С. В. Никитин, О логарифмических коэффициентах однолистных функций,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 42–49

[5], с. 23—28), то выписать многочлены $P_n^{\pm}(x)$ при произвольном α для любого n не представляется возможным.

Замечание 3. Знакопостоянные многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на системе из двух симметричных отрезков в пространстве $L_p (1 \leqslant p < \infty)$, изучались в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.— 184 с.
2. Бернштейн С. Н. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке // Соч.— Т. II. Конструктивная теория функций.— М.: Изд-во АН СССР, 1954.— 627 с.
3. Кузьмина А. Л. О неотрицательных многочленах, наименее уклоняющихся от нуля в $C[-1, 1]$ // Конструктивн. теория функций и функц. анализ.— Казань, 1987.— Вып. 6.— С. 83—91.
4. Ахиезер Н. И. Об асимптотических свойствах полиномов на двух интервалах // Изв. АН СССР. ОМЕН.— 1930.— С. 161—178.
5. Achyeser N. Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. Сер. 3.— 1928.— Т. 3.— Вып. 2.— С. 1—69.
6. Тырыгин И. Я. О знакопостоянных полиномах, наименее уклоняющихся от нуля на системе отрезков в пространствах L_p // Теория приближения и смежные вопросы анализа и топологии.— Киев, 1987.— С. 88—93.

г. Казань

Поступила 24.10.1988

С. В. Никитин

УДК 517.54

О ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Неравенство для логарифмической площади и некоторые следствия

Пусть S — класс регулярных и однолистных в единичном круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, нормированных разложением $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$ Если $f(z) \in S$, то обозначим

$$\log \frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k z^k \tag{1}$$

и будем называть числа $2\gamma_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ логарифмическими коэффициентами функции $f(z)$, а площадь образа круга $|z| \leqslant r$ при отображении функцией $\log(f(z)/z)$ — логарифмической площадью. Величина логарифмической площади $\sigma(r, \log(f(z)/z))$ может быть представлена в виде

$$\sigma\left(r, \log \frac{f(z)}{z}\right) = \iint\limits_{|z|<r} \left|\left(\log \frac{f(z)}{z}\right)'\right|^2 d\sigma = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^{2k}.$$

При любом $p > 0$ положим

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{p/2} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(p) z^k, \quad I_p(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta. \tag{1'}$$

Теорема 1 (Л. де Бранж [1]). *Для каждой функции $f(z) \in S$ и любой последовательности чисел $\{\sigma_k\}_1^{n+1}$, подчиненной условиям невозрастания и выпуклости:*

$$\begin{aligned} &1)\ \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n \geqslant \sigma_{n+1} = 0 \quad (n \geqslant 1), \\ &2)\ \sigma_k - \sigma_{k+1} \geqslant \sigma_{k+1} - \sigma_{k+2} \quad (k = \overline{1, n-1};\ n \geqslant 2), \end{aligned} \tag{2}$$

выполняется неравенство для логарифмических коэффициентов

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k k |\gamma_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{k}.$$

Знак равенства имеет место только для функций Кёбе $K(z) = z(1-z)^{-2}$.

В работе [2] И. М. Милин доказал следующее следствие из теоремы 1.

Следствие. *Для каждой функции* $f(z) \in S$ *при выполнении условий теоремы* 1 *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k k |\gamma_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{k} - (\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3)\left(1 - \left|\frac{c_2}{2}\right|^2\right), \quad n \geqslant 2; \tag{3}$$

знак равенства имеет место только для функций Кёбе.

Используя это следствие, можно усилить неравенство для логарифмической площади: $\sigma(r, \log(f(z)/z)) \leqslant \sigma(r, \log(K(z)/z))$, где $f(z) \in S$, $K(z)$ — функция Кёбе, известное как гипотеза И. Е. Базилевича и впервые доказанное в [3], а именно, справедлива

Теорема 2. *Для каждой функции* $f(z) \in S$ *при любом* $r \in (0, 1)$ *величина логарифмической площади удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^{2k} \leqslant \log \frac{1}{1-r^2} - r^2 (1-r^2)^2 \left(1 - \left|\frac{c_2}{2}\right|^2\right) \tag{4}$$

со знаком равенства для функций Кёбе.

