормализации. Для этого рассмотрим какую-либо секущую поверхность g_0 в P и определим соответствующие нормализацию и форму инфинитезимальной связности ω_1 . Последнюю следует определить равенством

$$\omega_1 = dhh^{-1} + ad(h)\omega_1(g_0),$$

где $\omega_1(g_0)$ — составляющая по подпространству \widetilde{H} формы $\omega(g_0)$. Для того, чтобы перейти к другой нормализации, нужно перейти к другой секущей поверхности так, чтобы определить другой класс смежности в G^U/H^U . Для этого нужно совершить сдвиг в G^U с помощью какой-либо секущей поверхности g , переводящей g_0 в секущую поверхность из данного класса смежности. Тогда для соответствующей формы инфинитезимальной связности будем иметь

$$\omega'_1 = dhh^{-1} + ad(h)\omega_1(gg_0), \quad (8)$$

где

$$\omega_1(gg_0) = [dgg^{-1} + ad(g)\omega_1(g_0)]_{\underline{H}} + [ad(g)\omega_2(g_0)]_{\underline{H}}.$$

Здесь отмечено, что следует определить только составляющую по подпространству \underline{H} линейного пространства $\underline{G} = \underline{H} \oplus \underline{K}$.

Предположим теперь, что для каждого класса смежности G^u/H^u определится секущая поверхность g такая, что

$$а) \quad ad(g)\omega_1(g_0) = \omega_1(g_0) + \alpha, \quad \text{где } \alpha \in K, \tag{9}$$

$$б) \quad dgg^{-1} + ad(g)\omega_2 \in K.$$

Тогда очевидно

$$\omega_1 = \omega_1,$$

то есть изменение нормализации не изменяет индуцированную инфинитезимальную связность. Приведенные условия заведомо выполняются, если группа G представляет из себя прямое произведение: $G = H \times K$. В самом деле, в этом случае $\omega = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 \in \underline{H}$, $\omega_2 \in \underline{K}$ и в качестве секущей поверхности можно взять секущую $g: U \rightarrow K$. Но тогда $ad(g)\omega_1 = \omega_1$, а $dgg^{-1} + ad(g)\omega_2 \in K$.

При локальном рассмотрении часто необходимо ограничить рассмотрение на подмногообразии M_1 базисного многообразия M , и поэтому нормализацию следует определять заданием тройки $(M_1, H, g(x))$, где $g(x)$ — секущая поверхность в P , которая определяет нормализующее подмногообразие. При этом секущая g определяется с точностью до перехода к другой из данного класса смежности. Поэтому удобнее нормализацию задавать тройкой (M_1, H, f) , где f — секущая в присоединенном расслоенном пространстве $E(M_1, G/H, G, \rho)$. Вместо группы H можно определять нормализацию к подгруппе H_1 , где $H_1 = H \times K$ или, в более общем случае, подгруппа H_1 такова, что дальнейшая нормализация к подгруппе H приводит к единственной связности, не зависящей от нормализации (от H_1 к H).

Так как группа G^u есть объединение классов смежности по подгруппе H^u , то множество значений форм всевозможных нормализованных связностей совпадает с множеством значений формы первоначальной связности. Таким образом, задание связности в P эквивалентно заданию всех возможных нормализованных связностей (к подгруппе H). Однако положение изменяется, если нормализованная связность оказывается редуцированной и рассматривается только та часть формы нормализованной связности, которая является формой инфинитезимальной связности и определяется из разложения

$$\omega_H = \omega_1 + \theta, \quad \omega_1 \in \underline{H}, \quad \theta \in \underline{K},$$

