Д. В. Якубович, Линейно-подобные модели операторов Теплица, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 157, 113–123

Д.В.Якубович

ЛИНЕЙНО-ПОДОБНЫЕ МОДЕЛИ ОПЕРАТОРА ТЁПЛИЦА

В работе устанавливается, что операторы Тёплица T_F, символ которых мероморфен и имеет неотрицательное вращение на границе $\partial\Omega$ их области определения вокруг любой точки $\lambda\in\mathbb{C}\setminus F(\partial\Omega)$ и которые действуют в банаховых пространствах $B(\Omega)$ аналитических функций, линейно подобны операторам умножения $f\to\nu\cdot f$ на проекцию ν специально подобранной римановой поверхности $\sigma_*=\sigma_*(T_F)$. (Точные условия на символ F и пространства $B(\Omega)$ см.ниже.)

I. Введение. За последние несколько лет появилось довольно много работ ([I - 4] и др.), в которых строятся линейно-подобные модели операторов Тёплица T_F при различных предположениях о геометрической и аналитической природе символа F. В случае, когда индекс каждой точки $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\gamma$ относительно (непрерывной) кривой $\gamma: t\to F(e^{it})$, $0\le t\le 2\pi$, неотрицателен, этим результатам можно придать следующую общую форму: оператор T_F в пространстве Харди H^2 подобен оператору умножения на z в некотором пространстве вектор-функций.

Ниже операторы Тёплица рассматриваются не только в пространстве H^2, но в достаточно обширном классе банаховых пространств $B(\Omega)$ аналитических функций в односвязных ограниченных областях Ω с кусочно-гладкой границей, содержащем многие из часто используемых пространств (см.ниже п.2).

Для функций F, мероморфных в окрестности множества $\bar\Omega$, будет определен (ограниченный) оператор T_F в $B(\Omega)$ (по поводу операторов Тёплица в H^2 и других пространствах см., например, [5 - 7]). Предположим, что индекс $\eta(\lambda)$ кривой $\gamma=F(\partial\Omega)$, соответствующей положительному обходу кривой $\partial\Omega$, относительно каждой точки $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\gamma$, неотрицателен. Основной результат статьи состоит в том, что при этих условиях оператор T_F линейно подобен оператору умножения $f\to\nu\cdot f$ на проекцию ν специально подобранной римановой поверхности $\sigma_*=\sigma_*(T_F)$ (называемой ультраспектром оператора T_F). Оператор умножения на ν будет действовать в конструктивно определяемом банаховом пространстве $B_F(\sigma_*)$ аналитических на σ_* функций.

2. Описание класса пространств $B(\Omega)$. Пусть $\mathfrak{M}$ - совокупность всех ограниченных (но необязательно односвязных) открытых областей в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкими границами. Пучком банаховых

пространств назовем совокупность пространств $B = \{B(G)\}_{G\in\mathfrak{N}}$, удовлетворяющую (для всех $G, G_1, G_2 \in \mathfrak{N}$) условиям:

I) $B(G)$ – банахово пространство аналитических в G функций, причем $A(\overline{G}) \subset B(G) \subset \mathcal{H}(G)$; здесь $\mathcal{H}(G)$ – пространство всех функций, аналитических в G , с топологией сходимости на компактах, и $A(\overline{G})$ – множество функций из $\mathcal{H}(G)$, аналитически продолжимых в окрестность $\overline{G}$;

2) $x \in B(G)$, $a \in A(\overline{G}) \Longrightarrow x \cdot a \in B(G)$;

3) $G_1 \subset G$, $x \in B(G) \Longrightarrow x|G_1 \in B(G_1)$;

4) $G = G_1 \cup G_2$, $x \in \mathcal{H}(G)$, $x|G_i \in B(G_i) \Longrightarrow x \in B(G)$;

5) инвариантность относительно гладких замен переменных: если $G \in \mathfrak{N}$, φ – конформное отображение, заданное в окрестности $\overline{G}$ и $x \in B(G)$, то $x \circ \varphi^{-1} \in B(\varphi(G))$.

Предполагается для единообразия формулировок, что функции $x \in B(G)$, $G \in \mathfrak{N}$, определены на открытом множестве G независимо от их непрерывной продолжимости на $\overline{G}$.