Доказательство. Применим к функции $f(z)$ следствие, взяв в качестве последовательности $\{\sigma_k\}_1^{n+1}$, $\sigma_k = r^{2k} - r^{2n+2}$, $k = \overline{1, n+1}$, которая удовлетворяет условиям (2). Из (3) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} k |\gamma_k|^2 r^{2k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} r^{2k} + r^{2n+2} \sum_{k=1}^{n} \left(k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) - (\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3)\left(1 - \left|\frac{c_2}{2}\right|^2\right). \tag{5}$$

Так как $\sum_{k=1}^{n} \left(k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) < \delta$, где $\delta < 0{,}312$ [4] (теорема 3.1), то переходя в (5) к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что $\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3 = r^2(1-r^2)^2$, а $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} r^{2k} = \log \frac{1}{1-r^2}$, получаем (4). Проверкой убеждаемся, что для функции Кёбе в (4) имеет место знак равенства.

Следствие 1. *Для каждой функции* $f(z) \in S$ *при любом* $r \in (0, 1)$ *справедлива усиленная теорема искажения*

$$|f(z)| \leqslant \varkappa_1 \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \varkappa_1 = \exp\left[-r(1-r)^2\left(1 - \left|\frac{c_2}{2}\right|^2\right)\right] \leqslant 1, \tag{6}$$

со знаком равенства только для функций Кёбе.

Доказательство. Согласно (1′) при $p = 1$ и (1) имеем

$$\sqrt{f(z)/z} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(1) z^k = \exp\{\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k\}; \tag{7}$$

отсюда с помощью неравенства Коши получим

$$\frac{|f(z)|}{r} \leqslant \frac{1}{1-r} \sum_{k=0}^{\infty} |D_k(1)|^2 r^k, \quad z = re^{i\theta}. \tag{8}$$

Но для тождества (7) известно следующее неравенство Лебедева — Милина [5]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |D_k(1)|^2 r^k \leqslant \exp\{\sum_{k=1}^{\infty} k|\gamma_k|^2 r^k\}. \tag{9}$$

Поэтому (8) перепишется так:

$$\frac{|f(z)|}{r} \leqslant \frac{1}{1-r} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k|\gamma_k|^2 r^k\right\}.$$

Применив заключение теоремы 2, в котором r^2 заменено на r, получим

$$|f(z)| \leqslant \frac{r}{1-r} \exp\left[\log\frac{1}{1-r} - r(1-r)^2\left(1-\left|\frac{c_2}{2}\right|^2\right)\right];$$

отсюда и следует (6). Так как равенство в неравенстве Лебедева — Милина (9) достигается только для функций Кёбе, то и в (6) оно имеет место только для таких функций.

Следствие 2. *Для каждой функции $f(z) \in S$ при любом $r \in (0, 1)$ справедливо неравенство для среднеинтегрального модуля $I_1(r, f)$:*

$$I_1(r, f) \leqslant \varkappa_2 \frac{r}{1-r^2}, \quad \varkappa_2 = \exp\left[-r^2(1-r^2)^2\left(1-\left|\frac{c_2}{2}\right|^2\right)\right],$$

со знаком равенства только для функций Кёбе.

Доказательство. Из (1′) при $p=1$ имеем

$$I_1(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z)}{z}\right| d\theta = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1/2}\right|^2 d\theta, \quad z = re^{i\theta},$$

или

$$I_1(r, f) = r\sum_{k=0}^{\infty} |D_k(1)|^2 r^{2k}. \tag{10}$$

Ввиду неравенства Лебедева — Милина (9) и (10) получим

$$I_1(r, f) \leqslant r \exp\{\sum_{k=1}^{\infty} k|\gamma_k|^2 r^{2k}\};$$

отсюда и из теоремы 2 получаем утверждение следствия 2 со знаком равенства только для функций Кёбе.

