



Общероссийский математический портал

А. В. Подлазов, Исследование масштабно инвариантной динамики переключений в иерархической модели дефектообразования, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2010, 070

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

13 января 2025 г., 17:27:57





ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 70 за 2010 г.



Подлазов А.В.

Исследование масштабно  
инвариантной динамики  
переключений в  
иерархической модели  
дефектообразования

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Подлазов А.В. Исследование масштабно инвариантной динамики переключений в иерархической модели дефектообразования // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 70. 23 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-70>

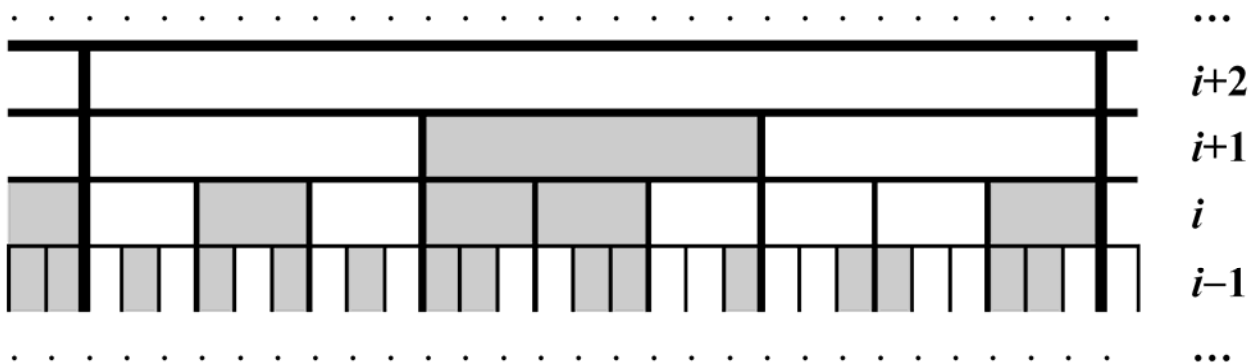
## ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о природе масштабно инвариантного состояния, в котором происходящие в системе процессы протекают одинаково на всех уровнях ее организации, является одним из ключевых вопросов для третьей парадигмы нелинейной динамики – парадигмы сложности.

Масштабная инвариантность характерна для критических явлений [1], которые могут происходить в некоторых нелинейных системах при тонкой подстройке управляющих параметров. Появление теории самоорганизованной критичности [2,3] дало объяснение возникновению масштабно инвариантного состояния и в ситуациях общего положения. Однако существует методологический разрыв между исследованием традиционных критических систем, которое основывается на пространственной перенормировке [1], и исследованием самоорганизованно критических систем, которое существенным образом опирается на особенности той динамики, которая и приводит их в критическое состояние [4,6,5,7].

Устранить этот разрыв позволяет рассматриваемая далее модификация иерархической модели дефектообразования, предложенной в работах [8,9,10,11,12,13,14]. Эта модель дает возможность с единых позиций взглянуть на обычную и самоорганизованную критичность при пространственной перенормировке. Благодаря наличию у модели критического состояния ее правила могут быть дополнены динамикой, демонстрирующей его масштабно инвариантность, что и составляет основное содержание данной работы.

Рассмотрим иерархическую систему, фрагмент которой изображен на



**Рис. 1. Фрагмент иерархической системы модели дефектообразования**

Каждый элемент  $i$ -го уровня состоит из  $n = 3$  элементов  $(i-1)$ -ого уровня.

Элементы системы могут быть исправны или дефектны (показаны заливкой). Состояние каждого элемента определяется состоянием образующих его элементов предыдущего уровня, а также его собственной восприимчивостью к дефектам.

Рисунок соответствует ситуации  $s_2 = 1$ ,  $s_1 = s_3 = 0$ , т.е. все элементы имеют одинаковую восприимчивость и становятся дефектными, когда дефектно более половины образующих их элементов.