В качестве примеров таких пучков B укажем на пространства следующих типов:

I) пространства Харди-Смирнова $E^p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;

2) аналитические пространства $Lip_\alpha(G)$, $0 < \alpha < \infty$;

3) пространства Бергмана функций, суммируемых с p-той степенью по площади в G ;

4) класс Блоха аналитических в G функций f таких, что

$$\sup_z |f'(z)| \cdot dist(z, \partial G) < \infty;$$

5) пространство аналитических в G функций с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_G |f(z)|^p \cdot w(dist(z, \partial G))\, dx\, dy \right)^{1/p}$$

при условии, что $w: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ возрастает, $w(2x) \leqslant Cw(x)$ для некоторой постоянной C и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для примеров 4 и 5, однако, в свойстве 4) пучков необходимо требовать, чтобы границы ∂G_1 и ∂G_2 пересекались под ненулевыми углами. Это приводит к тому, что при формулировке следствия основной теоремы необходимо включить требование, чтобы углы самопересечения кривой были ненулевыми.

3. Определение операторов T_F . Зафиксируем пучок B . Выберем связное множество $\Omega \in \mathfrak{N}$ такое, что его граница является простой замкнутой кривой и такое, что $0 \in \Omega$.

Пусть V - окрестность $\partial\Omega$ и пусть функция F аналитична в $V \cap \Omega$. Определим оператор Тёплица в пространстве $\mathcal{H}(\Omega)$ по правилу

$$(T_F x)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \frac{F(\zeta)\, x(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad x \in \mathcal{H}(\Omega), \quad z \in \Omega .$$

Здесь положительно ориентированный контур $\Gamma_z \subset V \cap \Omega$ выбирается так, чтобы он был гомотопен $\partial\Omega$ в $V \setminus \{z\}$. Контурный интеграл не зависит от выбора Γ_z и определяет голоморфную в Ω функцию.

Проверим, что если F аналитична в V, то $T_F \in \mathcal{L}(B(\Omega))$ (Здесь $\mathcal{L}(B(\Omega))$ - алгебра линейных непрерывных операторов в $B(\Omega)$).

Заметим сначала, что если $x \in B(\Omega)$, $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ и $a \in H^\infty(\Omega')$, то

$$T_a x = a \cdot x \qquad \text{и} \quad \| T_a \| \leqslant C \|a\|_{H^\infty(\Omega')} ,$$

где $C = C(\Omega')$.

ЛЕММА I. Отображение $\zeta \to T_{(z-\zeta)^{-1}}$ - непрерывное отображение из Ω в $\mathcal{L}(B(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0 \in \Omega$ и пусть $\varepsilon > 0$ - такое число, что

$$\mathcal{D}(z_0, \varepsilon) \stackrel{def}{=\!=} \{ z : |z - z_0| \leqslant \varepsilon \} \subset \Omega .$$

Положим $G_1 = \Omega \setminus \mathcal{D}(z_0, \varepsilon/2)$ и $G_2 = \operatorname{int} \mathcal{D}(z_0, \varepsilon)$. Из теоремы о замкнутом графике и условий I и 3 следует, что

$$\| x | G_1 \|_{B(G_1)} + \| x | G_2 \|_{H^\infty(G_2)} \leqslant C \| x \|_{B(\Omega)} \quad \forall x \in B(\Omega) .$$

Далее, рассмотрим в пространстве $B(G_1) \oplus H^\infty(G_2)$ замкнутое подпространство тех пар функций (y_1, y_2), для которых $y_1(z) = y_2(z)$ $\forall z \in G_1 \cap G_2$. По условиям 3 и 4, оно совпадает с множеством пар функций вида $(x | G_1, x | G_2)$, $x \in B(G)$. По теореме об эквивалентных нормах, норма

$$\| x | G_1 \|_{B(G_1)} + \| x | G_2 \|_{H^\infty(G_2)}$$

в этом пространстве эквивалентна норме $\| x \|_{B(\Omega)}$. Пусть $\zeta \in \mathcal{D}(z_0, \varepsilon/2)$. Тогда соотношение $T_{(z-\zeta)^{-1}} \in \mathcal{L}(B(\Omega))$ и непрерывность отображения $\zeta \to T_{(z-\zeta)^{-1}}$ очевидна, т.к.