где $\underline{G} = \underline{H} \oplus \underline{K}$, $ad(h)K \subset K$. В этом случае, вообще говоря, невозможно определение всех значений первоначальной связности по значениям форм ω_1 инфинитезимальных связностей, возникающих в нормализующих подмногообразиях. Но можно указать частный случай, когда в некотором смысле это возможно. Именно, предположим, что в $P = U \times G$ имеется такая секущая поверхность g_0 , что форма данной инфинитезимальной связности принимает значения из алгебры Ли \underline{H} подгруппы H группы G . Определяя для секущей поверхности g_0 нормализованную связность, видим, что она будет в данном случае инфинитезимальной связностью в нормализующем подмногообразии P' . Если форму инфинитезимальной связности в P обозначить через ω , а значение формы нормализованной связности Γ_1 , определенной для g_0 , через $\omega_H(g_0)$, то будем иметь

$$\omega_H = \omega(hg_0) = dhh^{-1} + ad(h)[\omega(g_0)], \quad h \in H,$$

где по предположению $\omega(g_0) \in \underline{H}$, а тогда и $\omega_H \in \underline{H}$. Для того, чтобы получить любую другую нормализованную связность (к подгруппе H), достаточно рассмотреть переход от данной секущей поверхности к любой другой секущей g_1 в P , что можно совершить при помощи левых сдвигов в G^U . Значение любой другой формы нормализованной связности имеет вид

$$\omega_H(g_1) = \omega(g_0g) = dgg^{-1} + ad(g)\omega_H.$$

Если переход от g_0 к g_1 , то есть секущая поверхность g известна, и известно разложение $\underline{G} = \underline{H} \oplus \underline{K}$, то

$$dgg^{-1} + ad(g)\omega_H = [dgg^{-1} + ad(g)\omega_H]_{\underline{H}} + [dgg^{-1} + ad(g)\omega_H]_{\underline{K}}$$

где $\omega_1 = [dgg^{-1} + ad(g)\omega_H]_{\underline{H}} \in \underline{H}$, $\omega_2 = [dgg^{-1} + ad(g)\omega_H]_{\underline{K}} = \theta \in \underline{K}$. Здесь составляющая ω_2 может быть определена, если известна форма ω_H , которая определяется заданием $\omega(g_0)$. Поэтому заданием инфинитезимальной связности Γ' с формой связности ω_1 определяется любая нормализованная связность, а тем самым и первоначальная инфинитезимальная связность Γ . Отметим, что в приложениях часто имеется секущая g_0 такая, что $\omega_1(g_0) = 0$.

3. Пары сопряженных связностей. Здесь мы проведем существенно глобальное изложение. Локальное изложение этих вопросов смотрите в работе [4].

Будем употреблять следующую терминологию. Связность Γ , заданную в главном расслоенном пространстве $P(M, G_0, p)$ при помощи формы связности ω , будем называть связностью

типа H , если найдется такое нормализующее подмногообразие $P'(M, H, p')$, что соответствующая нормализованная связность оказывается инфинитезимальной связностью в P' , то есть форма нормализованной связности $\omega_H = \omega_{|P'}$ принимает значения из алгебры Ли H структурной группы H главного расслоенного пространства P' . Если кроме того в P задано другое нормализующее подмногообразие $P_1(M, H_1, p_1)$, то соответствующую нормализованную связность будем также называть нормализованной связностью типа H , если она получена нормализацией из инфинитезимальной связности типа H . Рассмотрим сначала следующую общий случай. Пусть $P(M, G_0, p)$ — главное расслоенное пространство с структурной группой G_0 . Предполагается, что в P имеются нормализующие подмногообразия $P_1(M, H_1, p_1)$ и $P_2(M, H_2, p_2)$ такие, что выполняются следующие свойства:

1) имеется подгруппа H_0 групп H_1 и H_2 такая, что для алгебр Ли H_1, H_2, H_0 групп H_1, H_2, H_0 выполняется равенство $H_0 = H_1 \cap H_2$;

2) имеется нормализующее подмногообразие $P_0(M, H_0, p_0)$ с структурной группой H_0 , для которого имеет место включение $P_0 \subset P_1 \subset P_2$;

3) факторпространство G_0/H_1 редуکتивно относительно разложения

$$G_0 = H_1 \oplus K,$$

где G_0 — алгебра Ли группы G_0 ;

4) из $\omega \in H_2$ следует $\omega|_{H_1} \in H_2$, где через $\omega|_{H_1}$ обозначена проекция ω на подпространство H_1 пространства G_0 . При выполнении перечисленных условий нормализующие подмногообразия P_1 и P_2 будем называть H_0 -связанными.