рис. 1. Система разбита на *уровни*, которые можно интерпретировать как степени детализации описания системы – чем ниже уровень, тем детальнее.

Элементы системы могут быть *исправны* или *дефектны*. На нижнем уровне  $i = 0$  состояние элементов положим полностью случайным с концентрацией дефектов  $p_0$ .

Каждый элемент уровня  $i > 0$  состоит из фиксированного числа  $n$  элементов предыдущего уровня  $i-1$ . Элементы нижележащих уровней, объединяющиеся в элемент следующего уровня, передают ему свое состояние в соответствии с его *восприимчивостью к дефектам*, под которой понимается минимальное число дефектных составляющих, необходимых, чтобы и он стал дефектным. Иными словами, элемент с восприимчивостью  $k = 1, 2, \dots, n$  будет дефектным, если дефектны не менее  $k$  его составляющих.

Обозначим доли элементов типа  $k$  в системе через  $s_k$ . При этом, очевидно,

$$\sum_{k=1}^n s_k = 1. \quad (1)$$

Доли  $s_k$  будем считать одинаковыми для всех уровней системы.

Величины  $s_k$  не очень удобны с точки зрения проведения выкладок. Поэтому далее при первой же возможности мы будем переходить от них к отмасштабированным величинам

$$\sigma_k = ns_k - 1,$$

изменяющихся в диапазоне

$$-1 \leq \sigma_k \leq n - 1. \quad (2)$$

Для них нормировка (1) имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \sigma_k = 0. \quad (3)$$

Предметом исследования является изменение концентрации дефектных элементов при подъеме по уровням, а также реакция системы на изменение состояния одного элемента нижнего уровня.

## СВОЙСТВА МОДЕЛИ В ПРОСТЕЙШЕМ СЛУЧАЕ

### Фазовое пространство системы

Простейшим нетривиальным является случай  $n = 3$  (см. пример на рис. 1), при котором элементы могут быть только трех типов:

- *пессимисты* ( $k = 1$ ), становящиеся дефектными при наличии хотя бы одной дефектной составляющей;

- *демократы* ( $k = 2$ ), состояние которых определяется большинством составляющих;
- *оптимисты* ( $k = 3$ ), становящиеся исправными при наличии хотя бы одной исправной составляющей.

Изменение концентрации дефектных элементов  $p$  при подъеме на один уровень описывается отображением

$$p \rightarrow F(p) \quad (4)$$

с передаточной функцией

$$F(p) = s_1 \cdot (1 - q^3) + s_2 \cdot (p^3 + 3p^2q) + s_3 \cdot p^3, \quad (5)$$

где  $q = 1 - p$  – концентрация исправных элементов.

Критическое состояние *масштабно инвариантно*, т.е. пребывающие в нем системы устроены одинаково на всех уровнях. Соответственно, интерес представляют неподвижные точки отображения (4)–(5). Найдем их как корни уравнения

$$p = F(p), \quad (6)$$

которое с учетом нормировки (1) принимает вид

$$3(s_1 + ps_2) \cdot pq = (1 + p) \cdot pq.$$

Отображение всегда имеет две тривиальных неподвижных точки  $p = 0$  и  $q = 0$ , соответствующих бездефектному и полностью дефектному состояниям, и критическую

$$p_c = -\frac{3s_1 - 1}{3s_2 - 1} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (7)$$

которая, чтобы иметь физический смысл, должна удовлетворять ограничению

$$0 \leq p_c \leq 1. \quad (8)$$

Устойчивость неподвижных точек отображения (4) определяется величиной  $|F'(p)|$ . Если она меньше единицы, то неподвижная точка устойчива, если больше – неустойчива, а равенство

$$|F'(p)| = 1 \quad (9)$$

соответствует бифуркации, происходящей, когда встречаются две неподвижных точки отображения.