$$T_{(z-\zeta)^{-1}} x = (x(z) - x(\zeta))(z-\zeta)^{-1} . \;\bullet$$

ЛЕММА 2. Если V – окрестность $\partial\Omega$ и $F \in \mathcal{H}(V)$, то $T_F \in \mathcal{L}(B(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ_1 и Γ_2 – контуры, гомотопные $\partial\Omega$ в V и лежащие соответственно в $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ и в Ω. Тогда $F = F_1 - F_2$ в окрестности $\partial\Omega$, где F_i – интегралы типа Коши от F по контурам Γ_i. Очевидно, $F_1 \in A(\bar{\Omega})$ и $F_2 \in A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$. Соотношение $T_{F_1} \in \mathcal{L}(B(\Omega))$ доказано раньше; соотношение $T_{F_2} \in \mathcal{L}(B(\Omega))$ следует из легко проверяемой формулы

$$T_{F_2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F_2(\zeta) T_{(z-\zeta)^{-1}} \, d\zeta .$$

Существование интеграла следует из леммы I. Здесь Γ – контур между Γ_2 и $\partial\Omega$. ●

ЛЕММА 3. Если V – окрестность $\partial\Omega$ и $F \in \mathcal{H}(V)$, то $\sigma(T_F) = clos\{\lambda : \eta(\lambda) \neq 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что $T_F T_G x = T_{F \cdot G} x$, если $x \in \mathcal{H}(\Omega)$ и если $F \in A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ или $G \in \mathcal{H}(\Omega)$. Достаточно установить, что если $0 \notin \gamma$, то оператор T_F – обратим тогда и только тогда, когда $\eta(0) = 0$. Функция $\log(z^{-\eta(0)} F)$ в окрестности $\partial\Omega$ аналитична и однозначна, следовательно возможно разложение

$$\log(z^{-\eta(0)} F) = F_1 + F_2, \quad F = e^{F_1} \cdot e^{F_2} \cdot z^{\eta(0)} ,$$

где $F_1 \in A(\bar{\Omega})$, $F_2 \in A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$. Поэтому

$$T_F = T_{e^{F_2}} T_{e^{F_1}} T_{z^{\eta(0)}} \qquad \text{при } \eta(0) \geq 0$$

и

$$T_F = T_{z^{\eta(0)}} T_{e^{F_2}} T_{e^{F_1}} \qquad \text{при } \eta(0) < 0 .$$

Нужное утверждение теперь следует из соотношений

$$(T_{e^{F_i}})^{-1} = T_{e^{-F_i}} \in \mathcal{L}(B(\Omega)) ; \quad T_{z^{\eta(0)}} \mathbb{1} = 0 \quad \text{при } \eta(0) < 0$$

и

$$(T_{z^{\eta(0)}} x)(0) = 0 \quad \forall x \in B(\Omega) \quad \text{при } \eta(0) > 0$$

(здесь $\mathbb{1} \in B(\Omega)$ – единичная функция). ●

4. <u>Условия на символ F</u>.

(i) F мероморфна в окрестности $\bar{\Omega}$ и не имеет полюсов на $\partial\Omega$;

(ii) Кривая $\gamma = F|\partial\Omega$ имеет неотрицательное вращение относительно любой точки $\lambda \in \mathbb{C} \setminus F(\partial\Omega)$;

(iii) $F(\Xi) \cap \gamma = \emptyset$ и $F(0) \notin F(\Xi) \cup \gamma$, где

$$\Xi = \{ z \in \overline{\Omega} : F'(z) = 0 \} ;$$

(iv) кривая γ имеет конечное число точек самопересечения и не имеет "дуг самоналожения";

(v) все ее точки самопересечения двойные и трансверсальные. Последнее означает, что если λ - точка самопересечения кривой γ , то имеются лишь две точки $z_1, z_2 \in \partial\Omega$ такие, что $F(z_i) = \lambda$ и для любых окрестностей V_1 и V_2 точек z_1 и z_2 функция $\eta \circ F$ непостоянна в областях $V_i \cap \Omega, V_i \setminus \overline{\Omega}$ $(i = 1, 2)$. Условия (iii) - (v) выполнены для кривых общего положения.