Предположим теперь, что в главном расслоенном пространстве P задана инфинитезимальная связность Γ с формой связности ω , ограничение которой на P_2 есть форма инфинитезимальной связности. В этом случае ограничение $\bar{\omega}$ формы связности ω на P_1 определит нормализованную связность типа H_2 . Так как по условию факторпространство G_0/H_1 редуکتивно, то

$$\bar{\omega} = \omega_1 + \theta,$$

где ω_1 — форма инфинитезимальной связности в $P_1(M, H_1, p_1)$.

В силу условия 4) будем иметь: так как $\omega|_{P_2}$ есть форма инфинитезимальной связности в P_2 , то есть $\omega|_{P_2} \in H_2$, то и $\omega|_{P_2} \in H_2$. Следовательно, ограничение формы ω_1 на P_0 принимает значения одновременно из алгебры Ли H_1 (по определе-

нию) и из алгебры Ли \underline{H}_2 , так как $P_0 \subset P_1 \cap P_2$. Это ограничение, которое мы обозначим через ω^0 , принимает значения из $\underline{H}_0 = \underline{H}_1 \cap \underline{H}_2$ и является формой инфинитезимальной связности в $P_0(\overline{M}, \underline{H}_0, p_0)$. Поэтому инфинитезимальная связность, индуцируемая связностью Γ и редуктивной структурой алгебры Ли \underline{G}_0 в главном расслоенном пространстве $P_1(M, H_1, p_1)$, имеет тип H_0 , то-есть ограничение формы связности на P_0 определяет инфинитезимальную связность в P_0 .

Поставленные выше условия 1) и 3) будут выполняться, если подгруппы H_1, H_2 являются соответственно подгруппами $H^{\varphi_1}, H^{\varphi_2}$ неподвижных элементов инволютивных автоморфизмов φ_1, φ_2 группы G_0 , причем требуется, чтобы $\underline{H}_0 = \underline{H}^{\varphi_1} \cap \underline{H}^{\varphi_2}$. Для того, чтобы удовлетворить требование 4), нужны дополнительные свойства этих подгрупп. В рассматриваемом случае условие принадлежности элемента алгебры Ли \underline{G}_0 группы G_0 подалгебре $\underline{H}^{\varphi_2}$ подгруппы H^{φ_2} , как известно, [5], записывается в виде

$$f_2(\omega) = \omega,$$

где f_2 — автоморфизм алгебры Ли группы G_0 , соответствующий автоморфизму φ_2 . Соответственно, разложение

$$\omega = \frac{1}{2}[\omega + f_1(\omega)] + \frac{1}{2}[\omega - f_1(\omega)]$$

позволяет определить проекцию ω_1 элемента ω на подпространство $\underline{H}^{\varphi_1}$: $\omega_1 = \frac{1}{2}[\omega + f_1(\omega)]$. Поэтому условие 4) эквивалентно следующему: если $f_2(\omega) = \omega$, то

$$f_2(\omega_1) = \frac{1}{2}[f_2(\omega) + f_2 \circ f_1(\omega)] = \frac{1}{2}[\omega + f_1(\omega)] = \omega_1.$$

Это условие заведомо выполняется, если $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, то есть если автоморфизмы f_1 и f_2 перестановочны. Но последнее условие будет заведомо выполняться, если автоморфизмы φ_1 и φ_2 будут перестановочны.