В случае отображения (4)–(5) тривиальные неподвижные точки ограничивают диапазон физически осмысленных значений (8) критической неподвижной точки (7). Следовательно, изменение устойчивости тривиальных не-

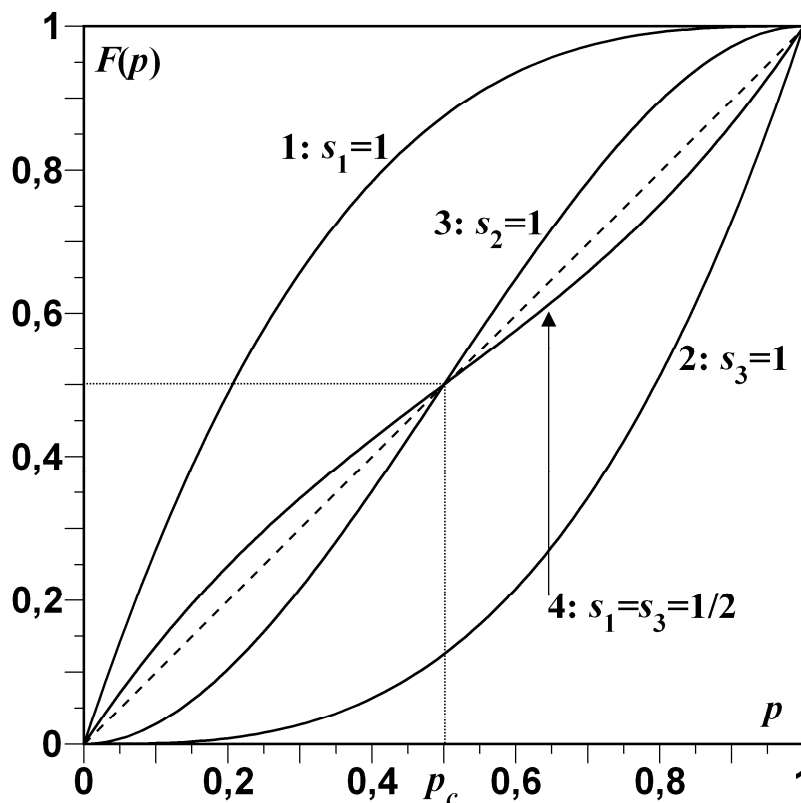
подвижных точек совпадает с ее появлением в интервале (8) или исчезновением из него.

При производной передаточной функции

$$F'(p) = 3 \cdot (s_1 \cdot q^2 + 2s_2 \cdot pq + s_3 \cdot p^2) = 1 + (\sigma_1 \cdot q^2 + 2\sigma_2 \cdot pq + \sigma_3 \cdot p^2)$$

уравнение (9) дает для неподвижных точек  $p = 0$  и  $p = 1$ , соответственно, многообразия  $s_1 = 1/3$  ( $\sigma_1 = 0$ ) и  $s_3 = 1/3$  ( $\sigma_3 = 0$ ), которые делят пространство параметров системы на четыре области, внутри которых устойчивость неподвижных точек отображения (4)–(5) и их взаимное расположение неизменны. То есть, чтобы определить устойчивость и положение точки  $p_c$ , нет необходимости проводить выкладки, а достаточно рассмотреть по одному удобному примеру из уже известных областей пространства параметров. На рис. 2 приведены графики передаточной функции (5) для таких удобных случаев.

1. При  $s_1 = 1$  ( $\sigma_1 = 2$ ) и  $s_3 = s_2 = 0$  ( $\sigma_3 = \sigma_2 = -1$ ) для возникновения дефектного элемента достаточно, чтобы хотя бы одна из его составляющих была дефектной. Соответственно, единственная устойчивая неподвижная точка отображения  $p = 1$ , и любая ненулевая концентрация дефектов на нижнем уровне



**Рис. 2.** Изменение концентрации дефектных элементов при подъеме на следующий уровень

Графики приведены для четырех случаев, разбираемых в тексте.