5. Определение ультраспектра σ_* . Пусть число K на единицу больше числа полюсов функции F в Ω . Точкой поверхности $\overline{\sigma}_*^{\circ}$ назовем K - элементное множество δ ,

$$\delta = \{ d_1, \ldots, d_K \} \subset \overline{\Omega} \setminus F^{-1}(F(\Xi)),$$

такое, что $F(d_1) = F(d_2) = \ldots = F(d_K) \overset{def}{=\!=} \nu(\delta)$. Метрика $\rho(\delta, \delta') = \min_{\tau} \sum_i | d_i - d'_{\tau(i)} |$, где τ пробегает перестановки множества $\{1, 2, \ldots, K\}$, превращает множество $\overline{\sigma}_*^{\circ}$ в топологическое пространство. Совокупность карт $\nu | V$, где $V \subset \overline{\sigma}_*^{\circ}$ - открыто и $\nu | V$ - инъективна, задают риманову структуру на поверхности $\overline{\sigma}_*^{\circ}$.

Из принципа аргумента следует, что

$$\nu(\overline{\sigma}_*^{\circ}) = \operatorname{clos}\{ \lambda \in \mathbb{C} : \eta(\lambda) > 0 \} \setminus F(\Xi) = \sigma(T_F) \setminus F(\Xi) .$$

Нетрудно увидеть, что добавлением конечного числа точек поверхность $\overline{\sigma}_*^{\circ}$ превращается в компактную риманову поверхность $\overline{\sigma}_*$ с краем. Именно, пусть множество $\sigma(T_F) \cap F(\Xi)$ состоит из точек ζ_i и пусть $V_i = \mathcal{D}(\zeta_i, \varepsilon)$ - окрестности этих точек такие, что $V_i \cap (F(\Xi) \cup \gamma) = \{ \zeta_i \}$. Тогда множества $\nu^{-1}(V_i)$ разбиваются на компоненты связности W_{ij} , которые n_{ij} - листно проектируются на $V_i \setminus \{ \zeta_i \}$ (при некоторых $n_{ij} \in \mathbb{N}$). Поверхность $\overline{\sigma}_*$ получается добавлением в каждое множество W_{ij} по точке δ_{ij} . Положим

$$\nu(\delta_{ij}) = \zeta_i \quad \text{и} \quad \varphi_{ij}(\delta) = (\nu(\delta) - \zeta_i)^{1/n_{ij}} ;$$

тогда функции $\varphi_{ij} | (W_{ij} \cup \{ \delta_{ij} \})$ будут локальными картами в окрестности точек δ_{ij} .

Краем поверхности $\overline{\sigma}_*$ является множество $\partial\overline{\sigma}_* = \{ \delta \in \overline{\sigma}_*^{\circ} :$

$\delta\cap\partial\Omega\neq\varnothing\}$; риманову поверхность $\sigma_*=\overline{\sigma}_*\setminus\partial\sigma_*$ назовем ультраспектром оператора T_F . Введем также поверхность $\sigma_*^\circ=\overline{\sigma}_*^\circ\setminus\partial\sigma_*$. Заметим, что $\nu(\sigma_*)=\operatorname{int}\sigma(T_F)$.

Каждой точке δ_{ij} соответствует неупорядоченный набор $\alpha(\delta_{ij})=(d_1,\dots,d_k)\subset\Omega$, который можно получить из наборов $\delta\in\overline{\sigma}_*^\circ$ предельным переходом вдоль непрерывной кривой на σ_* с концом в δ_{ij} . Наборы $\alpha(\delta_{ij})$ могут содержать повторяющиеся числа и не обязательно различны при разных j . Скажем, пусть $K=2$, $\zeta_1=F(z_1)$ и $F(z)=G(z)^4$ в окрестности z_1 , причем G - однолистна и $G(z_1)=0$. Тогда среди компонент связности W_{1j} имеются, в частности, множества

$$W_{11}=\{(d_1,d_2):G(d_1)=-G(d_2)\neq 0\}$$

и

$$W_{12}=\{(d_1,d_2):G(d_1)=\pm iG(d_2)\neq 0\};$$

при этом $n_{11}=2$, $n_{12}=4$ и $\alpha(\delta_{11})=\alpha(\delta_{12})=(0,0)$.