§ 2. Оценка $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| r^k$ и $\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k| r^k$, $0 < r \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Из [6] имеем $|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k r^k| \leqslant \log\frac{1}{1-r}$. Далее, из неравенства Коши и неравенства из гипотезы Базилевича получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| r^k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} k|\gamma_k|^2 r^k \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k}\right)^{1/2} \leqslant \log\frac{1}{1-r},$$

где равенство достигается только для функций Кёбе.

Рассмотрим теперь оценку сверху конечной суммы $2\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k| r^k$, $r \in (0, 1]$.

Имеем

$$2\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k| r^k = 2\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}|\gamma_k| \frac{r_k}{\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} r^{2k}.$$

Применяя результат И. М. Милина ([4], теорема 3.1) к $\sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2$, в правой части последнего неравенства получим

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}r^{2k}+\delta, \tag{11}$$

где δ определено там же [4].

Цель данного параграфа — усиление неравенства (11). Точнее, будет усиливаться некоторая мажоранта для (11), что при $r=1$ даст усиление и для самой формулы (11).

По функции $f(\zeta)\in S$ построим $F(z)=1/f(\zeta)$, $z=1/\zeta\in B^0=\{z:|z|>1\}$, а затем при любом конечном w рассмотрим функцию $\log[z/(F(z)-w)]$ и ее разложение в ряд Тейлора около $z=\infty$. Пусть

$$\log\frac{z}{F(z)-w}=\sum_{k=1}^{\infty}q_k(w)z^{-k}, \tag{12}$$

где $q_k(w)\,(k=1,2,\ldots)$ — полиномы, связанные с полиномами Фабера $\mathrm{F}_k(w)$ согласно [4] (с. 14) соотношением

$$q_k(w)=\frac{1}{k}\,\mathrm{F}_k(w)\ (k=1,2,\ldots). \tag{13}$$

Если в (12) положить $w=0$ и полученное разложение сравнить с разложением (1), то будем иметь

$$2\gamma_k=q_k(0)\ (k=1,2,\ldots). \tag{14}$$

Так как функция $F(z)$ не обращается в нуль в B^0, то внутренность любой линии уровня $C_\rho=\{w:w=F(z),\ |z|=\rho\}$, $\rho>1$, содержит точку $w=0$, а тогда по принципу максимума модуля для субгармонической функции, учитывая (14), получим

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k=\sum_{k=1}^{n}|q_k(0)|r^k\leqslant\max_{w\in C_\rho}\sum_{k=1}^{n}|q_k(w)|r^k. \tag{15}$$

Но на линии уровня C_ρ $q_k(w)=q_k(F(z))$, $|z|=\rho$, а $q_k(F(z))$ связана с функцией $A_k(z)$ в силу (13) и [4] (с. 15) равенством

$$q_k(F(z))=(1/k)z^k+A_k(z)\ (k=1,2,\ldots). \tag{16}$$

Подставив (16) в правую часть (15) и воспользовавшись неравенством треугольника и неравенством Коши, получим

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k\leqslant\max_{|z|=\rho}\left(\sum_{k=1}^{n}k|A_k(z)|^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}r^{2k}\right)^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(\rho r)^k.$$

Отсюда, учитывая оценку $\sum_{k=1}^{n}k|A_k(z)|^2\leqslant\log\frac{1}{1-\rho^{-2}}$, $|z|=\rho$ ([4], с. 29), найдем

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}r^{2k}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-\rho^{-2}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(\rho r)^k. \tag{$*$}$$

Принимая во внимание, что $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(\rho r)^k\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\rho^{2k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}r^{2k}$, приходим к неравенству

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}r^{2k} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-\rho^{-2}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\rho^{2k}.$$

При этом минимум по ρ достигается при $\rho^2 = \exp[2x/(2n+1)]$ и $x = \log 2$, т. е. $\rho^{2n+1} = 2$, и равен $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \delta$, т. е.

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}r^{2k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \delta,$$

что совпадает с (11). Поэтому применим к (*) более тонкие оценки.