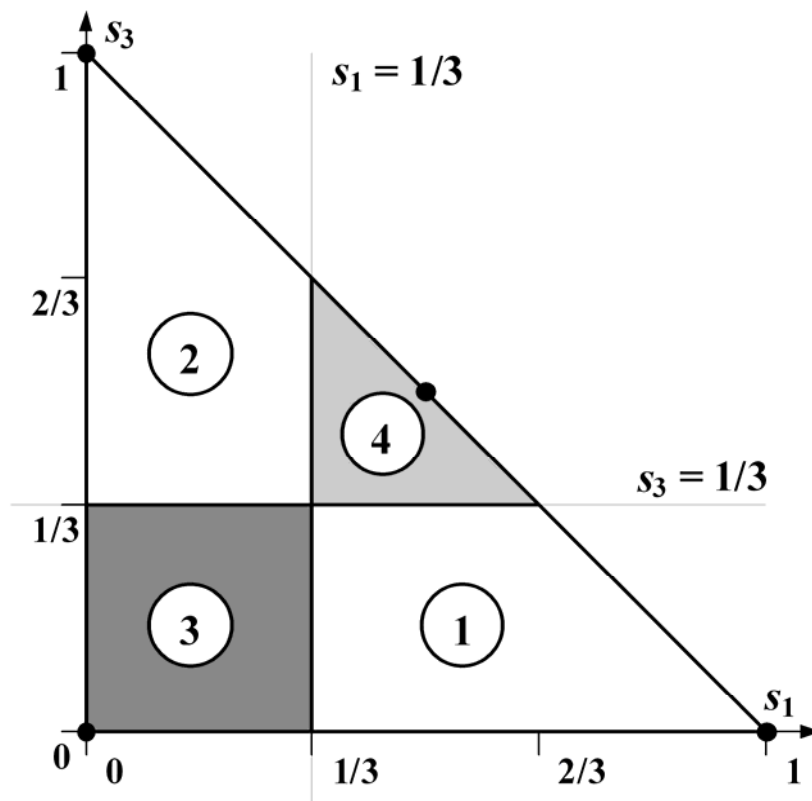
Точка  $p = 0$  устойчива в случаях 2 и 3, точка  $p = 1$  – в случаях 1 и 3. Критическая неподвижная точка  $p_c = 1/2$  существует в случаях 3 и 4, причем она неустойчива в случае 3 и устойчива в случае 4.

приводит к дефектности всей системы.

2. При  $s_3 = 1$  ( $\sigma_3 = 2$ ) и  $s_2 = s_1 = 0$  ( $\sigma_2 = \sigma_1 = -1$ ) для возникновения дефектного элемента необходимо, чтобы все его составляющие были дефектными. Соответственно, единственная устойчивая неподвижная точка отображения  $p = 0$ , и любая ненулевая концентрация исправных элементов на нижнем уровне гарантирует исправность всей системы.

3. Если  $s_2 = 1$  ( $\sigma_2 = 2$ ) и  $s_1 = s_3 = 0$  ( $\sigma_1 = \sigma_3 = -1$ ), дефектный элемент возникает, если более половины из его составляющих дефектны. При этом оба крайних значения  $p = 0$  и  $p = 1$  устойчивы и состояние системы в целом определяется концентрацией дефектов на нижнем уровне. Если  $p_0 < p_c = 1/2$ , то система будет исправна (что сводится к варианту 2), а если  $p_0 > p_c$  – дефектна (вариант 1). И лишь в случае  $p_0 = p_c$  критическая концентрация дефектов будет сохраняться от уровня к уровню.

4. Если  $s_2 = 0$  ( $\sigma_2 = -1$ ) и  $s_1 = s_3 = 1/2$  ( $\sigma_1 = \sigma_3 = 1/2$ ), то система представляет



**Рис. 3. Фазовая диаграмма для иерархической системы в проекции на оси  $s_1$ – $s_3$**

В случае  $s_1 < 1/3$  (области 2 и 3) устойчиво бездефектное состояние  $p = 0$ . В случае  $s_3 < 1/3$  (области 1 и 3) устойчиво полностью дефектное состояние  $p = 1$ .