6. <u>Определение банахова пространства $B_F(\sigma_*)$</u> . Выберем открытые области $G_0,G_1,\dots,G_n\subset\sigma_*$ с кусочно-гладкой границей такие, что $\bigcup\limits_0^n G_i=\sigma_*$, $\operatorname{clos}(\nu(G_j))\cap F(\Xi)=\varnothing$, $\nu\,|\,G_j$ инъективна при $j\geq 1$ и замыкание G_0 в $\overline{\sigma}_*$ содержится в σ_* . Пусть $\mathcal{H}(\sigma_*)$ - пространство аналитических на ультраспектре σ_* функций. Введем пространство

$$B(\sigma_*)=\Big\{u\in\mathcal{H}(\sigma_*):\|u\|_{B(\sigma_*)}\overset{def}{=\!=}\|u\,|\,G_0\|_{H^\infty(G_0)}+ \\ +\sum_{i=1}^{n}\|u\cdot(\nu\,|\,G_i)^{-1}\|_{B(\nu(G_i))}<\infty\Big\}.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве леммы I, показывают, что пространство $B(\sigma_*)$ банахово и (с точностью до замены нормы на эквивалентную) не зависит от выбора областей G_i . Пусть $B_F(\sigma_*)$ - подпространство в $B(\sigma_*)$, состоящее из функций, удовлетворяющих соотношениям

$$(d_3-d_2)u(d_2,d_3,d_4,\dots,d_{k+1})+(d_2-d_1)u(d_1,d_2,d_4,\dots,d_{k+1})+ \\ +(d_1-d_3)u(d_1,d_3,d_4,\dots,d_{k+1})=0 \qquad \text{(I)}$$

для любых $d_1,\dots,d_{k+1}\in\Omega\setminus F^{-1}(F(\Xi))$ таких, что $F(d_1)=F(d_2)=\dots=F(d_{k+1})$. Эти соотношения связывают значения функции u на слоях $\nu^{-1}(\lambda)$, $\lambda\in\operatorname{int}\sigma(T_F)$. В пространстве B_F действует оператор умножения M_ν по правилу

$$(M_\nu u)(\delta) = \nu(\delta)u(\delta).$$

7. <u>Собственные векторы оператора T_F^*.</u> Положим $\Omega^T = \mathbb{C}\setminus\{z: \bar z^{-1}\in\Omega\}$. Сопоставим каждой функции $\varphi\in A(\bar\Omega^T)$ линейный функционал $\tilde\varphi\in B(\Omega)^*$ о формуле $\langle x,\tilde\varphi\rangle \overset{def}{=\!=} \int_\Gamma \varphi(\zeta)x(\zeta^{-1})\frac{d\zeta}{\zeta}$, где $\Gamma\subset\mathbb{C}\setminus\Omega^T$ - контур, гомотопный $\partial\Omega^T$ на множестве задания функции и $x\in B(\Omega)$. Если $A(\bar\Omega)$ плотно в пространстве $B(\Omega)$, то пространство $B(\Omega)^*$ можно отождествить с некоторым пространством аналитических функций в Ω^T, положив $\psi(\zeta) = \langle(1-\zeta z)^{-1},\psi\rangle$ для $\psi\in B(\Omega)^*$. Это определение согласовано с предыдущим в том смысле, что $\varphi(\zeta) = \tilde\varphi(\zeta)$ для функций $\varphi\in A(\bar\Omega)$; при этом если функция F аналитична в окрестности $\partial\Omega$, то $T_F^* = T_{F^T}$, где $F^T(\zeta) = F(\zeta^{-1})$. Однако плотность $A(\bar\Omega)$ в $B(\Omega)$, вообще говоря, не предполагается.