1. *Оценка* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\rho^{2k}$, $1 \leqslant \rho < \infty$. Имеем

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(\rho^{2k}-1) = \sum_{k=1}^{n}\int_1^{\rho^2} t^{k-1}\,dt = \int_1^{\rho^2}\frac{1-t^n}{1-t}\,dt.$$

Положим $\rho^2 = e^{2x/(2n+1)}$, $0 \leqslant x < \infty$, и сделаем в последнем интеграле замену переменной $t = \exp[2\tau/(2n+1)]$. Тогда получим

$$S_n^{(1)} = \int_0^{\rho^2}\frac{t^{n+1/2}-t^{1/2}}{t^{1/2}-t^{-1/2}}\,\frac{\partial t}{t} = \frac{2}{2n+1}\int_0^{x}\frac{e^{\tau}-e^{\tau/(2n+1)}}{e^{\tau/(2n+1)}-e^{-\tau/(2n+1)}}\,d\tau. \tag{17}$$

Но для любого $0 \leqslant u < \infty$ имеем

$$2u \leqslant e^u - e^{-u} \leqslant 2u\,\frac{e^u+e^{-u}}{2} \leqslant 2ue^u, \tag{18}$$

что доказывается сравнением коэффициентов при одинаковых степенях разложений данных функций в ряд Тейлора. Используя (18), находим

$$\int_0^x \frac{2(e^{\tau}-e^{\tau/(2n+1)})}{e^{\tau/(2n+1)}+e^{-\tau/(2n+1)}}\,\frac{d\tau}{\tau} \leqslant S_n^{(1)} \leqslant \int_0^x \frac{e^{\tau}-e^{\tau/(2n+1)}}{\tau}\,d\tau. \tag{19}$$

Учитывая неравенство $e^x - 1 \geqslant x$, из (19) получаем

$$S_n^{(1)} \leqslant \int_0^x \frac{e^{\tau}-1}{\tau}\,d\tau - \int_0^x \frac{e^{\tau/(2n+1)}-1}{\tau}\,d\tau \leqslant \int_0^x \frac{e^{\tau}-1}{\tau}\,d\tau - \frac{x}{2n+1}, \tag{20}$$

$$S_n^{(1)} \geqslant \int_0^x \frac{e^{\tau}e^{-\tau/(2n+1)}-1}{\tau}\,d\tau \geqslant \int_0^x \frac{e^{\tau}-1}{\tau}\,d\tau - \frac{e^x-1}{2n+1}. \tag{21}$$

Если ввести обозначение

$$e(x) = \int_0^x \frac{e^{\tau}-1}{\tau}\,d\tau, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

то из (20) и (21) получим

$$-\frac{e^x-1}{2n+1} \leqslant S_n^{(1)} - e(x) \leqslant -\frac{x}{2n+1}.$$

2. *Оценка* $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}r^{2k}$, $0 < r \leqslant 1$. Имеем

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(r^{2k}-1) = -\sum_{k=1}^{n}\int_{\rho^2}^{1} t^{k-1}\,dt = -\int_{r^2}^{1}\frac{1-t^n}{1-t}\,dt.$$

Положим $r^2 = e^{-2x/(2n+1)}$, $0 \leqslant x < \infty$, и сделаем замену переменной в последнем интеграле $t = \exp[-2\tau/(2n+1)]$. Тогда

$$S_n^{(2)} = -\frac{2}{2n+1}\int_0^x \frac{e^{-\tau/(2n+1)} - e^{-\tau}}{e^{\tau/(2n+1)} - e^{-\tau/(2n+1)}}\,d\tau.$$

Используя (18), получим

$$-\int_0^x \frac{e^{-\tau/(2n+1)} - e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau \leqslant S_n^{(2)} \leqslant -\int_0^x \frac{2\left(e^{-\tau/(2n+1)} - e^{-\tau}\right)}{\tau\left(e^{\tau/(2n+1)} + e^{-\tau/(2n+1)}\right)}\,d\tau. \tag{22}$$