При одновременном выполнении этих условий (область 3) между устойчивыми неподвижными точками  $p = 0$  и  $p = 1$  отображения (4)–(5) лежит его неустойчивая неподвижная точка  $p_c$ , что соответствует обычному критическому поведению. Если же оба условия нарушаются (область 4), то между двумя неустойчивыми состояниями оказывается устойчивое, что соответствует самоорганизованной критичности.

Жирными точечками отмечены случаи, использовавшиеся для определения взаимного расположения и устойчивости неподвижных точек отображения. Его графики для этих случаев приведены на рис. 2.

собой рацемическую (в равных долях) смесь элементов двух разных типов: одни ведут себя по правилу 1, усиливая дефекты, а другие – по правилу 2, подавляя их. При этом критическая точка устойчива, и вероятность дефектности системы в целом  $p_c$  не зависит от концентрации дефектов на нижнем уровне, коль скоро  $p_0 \neq 0;1$ .

На рис. 3 приведена фазовая диаграмма для рассматриваемой системы (она двумерна, поскольку величины  $s_k$  связаны между собой условием нормировки (1)) [10,13,14]. Пространство параметров распадается на четыре области (фазы): две, в которых одна тривиальная неподвижная точка устойчива, вторая – неустойчива, а критической точки нет вовсе, и две, в которых критическая точка есть (на рис. 3 залиты оттенками серого).

Свойства систем, рассмотренных в примерах 1 и 2, где нет критической точки, вполне предсказуемы и, следовательно, эти системы не таят никакой опасности. Однако в критическом состоянии система может с ненулевой вероятностью оказаться как исправной, так и дефектной. При этом единичные изменения на нижнем уровне могут приводить к катастрофам – переключению состояния элементов высоких уровней или даже системы в целом.

И если в примере 3 критическое состояние возникает лишь при специальном значении  $p_0 = p_c$ , то в примере 4 – уже при любом  $p_0 \neq 0;1$ . Вариант 3, таким образом, соответствует обычному критическому поведению, когда для появления у системы целостных свойств требуется специальная подстройка, а вариант 4 – самоорганизованной критичности, возникающей за счет действия отрицательной обратной связи, которая уменьшает отклонение  $p_i$  от  $p_c$  при подъеме по уровням.

### **Динамические свойства критического состояния**

Модель дефектообразования позволяет продемонстрировать не только свойства самоорганизованно критического состояния при пространственной перенормировке, но и соответствующую масштабно инвариантную динамику.

В качестве возмущающего фактора здесь выступает изменение состояния случайно выбранных элементов некоторого уровня на противоположенное, т.е. появление или выправление единичных дефектов. В качестве уровня, где это происходит, выберем тот, на котором уже установилась критическая концентрация дефектов  $p_c$ . Это избавит нас от необходимости рассматривать переходные процессы. Далее для простоты будем полагать, что  $p_0 = p_c$ , и, соответственно, изменениям, инициирующим динамику системы, подвергаются элементы нулевого уровня.

Изменение состояния некоторого элемента может сказаться на элементе следующего уровня, в который первый входит как составляющая, а изменения того, в свою очередь, – на более крупном, и т.д. Если изменения, вызванные появлением или выправлением единичного дефекта на нижнем уровне, дошли до слоя  $m$  и затронули элемент линейного размера

$$x = n^m,$$



то величину  $x$  будем считать *размером* произошедшего катастрофического события, а ее логарифмическую меру  $m$  – его *магнитудой*.

Найдем распределение событий по магнитуде и размеру. Если передача изменения на следующий уровень происходит с постоянной вероятностью  $P$ , то события распределены по магнитуде экспоненциальным образом:

$$u(m) = (1 - P)P^m. \quad (10)$$

Соответственно, их распределение по размеру будет даваться степенной формулой

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)} \quad (11)$$

с показателем

$$\alpha = -\log_n P. \quad (12)$$

Величина показателя  $\alpha$  имеет принципиальное значение с точки зрения задач управления риском [14]. События, описываемые распределением (11) с  $\alpha < 1$ , уместно трактовать как *катастрофы*, поскольку сумма выборочных значений по порядку величины совпадает с крупнейшим из них. Если же  $\alpha > 1$ , то следует говорить об *авариях*, для которых уже не имеет места ситуация доминирования в сумме одного крупнейшего события.