Пусть $\beta_1,\dots,\beta_{k-1}$ - полюсы функции F в Ω и $\delta\in\sigma_*$. Пусть

$$(d_1,\dots,d_k) = \begin{cases} \delta, & \text{если } \delta\in\sigma_*^\circ \\ \alpha(\delta), & \text{если } \delta\in\sigma_*\setminus\sigma_*^\circ. \end{cases}$$

Положим

$$h_\delta(\zeta) = \prod_{s=1}^{k-1}(1-\beta_s\zeta)\prod_{s=1}^{k}(1-d_s\zeta)^{-1}\in A(\bar\Omega^T).$$

ЛЕММА 4. $T_F^* h_\delta = \nu(\delta)h_\delta$ для всех $\delta\in\sigma_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается простым вычислением. ●

ТЕОРЕМА. Предположим, что задан пучок B банаховых пространств, Ω - область с кусочно-гладкой границей, являющейся простой замкнутой кривой, и $0\in\Omega$. Пусть функция F удовлетворяет условиям (i) - (v). Тогда формула

$$(\mathcal{U}x)(\delta) = \langle x, h_\delta\rangle, \quad x\in B(\Omega),$$

задает линейный изоморфизм пространства $B(\Omega)$ на $B_F(\sigma_*)$ такой, что $\mathcal{U}T_F\mathcal{U}^{-1} = M_\nu$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Заметим сначала, что $\mathcal{U} = VT_m$, где $m(z) = \prod_{s=1}^{k-1}(1-\beta_s z^{-1})$ и V определяется формулой

$$(Vx)(\delta) = \langle x, (\prod_{s=1}^{k}(1-d_s\zeta)^{-1})^\sim\rangle = \sum_{s=1}^{k} c_s(\delta)x(d_s), \tag{2}$$

$$c_s(\delta) = d_s^{k-1} \prod_{j \neq s} (d_s - d_j)^{-1}, \quad \delta = (d_1, \dots, d_k) \in \sigma_*^\circ .$$

Равенство $\mathcal{U} T_{\mathbb{F}} = M_\nu \mathcal{U}$ следует из леммы 4. Так как оператор T_m обратим в $B(\Omega)$ (и $T_m^{-1} = T_{m^{-1}}$), то достаточно доказать, что оператор V - линейный изоморфизм пространств $B(\Omega)$ и $B_{\mathbb{F}}(\sigma_*)$.

Формулами (2) оператор V определен на пространстве $\mathcal{H}(\Omega)$. Непосредственное вычисление показывает, что соотношения (I) выполнены для всякой функции $u \in V\mathcal{H}(\Omega)$.

ЛЕММА 5. Пусть $x \in \mathcal{H}(\Omega)$. Тогда $x \in B(\Omega) \Longleftrightarrow Vx \in B(\sigma_*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая импликация следует из формул (2), определения пространства $B(\sigma_*)$ и требований, которым подчинен пучок B. Для доказательства обратной импликации следует выбрать специальным образом области $K_1, \dots, K_n \subset \Omega$ такие, что $K_1 \cup \dots \cup K_n \cup \cup\, \partial\Omega$ есть (достаточно узкая) окрестность множества $\partial\Omega$ в $\bar{\Omega}$, и функции $\delta_i : K_i \to \sigma_*^\circ$, $\delta_i(z) = (z, d_2^{(i)}(z), \dots, d_k^{(i)}(z))$ такие, что $\nu \circ \delta_i = \mathbb{F}$ и $\operatorname{clos} d_j^{(i)}(K_i) \subset \Omega$ $(1 \le i \le n,\ 2 \le j \le k)$. Если $Vx \in B(\sigma_*)$, то из формул (2) следует, что $x | K_i \in B(K_i)$, откуда $x \in B(\Omega)$. ●

ЛЕММА 6. В условиях теоремы оператор $T_{\mathbb{F}}$ не имеет собственных векторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $T_{\mathbb{F}} x = \lambda x$, то функция $(\mathbb{F} - \lambda) \cdot x$ имеет аналитическое продолжение $w \in A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ такое, что $w(\infty) = 0$. Это противоречит неравенству $\Delta \arg((\mathbb{F} - \lambda) x \,|\, \Gamma) \ge 0$, где $\Delta \arg$ - приращение аргумента и Γ - достаточно близкий к $\partial\Omega$ положительно ориентированный контур. ●