Для определения пары сопряженных связностей нужно рассмотреть тот случай, когда $G_0 = G \times G$, причем в G определен инволютивный автоморфизм φ . В этом случае в G_0 строятся инволютивные автоморфизмы ψ_0 и ψ , определяемые равенствами: если $(g_1, g_2) \in F_0$, то

$$\begin{aligned} \psi_0(g_1, g_2) &= (g_2, g_1) \\ \psi[g_1, \varphi(g_2)] &= [g_2, \varphi(g_1)]. \end{aligned}$$

Подгруппа H^{ψ_0} есть диагональная подгруппа группы $G_0 = G \times G$, а H^{ψ} состоит из элементов $[g, \varphi(g)] \in G_0$. Подгруппу H_0 определим как пересечение подгрупп H^{ψ_0} и H^{ψ} : $H_0 = H^{\psi_0} \cap H^{\psi}$. Подгруппа H_0 состоит очевидно из таких элементов (g, g) группы H^{ψ_0} , для которых $\varphi(g) = g$. Таким образом, H_0 есть подгруппа неподвижных элементов ограничения инволютивного автоморфизма ψ на подгруппе H^{ψ_0} . Легко проверяется, что автоморфизмы ψ_0 и ψ перестановочны и поэтому в рассматриваемом случае выполняется условие 4). Таким образом, в рассматриваемом случае нормализующие подмногообразия $P_1(M, H_1, p_1)$ и $P_2(M, H_2, p_2)$ будут H_0 -связаны, если выполняется условие 2): имеется нормализующее подмногообразие $P_0(M, H_0, p_0)$ с структурной группой H_0 , для которого имеет место включение $P_0 \subset P_1 \cap P_2$. Такие нормализующие подмногообразия будем называть φ -связанными.

Предположим теперь, что дано главное расслоенное многообразие $P(M, G_0, p)$ с структурной группой $G_0 = G \times G$, в котором заданы φ -связанные нормализующие подмногообразия $P_1(M, H^{\psi}, p_1)$ и $P_2(M, H_2, p_2)$, $H_2 = H^{\psi_0}$. Предположим далее, что в P задана инфинитезимальная связность Γ с формой связности ω , ограничение α которой на P_1 является инфинитезимальной связностью, то есть связность Γ является связностью типа H^{ψ} . Так как форма инфинитезимальной связности α принимает значения из алгебры Ли $\underline{H^{\psi}}$ структурной группы H^{ψ} , то эта форма имеет вид

$$\alpha = (\omega_1, f(\omega_1)).$$

Здесь $\omega_1 \in \underline{G}$ — алгебра Ли группы G , а f — инволютивный автоморфизм алгебры Ли \underline{G} группы G , соответствующий автоморфизму φ группы G . Аналогично, форма ω связности Γ имеет вид $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1, \omega_2 \in \underline{G}$. Отсюда следует, что ограничение формы ω_1 на P_1 совпадает с ω_1 , а ограничение формы ω_2 на P_1 совпадает с $f(\omega_1)$. Нормализованная связность Γ , соответствующая нормализующему подмногообразию $P_2(M, H_2, p_2)$ также имеет вид $\omega_0 = (\omega_1, \omega_2)$, где ω_1 — ограничения форм ω_1 на подмногообразии $P_2(M, H_2, p_2)$. Форму ω_0 , представляющую из себя пару форм ω_1 и ω_2 , будем называть парой сопряженных связностей. Для того чтобы оправдать это название «пары сопряженных связностей», рассмотрим тот случай, когда главное расслоенное пространство P_2 имеет нормализующие подмногообразия $P_2'(M, G, p_2')$,

$P_2^2(M, G, p_2^2)$ с одной и той же структурной группой G , для которых имеет место: ограничения формы ω_0 на P_2^i совпадают с ω_i .

Так как формы ω_i принимают значения из алгебры Ли \underline{G} группы G , то они определяют инфинитезимальные связности в соответствующих главных расслоенных пространствах P_2^i . Эту пару связностей и следует назвать парой сопряженных связностей, точнее парой связностей, сопряженных относительно данного инволютивного автоморфизма φ группы G .