Определим зависимость  $P$  от  $s_k$ . Появление дефектной составляющей у элемента восприимчивости  $k$  делает его дефектным в том и только в том случае, если до того у него была дефектна ровно  $k-1$  составляющая. Таким образом, вероятность передачи возникшего дефекта на следующий уровень есть

$$P = s_1 \cdot q^2 + s_2 \cdot 2pq + s_3 \cdot p^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + (\sigma_1 \cdot q^2 + \sigma_2 \cdot 2pq + \sigma_3 \cdot p^2) \right).$$

Вероятность передачи выправленного дефекта, очевидно, такая же.

При  $p = p_c$  с учетом соотношений (3) и (7) получаем

$$P = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \right) = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{(3s_1 - 1) \cdot (3s_3 - 1)}{(3s_1 - 1) + (3s_3 - 1)} \right). \quad (13)$$

В области параметров 4, соответствующей самоорганизованно критическому поведению,  $s_1, s_3 \geq \frac{1}{3}$  ( $\sigma_1, \sigma_3 \geq 0$ ). Поэтому вероятность передачи изменений ограничена сверху значением  $P_{\max} = \frac{1}{3}$ , которое соответствует случаю  $s_1 = \frac{1}{3}$  ( $\sigma_1 = 0$ ) или  $s_3 = \frac{1}{3}$  ( $\sigma_3 = 0$ ).

Как нетрудно понять, в случае фиксированной доли  $s_2$  (и, соответственно, фиксированной суммы  $s_1 + s_3$ ) минимального значения вероятность  $P$  достигает, если  $s_1 = s_3$ . При этом формула (13) с учетом нормировки (1) упрощается до вида

$$P = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\sigma_2}{4} \right) = \frac{1 + s_2}{4},$$

что позволяет определить и наименьшее значение  $P_{\min} = 1/4$ , соответствующее точке фазового пространства  $s_2 = 0$  ( $\sigma_2 = -1$ ),  $s_1 = s_3 = 1/2$  ( $\sigma_1 = \sigma_3 = 1/2$ ), рассмотренной в примере 4.