Преобразовав левое неравенство из (22) с использованием неравенства $1 - e^{-\tau/(2n+1)} \geqslant \frac{\tau}{2n+1}e^{-\tau/(4n+2)}$, которое следует из (18), находим

$$S_n^{(2)} \geqslant -\int_0^x \frac{1-e^{\tau}}{\tau}\,d\tau + 2\left[1 - e^{-x/(2(2n+1))}\right], \tag{23}$$

$$S_n^{(2)} \leqslant -\int_0^x \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau + \frac{2x-(1-e^{-x})}{2n+1}. \tag{24}$$

Заметив, что $-\int\limits_0^x \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau = e(-x)$, из (23) и (24) получаем

$$2\left[1 - e^{-x/(2(2n+1))}\right] \leqslant S_n^{(2)} - e(-x) \leqslant \frac{2x-(1-e^{-x})}{2n+1}. \tag{25}$$

3. *Оценка* $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(\rho r)^k$. Имеем

$$S_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left[(\rho r)^k - 1\right] = \begin{cases} \int\limits_1^{\rho r}\frac{1-t^n}{1-t}\,dt, & \rho r \geqslant 1; \\ \int\limits_{\rho r}^{1}\frac{1-t^n}{1-t}\,dt, & \rho r \leqslant 1. \end{cases}$$

Пусть $\rho^2 = e^{2x/(2n+1)}$, $r^2 = e^{-2y/(2n+1)}$, $\rho r = e^{(x-y)/(2n+1)}$. Воспользовавшись результатами пп. 1 и 2, получим

$$-\frac{e^{(x-y)/2}-1}{2n+1} \leqslant S_n^{(3)} - e\left(\frac{x-y}{2}\right) \leqslant -\frac{x-y}{2(2n+1)}, \quad \rho r \geqslant 1\ (x \geqslant y), \tag{26}$$

$$2\left[1 - e^{-(\quad x)/(4(2n+1))}\right] \leqslant S_n^{(3)} - e\left(-\frac{y-x}{2}\right) \leqslant \frac{y-x-(1-e^{-(y-x)/2})}{2n+1}, \quad \rho r \leqslant 1\ (x \leqslant y). \tag{27}$$

4. *Оценка* $\log\frac{1}{1-\rho^{-2}}$. Положив $\rho^2=\exp[2x/(2n+1)]$, $0<x<\infty$, будем иметь

$$\log\frac{1}{1-\rho^{-2}}=\frac{x}{2n+1}+\log(e^{x/(2n+1)}-e^{-x/(2n+1)})^{-1}.$$

Используя (18), получим отсюда

$$\log\frac{1}{1-\rho^{-2}}\leqslant\frac{x}{2n+1}+\log\frac{1}{x}+\log\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Так как $\log\left(n+\frac{1}{2}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-C$, где C — постоянная Эйлера, то окончательно

$$\log\frac{1}{1-\rho^{-2}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\log\frac{1}{x}-C+\frac{x}{2n+1}. \tag{28}$$

Вернемся теперь к оценке $\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k$. В обозначениях п. 3 в силу (28), (25) — (27) имеем:

a) $\log\frac{1}{1-\rho^{-2}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\log\frac{1}{x}-C+\frac{x}{2n+1}$;

b) $S_n^{(2)}-e(-y)\leqslant 2y/(2n+1)$;

c) $S_n^{(3)}-e\left(\frac{x-y}{2}\right)\leqslant\begin{cases}-(x-y)/(2(2n+1)), & x\geqslant y;\\ (y-x)/(2n+1), & x\leqslant y.\end{cases}$

Теперь, используя утверждения a) — c), получаем для (11) и $(*)$ соответственно мажоранты

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+e(-y)+\delta+\frac{2y}{2n+1}, \tag{11'}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|r^k\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}e(-y)+e\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{1}{2}\log\frac{1}{x}-\frac{1}{2}C+\frac{2y}{2n+1}. \tag{$*'$}$$