Отметим теперь, что пара $(G \times G, \psi)$ определяет факторпространство $G \times G / H^\psi$, являющееся симметрическим пространством. Как и всякое симметрическое пространство оно будет редуکتивным относительно разложения в алгебре Ли вида

$$\omega = \frac{1}{2} [\omega + f_1(\omega)] + \frac{1}{2} [\omega - f_1(\omega)],$$

где ω — элемент алгебры Ли группы $G \times G$, а f_1 — инволютивный автоморфизм алгебры Ли группы $G \times G$.

Отметим теперь, что симметрическая пара $(G \times G, \psi_0)$, где ψ_0 определяется равенством $\psi_0(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ и является инволютивным автоморфизмом группы $G \times G$, определяет симметрическое пространство $G \times G / H_2$. Как всякое симметрическое пространство, оно редуکتивно относительно разложения, определяющегося для каждого ω из алгебры Ли группы $G \times G$ равенством

$$\omega = \frac{1}{2} [\omega + f_0(\omega)] + \frac{1}{2} [\omega - f_0(\omega)]. \quad (10)$$

Здесь ω как элемент алгебры Ли группы $G \times G$ можно представить в виде $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, а f_0 — инволютивный автоморфизм алгебры Ли группы $G \times G$, соответствующий ψ_0 , и имеет вид $f_0(\omega_1, \omega_2) = (\omega_2, \omega_1)$. Поэтому разложение (10) можно записать в виде

$$\omega = \left[\frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2), \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) \right] + \left[\frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2), \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) \right], \quad (11)$$

где форма $\overset{c}{\omega} = \left[\frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2), \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) \right]$ принадлежит алгебре Ли \underline{H}_2 группы H_2 . Если ω — форма инфинитезимальной связности в $P(M, G \times G, p)$, то и для нее будет иметь место разложение (11). При этом ограничение $\overset{c}{\omega}$ формы $\overset{c}{\omega}$ на P_2 будет инфинитезимальной связностью в $P_2(M, H_2, p_2)$, а ограничение формы $\overset{c}{\omega} - \omega$ на P_2 будет тензорной величиной типа

$ad(g_0), g_0 \in G \times G$. Если нормализующие подмногообразия P_1 и P_2 φ -связаны, то по условию ограничение формы ω на P_1 имеет вид $\omega = [\omega_1, f(\omega_1)]$.

Рассмотрим теперь ограничение ω формы ω на подмногообразии $P_0(M, H_0, p_0)$, которое, по предположению, является нормализующим подмногообразием одновременно и в P_1 и в P_2 . Так как $P_0 \subset P_2$, то

$$\omega = \left[\frac{1}{2} (\omega_1 + f(\omega_1)), \frac{1}{2} (\omega_1 + f(\omega_1)) \right],$$

и так как по доказанному ранее

$$\frac{1}{2} [\omega_1 + f(\omega_1)] \in \underline{H}^\varphi,$$

где f определено ранее, то $\omega \in \underline{H}$, где \underline{H} — алгебра Ли диагональной подгруппы группы $\dot{H}^\varphi \times H^\varphi$. Отсюда заключаем, что форма ω определяет инфинитезимальную связность в главном

расслоенном пространстве $P_0(M, H, p_0)$, а связность ω является инфинитезимальной связностью типа H . Пару сопряженных связностей такого типа естественно назвать самосопряженной парой.

Интересен тот случай, когда нормализованная связность представляет из себя сумму двух «независимых» связностей одного типа, формы которых будут ω_1 и ω_2 соответственно (рассматривается только ограничение на P_1). Это значит, что имеются такие подпространства $P'_i(M, G, p_i)$ главного расслоенного пространства $P_1(M, H^\varphi, p_1)$ и гомоморфизмы φ' и φ'' пространства P в P'_i соответственно, согласованные с проекциями прямого произведения в сомножители, которое определяет гомоморфизм связности ω в связности ω_1 и ω_2 соответственно. При этом нужно еще потребовать, чтобы ограничение ω на P_1 , то есть форма нормализованной связности, при указанных гомоморфизмах переходила в формы ω_i . Когда расслоенное пространство есть прямое произведение, этот случай как раз имеет место.