ЛЕММА 7. Существуют область $\Omega' \supset \bar{\Omega}$ и постоянная C такие, что всякое решение уравнения $Vx = 0$, $x \in \mathcal{H}(\Omega)$, аналитически продолжимо в Ω', причем $\|x\|_{B(\Omega')} \le C \|x\|_{B(\Omega)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбрав подходящее покрытие $E_1, \dots, E_n$ множества $\partial\Omega$, убеждаемся с помощью равенств (2), что функция x аналитически продолжима в каждую область E_i и $\|x\|_{B(E_i)} \le \le C_i \|x\|_{B(\Omega)}$. ●

ЛЕММА 8. Оператор $\mathcal{U}$ инъективен на $\mathcal{H}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 7, единичный оператор на $\operatorname{Ker} V \subset \subset B(\Omega)$ представляется в виде композиции $x | \Omega \to$

$\to x|\Omega' \to x|\Omega$ и поэтому компактен. Следовательно, пространства $\operatorname{Ker} V$ и $\operatorname{Ker} U = T_m^{-1} \operatorname{Ker} V$ конечномерны. Пространство $\operatorname{Ker} U$ инвариантно для оператора T_F. Если $\operatorname{Ker} U \neq 0$, то оператор $T_F \mid \operatorname{Ker} U$ должен иметь собственный вектор, что противоречит лемме 6. ●

ЛЕММА 9. Оператор $V: \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}_F(\sigma_*)$ сюръективен. Здесь $\mathcal{H}_F(\sigma_*)$ – пространство функций из $\mathcal{H}(\sigma_*)$, удовлетворяющих соотношениям (I).

ПЛАН ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Введем римановы поверхности σ_j $(1 \leq j \leq K-1)$; их определение аналогично определению поверхности σ_* с заменой K на j. Заметим, что $\sigma_1 = \Omega$. В отличие от ультраспектра σ_*, поверхности σ_j являются накрытиями всей римановой сферы $\hat{\mathbb{C}}$. Предположим, что $u = Vx$, $x \in \mathcal{H}(\Omega)$. Положим $u_j(\delta) = \langle x, (\prod_1^j (1 - d_s \zeta)^{-1})^{\sim} \rangle$ при $\delta = (d_1, \ldots, d_j) \in \sigma_j^\circ$ (данное ранее определение $\tilde{\varphi}$ годится и для линейных функционалов на $\mathcal{H}(\Omega)$). Тогда имеют место равенства

$$d_1 u_j(d_1, d_3, \ldots, d_{j+1}) - d_2 u_j(d_2, d_3, \ldots, d_{j+1}) = \tag{3}$$
$$= (d_1 - d_2)\, u_{j+1}(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{j+1})$$

для любых $d_1, d_2, \ldots, d_{j+1} \in \Omega \setminus F^{-1}(F(\Xi))$. Обратно, если найти для данной функции $u = u_K \in \mathcal{H}_F(\sigma_*)$ функции $u_{K-1}, \ldots, u_1$ удовлетворяющие соотношениям (3), и если $u_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$, то простые вычисления показывают, что $u = Vu_1$. При $j \geq 2$ соотношения (I) (с заменой K на j) позволяют ввести пространства $\mathcal{H}_F(\sigma_j) \subset \mathcal{H}(\sigma_j)$. Достаточно проверить, что для каждой функции $u_{j+1} \in \mathcal{H}_F(\sigma_{j+1})$ найдется функция u_j из класса $\mathcal{H}_F(\sigma_j)$ (или $\mathcal{H}(\sigma_j)$ при $j = 1$), удовлетворяющая равенствам (3). Эта задача сводится к решению проблемы Кузена в $\hat{\mathbb{C}}$ (см. [8]) введением неизвестных функций $v_j(d_1, \ldots, d_j) = d_1 d_2 \ldots d_j \cdot u_j(d_1, \ldots, d_j)$ и рассмотрением подходящих множеств $G_i \subset \sigma_j$ и их проекций в $\hat{\mathbb{C}}$.

Условия вида (I) превращаются в часть условий коцикла, необходимых (и достаточных) для разрешимости задачи Кузена в $\hat{\mathbb{C}}$. Остальные условия коцикла (и возможность корректной ее постановки) следуют из следующего факта, относящегося к симплициальной теории гомологий:

ЛЕММА 10. Пусть $j < n$ – натуральные числа. Введем двумерный комплекс $R_{j,n}$, точками которого являются всевозможные j - элементные подмножества некоторого n - элементного множества. Ребром комплекса назовем пару его точек (δ_1, δ_2) такую, что $card(\delta_1 \cap \delta_2) = j-1$, а двумерной гранью – любую тройку точек, соединенных тремя ребрами. Тогда одномерная группа гомологий $H_1(R_{j,n}, \mathbb{Z})$ тривиальна.