Оценка $(*')$ представляет собой однопараметрическое семейство неравенств. При надлежащем выборе параметра x неравенство $(*')$ сильнее неравенства $(11')$ при каждом $0\leqslant y<\infty$. Действительно, т. к. функция $e(t)$ выпукла: $e''(t)=(1-(1-t)e')/t^2\geqslant 0$ при $t\in(-\infty,\infty)$, то $e((x-y)/2)\leqslant\leqslant\frac{1}{2}[e(x)+e(-y)]$. Поэтому, обозначая правые части неравенств $(*')$ и $(11')$ соответственно через $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi(x)$, имеем

$$\varphi_1(x, y)\leqslant\varphi(y)+\frac{1}{2}\left[e(x)+\log\frac{1}{x}-C\right]-\delta. \tag{29}$$

Остается заметить, что наименьшее значение выражения в квадратных скобках в (29) достигается при $x=\log 2$ и равно 2δ по определению этой постоянной в [4].

Найдем теперь минимум по x правой части неравенства $(*')$ при любом фиксированном $y\in[0,\infty)$. Положим

$$\psi(x, y)=e((x-y)/2)+\frac{1}{2}\log\frac{1}{x}.$$

Так как $\psi(x, y)$ — строго выпуклая функция от x при $x\in(0,\infty)$, $\psi(0, y)=\psi(\infty, y)=\infty$, то $\psi(x, y)$ как функция от x достигает минимума при

$x = x^* \in (0, \infty)$, где $x^* = x^*(y)$ — единственное решение уравнения $1/x^* = (e^{(x^*-y)/2} - 1)/((x^*-y)/2)$.

Итак, мы пришли к окончательному неравенству

$$2\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k| r^k \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} e(-y) + e\left(\frac{x^*-y}{2}\right) + \frac{1}{2}\log\frac{1}{x^*} - \frac{1}{2} C + \frac{2y}{2n+1}, \quad (**)$$

где $y = -(2n+1)\log r$, $x^* = x^*(y)$.

Из предыдущего вытекает, что неравенство $(**)$ усиливает неравенство (11′) при всех $r \in (0, 1]$. Действительно, обозначая правую часть неравенства $(**)$ через $\varphi_1(y)$, на основании (29) имеем

$$\varphi_1(y) = \min_x \varphi_1(x, y) \leqslant \min_x \left\{\varphi(y) + \frac{1}{2}\left[e(x) + \log\frac{1}{x} - C\right] - \delta\right\} = \varphi(y).$$

При $y = 0$, т. е. при $r = 1$ и $x^* = \log(9/4)$, неравенство $(**)$ усиливает и неравенство (11): при $r = 1$ неравенство $(**)$ дает оценку

$$2\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k| \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + e\left(\log\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\log\frac{9}{4}\right)^{-1} - \frac{1}{2} C = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \delta_0,$$

где $\delta_0 \approx 0{,}2668$, а неравенство (11) — более грубую оценку

$$2\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k| \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \delta,$$

где $\delta < 0{,}312$.

В заключение отметим, что из $(**)$ нельзя получить предельным переходом при $n \to \infty$ точную оценку для $\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k| r^k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Branges L. de. A proof of the Bieberbach conjecture // Препринт №E 5. ЛОМИ АН СССР.— 1984.— 21 с.
2. Милин И. М. Оценка интегральных средних однолистных функций // Тез. сообщ. Всесоюзн. конф. по геометрич. теории функций.— Новосибирск, 1988.— С. 70.
3. Milin I. M., Grinshpan A. Z. Logarithmic coefficients means of univalent functions // Complex Variables.— 1986.— V. 7.— P. 139—147.
4. Милин И. М. Однолистные функции и ортонормированные системы.— М.: Наука, 1971.— 256 с.
5. Лебедев Н. А., Милин И. М. Об одном неравенстве // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астр.— 1965, вып. 19.— С. 157—158.
6. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.— 628 с.

г. Ставрополь

Поступили
первый вариант 13.12.1988
окончательный вариант 09.04.1990

А. Э. Пасенчук

УДК 517.968

ОБРАТИМОСТЬ АБСТРАКТНЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ В СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Пусть H — гильбертово пространство, $B(H)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H. Через Γ будем обозначать единичную окружность $\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$, а через $Z_\pm$ — следующие подмножества группы целых чисел Z: $Z_\pm = \{i \in Z : i \gtrless 0\}$.