Для полноты изложения покажем, что при локальном изложении данное нами определение пары сопряженных связностей по существу совпадает с данными нами в [4] определением этого же понятия пары сопряженных связностей. Напомним это определение: Пара инфинитезимальных связностей, определенных в главном расслоенном пространстве $P' = U \times G$ называется парой сопряженных связностей отно-

сительно инволютивного автоморфизма φ структурной группы G , если существует такая секущая поверхность в P , что $\omega_2 = f(\omega_1)$, где ω_i — формы данных сопряженных связностей. Для сравнения с глобальным определением, заметим сначала, что пару связностей всегда можно представить как связность Γ_2 , определенную формой (ω_1, ω_2) в главном расслоенном пространстве $P_2 = M \times H_2$ (H_2 , как и ранее, диагональная подгруппа группы $G \times G$). При этом следует иметь в виду, что эта связность не будет инфинитезимальной, а нормализованной, полученной нормализацией из связности в $P = U \times (G \times G)$. В самом деле, пара (ω_1, ω_2) принадлежит алгебре Ли группы $G \times G$, но, вообще говоря, не принадлежит алгебре Ли группы H_2 (последнее будет только в случае $\omega_2 = \omega_1$, то есть в случае самосопряженных связностей). Заметим также, что в P имеются нормализующие подмногообразия $P_1 = U \times H^\psi$ и $P_0 = U \times H_0$, где $H_0 = H_1 \cap H_2$ и $P_0 = P_1 \cap P_2$. Предположим теперь, что связность Γ_2 является парой сопряженных связностей в глобальном определении. Тогда эта связность может быть расширена до инфинитезимальной связности в P (что в локальном плане легко выполнимо) и ограничение этой связности на P_1 есть инфинитезимальная связность. Поэтому ограничение формы связности (ω_1, ω_2) на P_1 , а, следовательно, и на P_0 , имеет вид $(\omega_1, f(\omega_1))$. Беря, наконец, секущую поверхность в P_2 так, чтобы она была секущей поверхностью в $P_0 \subset P_2$, мы для этой секущей поверхности будем иметь $\omega_2 = f(\omega_1)$, то есть пара связностей будет сопряженной в смысле приведенного выше локального определения. Заметим, что локальное определение не годится в глобальном случае потому, что в главном расслоенном пространстве нет глобальных секущих поверхностей (в общем случае).

З а м е ч а н и е: Такое же рассмотрение можно провести для более общего случая. Предполагаем, как и ранее, что дано главное расслоенное пространство $P(M, G \times G, p)$, в котором определена связность Γ формой связности ω , которую можно представить в виде $\omega = [\omega_1, f(\omega_2)]$, где f — автоморфизм алгебры Ли \underline{G} группы G , соответствующий автоморфизму φ группы G . Предположим далее, что определено нормализующее подмногообразие $P_1(M, H^\psi, p_1)$, являющееся главным расслоенным пространством с структурной группой H^ψ . Так как $G \times G / H^\psi$ — симметрическое пространство, а, следовательно, и редуктивное относительно разложения

$$\omega = \frac{1}{2} [\omega + f_1(\omega)] + \frac{1}{2} [\omega - f_1(\omega)], \quad \omega \in \underline{G \times G},$$

где f_1 — автоморфизм алгебры Ли группы $G \times G$, соответствующий автоморфизму ψ , и определяется равенством

$$f_1[\omega_1, f(\omega_2)] = [\omega_2, f(\omega_1)].$$

Таким образом в подробной записи рассматриваемое разложение имеет вид

$$\omega = (\omega_1, \omega_2) = \left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \frac{1}{2}f(\omega_1 + \omega_2) \right] + \\ + \frac{1}{2}[(\omega_1 - \omega_2), f(\omega_2 - \omega_1)],$$

где

$$\overset{c}{\omega} = \left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \frac{1}{2}f(\omega_1 + \omega_2) \right]$$

есть элемент алгебры Ли группы H^ψ . Если ω — форма связности, то ее ограничение $\overset{c}{\omega}_H$ на P_1 есть форма нормализо-