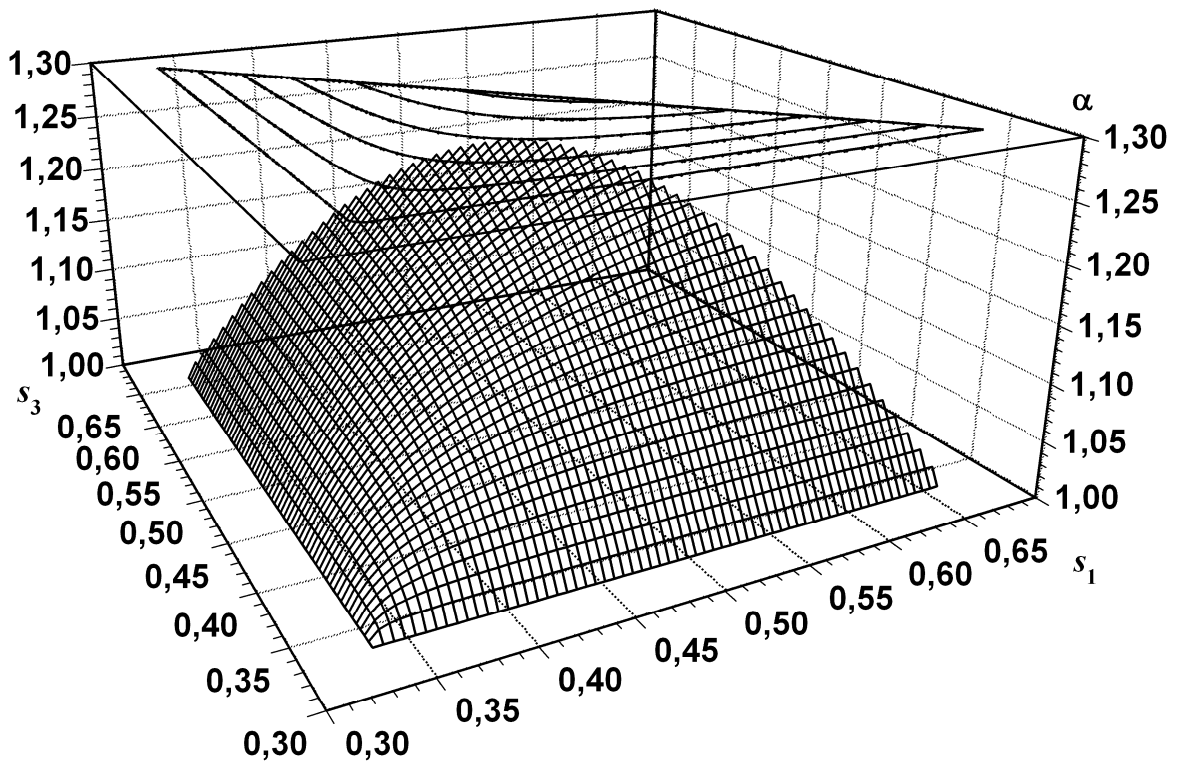
Таким образом, согласно формуле (12), показатель распределения событий по размеру лежит в диапазоне

$$1 \leq \alpha_s \leq \log_3 4 \approx 1,262\dots$$

Зависимость показателя  $\alpha_s$  от долей  $s_1$  и  $s_3$  дана на рис. 4.

Заметим, что формулы (12) и (13) не утрачивают применимости и в области обычной критичности 3. Однако поскольку здесь критическая точка неустойчива, выполнение условия  $p_0 = p_c$  возможно только при искусственной установке необходимой концентрации дефектов на нижнем уровне. Тем не менее, если это сделано, то отклик системы на возмущение по-прежнему распределен степенным образом.

Легко убедиться, что в этом случае вероятность передачи дефекта



**Рис. 4. Показатель распределения размеров переключения в модели дефектообразования**

Минимальное значение  $\alpha$  достигается на границах области при  $s_1 = 1/3$ , или  $s_3 = 1/3$ . Максимальное (при фиксированном значении  $s_2$ ) – на диагонали  $s_1 = s_3$ , которой на поверхности соответствует прямая.

На верхней грани показаны линии уровня поверхности.

$P \in [1/3; 1/2]$ , а показатель распределения  $\alpha_u$  для области 3 лежит в диапазоне

$$1 \geq \alpha_u \geq \log_3 2 \approx 0,631\dots$$

Его минимальное значение соответствует точке  $s_1 = s_3 = 0$ , рассмотренной в примере 3.

На рис. 5 показаны распределения переключений, вызванных единичным изменением на нижнем уровне, для случаев 3 и 4, доставляющих экстремумы показателю  $\alpha$ . Область самоорганизованной критичности характеризуется аварийными значениями показателя распределения, а область обычной – катастрофическими.