Условия типа (I) для функции u_j следуют из условия $u_{j+1} \in \mathcal{H}_F(\sigma_{j+1})$ и равенств (3). ●

Утверждение теоремы следует из лемм 5, 8, 9 и равенства $\mathcal{U} = V \cdot T_m$. ●

Введем пространства мультипликаторов

$$Mult(G) = \{a \in \mathcal{H}(G) : \forall x \in B(G)\ ax \in B(G)\}$$

для областей $G \in \mathcal{N}$ с нормой $\|a\| \overset{def}{=\!=} \|M_a\|_{\mathcal{L}(B(G))}$.

СЛЕДСТВИЕ. Предположим, что выполнены условия теоремы. Пусть кроме того, $\forall G, G' \in \mathcal{N}\ \ G \subset G',\ x \in B(G),\ a \in Mult(G') \Rightarrow ax \in B(G)$. Тогда оператор T_F допускает $Mult(\sigma(T_F))$ – – исчисление. Другими словами, существует мультипликативное линейное ограниченное отображение алгебры $Mult(\sigma(T_F))$ в алгебру $\mathcal{L}(B(\Omega))$, совпадающее с естественным на полиномах.

Случаю, когда $B(\Omega)$ – пространство Харди в круге $\Omega = \{z : |z| < 1\}$ и F – рациональна, посвящена статья автора, которая скоро выйдет в "Докладах Академии наук СССР". Там приведен ряд следствий теоремы о подобии,которые здесь не рассматриваются.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Н.К. Никольскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также А.А.Боричеву, А.Л.Вольбергу, и Б.М.Соломяку за ценные обсуждения.

Литература

1. D u r e n P.L. Extension of a result of Beurling on invariant subspaces, Trans.Amer.Math.Soc., 1961, v.99, p.320-324.
2. C l a r k D.N., M o r r e l J.H. On Toeplitz operators and similarity. - Amer.J.Math., 1972, v.100, p.973-986.
3. C l a r k D.N. On Toeplitz operators with loops II. - J. Operator Theory, 1982, v.7, p.109-123.
4. W a n g D. Similarity of smooth Toeplitz operators. - Operator Theory, 1984, v.12, N 2, p.319-348.
5. N i k o l ' s k i i N.K. Treatise on the shift operator. Springer-Verlag, 1986, 491 p.
6. A b r a h a m s e M.B. Toeplitz operators in multiply connected regions. - Bull.Amer.Math.Soc. 1971, v.77, p.449-454.

7. J a n s o n S., P e e t r e J., S e m m e s S. On the action of Hankel and Toeplitz operators on some function spaces. - Duke Math.J., 1984, v.51, N 4, p.937-957.
8. Ф о р с т е р О. Римановы поверхности. М., 1980.

D.V.Yakubovich. Similar models of Toeplitz operators.

Summary

We consider Toeplitz operators T_F on Banach spaces $B(\Omega)$ satisfying some natural constraints, where Ω is a domain bounded by a simple piecewise smooth closed curve $\partial\Omega$). Assume that F is a meromorphic function in a neighbourhood of $\bar{\Omega}$ and has no poles on $\partial\Omega$. Then T_F is well-defined and bounded on $B(\Omega)$. It is proved that if the winding number of the curve $F|\partial\Omega$ with respect to every point $\lambda\in\mathbb{C}\setminus F(\partial\Omega)$ is nonnegative (and if some additional assumptions hold), then T_F is similar to the multiplication by a function ν on some space $B_F(\sigma_*)$ of analytic functions on a Riemann surface $\sigma_* = \sigma_*(T_F)$; moreover, ν is nothing but the projection of σ_* into $\mathbb{C}$. The surface σ_* (which is called the ultraspectrum of T_F) and the Banach space $B_F(\sigma_*)$ are calculated explicitly and the equation $\nu(\sigma_*) = \operatorname{int}\sigma(T_F)$ holds.