ванной связности, а форма $\overset{c}{\omega}$, строящаяся по ω , принадлежит алгебре Ли группы H^ψ и определяет инфинитезимальную связность в главном расслоенном пространстве $P_2(M, H^\psi, p_2)$. Эту связность будем называть средней связностью, построенной по данному автоморфизму φ для связности Γ , определенной формой связности ω . В частности, можно рассматривать диагональную подгруппу группы $G \times G$, когда φ есть тождественный автоморфизм. Как и ранее, средняя связность может оказаться суммой двух независимых одинаковых связностей в $P'_i(M, G, p_i)$.

4. Определение пары сопряженных связностей общего вида. Рассмотрим главное расслоенное пространство $P(M, G_0, p)$, где $G_0 = G \times G$, причем $G = H \times K$. Предположим далее, что в подгруппе H группы G задан инволютивный автоморфизм φ , который может быть продолжен на инволютивный автоморфизм группы G .

Определим группу G_2 как такую подгруппу группы G_0 , которая состоит из элементов группы G_0 , представимых в виде

$$g_1 = [(h, k), (\varphi(h), k_1)].$$

Алгебра Ли этой подгруппы будет состоять из элементов

$$\omega_1 = [\alpha_1 + \beta_1, f(\alpha_1) + \beta_2],$$

где $\alpha_1 \in H$, $\beta_2 \in K$, а f — автоморфизм алгебры Ли, соответствующий автоморфизму φ . Группу G_1 определим как диагональную подгруппу группы G_0 . Пусть далее задано такое нормализующее подмногообразие $P_3(M, H_0, p_3)$, где $H_0 = H^\varphi \times K$, что

$P_3 \subset P_1 \cap P_2$. Здесь $H^\varphi = \{h \in H \mid \varphi(h) = h\}$, а $P_1(M, G_1, \rho_1)$ и $P_2 \times (M, G_2, \rho_2)$ — нормализующие подмногообразия.

Если в P задана инфинитезимальная связность Γ с формой связности ω , ограничение которой на P_2 является формой инфинитезимальной связности Γ_2 в P_2 , то ограничение формы ω на P_1 определяет редуцированную нормализованную связность, форма связности которой имеет вид

$$\bar{\omega} = \omega|_{P_1} = \bar{\omega}_1 + \theta, \quad \omega_1 \in \underline{G}_1, \quad \theta \in Q.$$

Здесь Q определяется из разложения алгебры Ли G_0 в прямую сумму $\underline{G}_0 = \underline{G}_2 \oplus Q$ по принципу: если $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$, то

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_2),$$

$$\theta = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_1).$$

Полученную редуцированную нормализованную связность с формой связности $\bar{\omega}$ будем также называть парой сопряженных связностей. Редуцированная инфинитезимальная связность в P_2 , определенная формой связности $\bar{\omega}_1$, всегда имеет специальный вид, ибо ограничение ω_3 этой формы на P_3 имеет специальное строение. В самом деле, ограничение формы связности ω на P_1 принимает значения из алгебры Ли группы G_1 , то есть

$$\omega|_{P_1} = (\omega_1, \omega_2) = (\alpha_1 + \beta_1, f(\alpha_1) + \beta_2),$$

где $\alpha_1 \in H$, а f — автоморфизм алгебры Ли, соответствующий автоморфизму φ группы H . Так как $P_3 \subset P_1$, то ограничение $\bar{\omega}_1$ на P_3 имеет аналогичное строение. Но тогда

$$\begin{aligned} \bar{\omega}|_{P_3} &= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_2) = \\ &= \left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + f(\alpha_1)) + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2), \frac{1}{2}(\alpha_1 + f(\alpha_1)) + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) \right], \end{aligned}$$

где форма $\frac{1}{2}[\alpha_1 + f(\alpha_1)]$ принимает значения из алгебры Ли группы H^φ . Такую связность мы будем называть самосопряженной. Таким образом, инфинитезимальная связность, определенная в P_3 формой $\bar{\omega}_1$, будет самосопряженной. Эту связность, будем также называть средней связностью.

5. Сопряженные нормализованные связности. Пусть дано главное расслоенное пространство $P_0(M, G_0, \rho)$ со структурной группой $G_0 = G \times G$, являющейся прямым произведением данной группы G на себя. Предположим далее, что в P_0

задана инфинитезимальная связность Γ_0 формой связности $(\bar{\omega}_0, \underline{\omega}_0)$ и, кроме того, задана нормализация при помощи нормализующего подмногообразия $P(M, H_0, p)$, структурной группой которого является группа $H_0 = H \times H$, являющаяся прямым произведением подгруппы H группы G на себя. Тогда нормализацией определится форма нормализованной связности (ω_1, ω_2) , являющаяся ограничением формы $(\bar{\omega}_0, \underline{\omega}_0)$ на подмногообразии P .

Предположим далее, что в $P(M, H_0, p)$ заданы два φ -связанных нормализующих подмногообразия $P_1(M, H_0^\varphi, p_1)$ и $P_2(M, H_2, p_2)$, где φ — автоморфизм группы H , H_2 — диагональная подгруппа группы $H_0 = H \times H$, а H_0^φ — подгруппа H_0 , состоящая из неподвижных элементов инволютивного автоморфизма ψ :

$$\psi[h_1, \varphi(h_2)] = [h_2, \varphi(h_1)], h_i \in H.$$

Предположим, кроме того, что факторпространство G/H редуктивно, то есть алгебра Ли группы G представляется в виде $G = H \oplus K$, где $ad(H)K \subset K$. В этом случае форма связности $(\bar{\omega}_0, \underline{\omega}_0)$ может быть представлена в виде

$$(\bar{\omega}_0, \underline{\omega}_0) = (\alpha_1 + \theta_1, \alpha_2 + \theta_2), \alpha_i \in H, \theta_i \in K.$$

Будем говорить, что связность, нормализованная к подгруппе $H_0 = H \times H$, имеет тип H_0^φ , если ограничение формы нормализованной связности на $P_1(M, H_0^\varphi, p_1)$ (имеющее вид $(\bar{\alpha}_1 + \bar{\theta}_1, \underline{\alpha}_2 + \underline{\theta}_2)$) имеет составляющую $(\bar{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2) \in H_0$, определяющую инфинитезимальную составляющую в P_1 . Следовательно, это ограничение $(\bar{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2) \in H_0^\varphi$. В этом случае связность, определенную нормализующим подмногообразием $P_2(M, H_2, p_2)$, будем называть парой сопряженных нормализованных связностей.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В е д е р и к о в В. И., Обобщение метода нормализации А. П. Нордена на случай расслоенного пространства. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1963, 123, № 1, 3—23
2. —, Редуктивные связности Картана и их значение в теории нормализаций. Тезисы докладов второй Всесоюзной геометрической конференции, Харьков, 1964, 41—42
3. —, Сопряженные связности как нормализованная инфинитезимальная связность. Материалы второй Прибалтийской геометрической конференции, Тарту, 1965, 39—42

4. —, Симметрические пространства и сопряженные связности. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1965, 125, № 1, 7—59
 5. Личнерович А., Теория связностей в целом и группы голономии. Изд-во Ин. лит., 1960, 216 стр.
 6. Лумисте Ю. Г., К основаниям глобальной теории связностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, вып. 150, 69—108
 7. Норден А. П., Пространства аффинной связности. Гостехиздат, М.-Л., 1950
 8. Goetz A., On induced connections. Fundam. math., 1964, 55, № 2, 149—174
 9. Kobayashi S., Theory of connections. Ann. mat. pure ed appl., 1957, 43, 119—194
 10. —, Nomizu Katsumi, Foundations of differential geometry. Vol. 1, New York—London, Interscience, 1963, xi, 329 pp
 11. —, Lichnerowicz A., Géometrie des groupes de transformations. Paris, Dunod, 1958, IX, 193
-