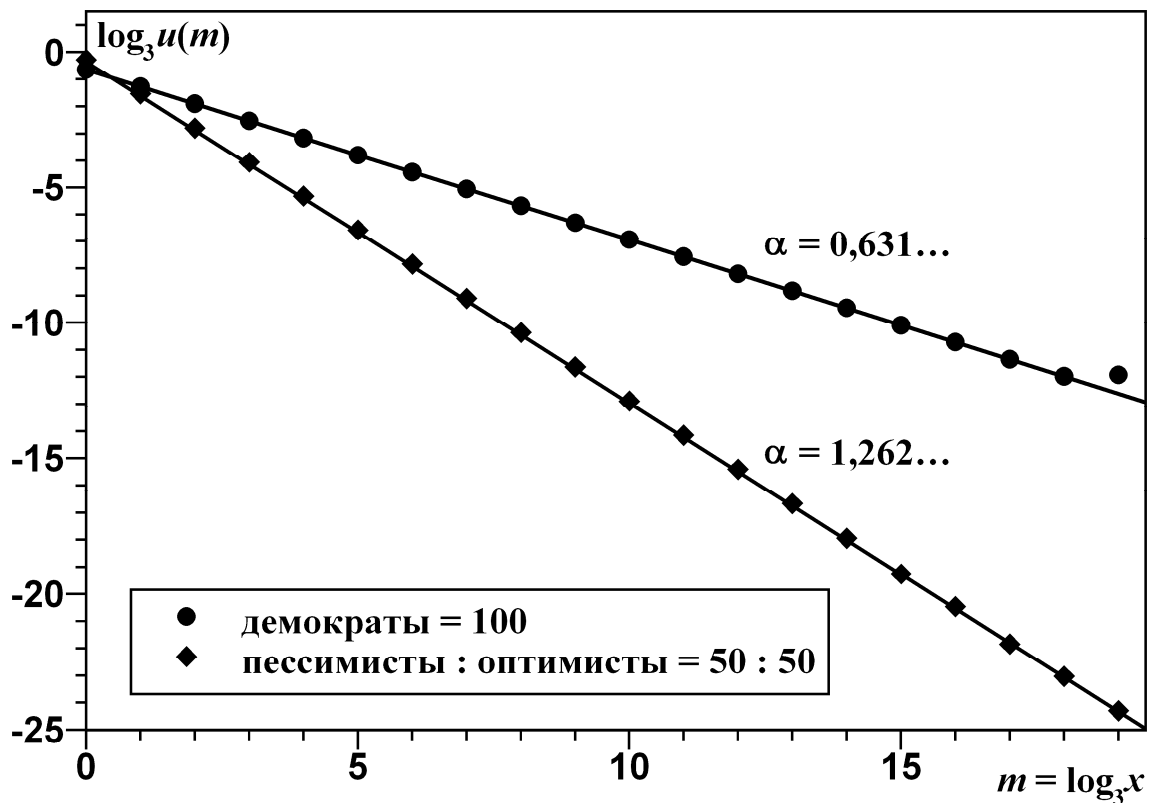
Если для неустойчивой критической точки  $p_0 \neq p_c$ , то при подъеме по уровням *отстройка*  $\delta p = p - p_c$  увеличивается по формуле (в окрестности  $p_c$ )

$$\delta p \rightarrow \Lambda \delta p,$$

где обозначено  $\Lambda = F'(p_c)$ . Соответственно,

$$\delta p_i = \Lambda^i \delta p_0.$$

Уход концентрации дефектов от критического значения, в свою очередь, приводит к нарушению степенного вида распределения. Формула (11) заменяется



**Рис. 5. Примеры распределения переключений по магнитуде**

Значками показаны результаты компьютерного моделирования.

Сплошные линии соответствуют зависимости (10).

на более общую запись

$$u(x) = x^{-(1+\alpha)} \cdot f(x/x^*), \quad (14)$$

где функция  $f(y)$  примерно постоянна при  $y \sim 1$  и быстро убывает при  $y \rightarrow \infty$ , а величина  $x^*$  определяет характерный размер крупных событий, которые еще могут происходить при заданной стартовой отстройке  $\delta p_0$ .

Максимально возможному событию соответствует отстройка  $\delta p^* \sim 1$ , т.е. полный уход концентрации дефектов от  $p_c$ . Для этого необходимо пройти

$$m^* = \log_{\Lambda} \delta p^* / \delta p_0$$

уровней. Соответственно,

$$x^* = \delta p_0^{-\nu},$$

где  $\nu = \log_{\Lambda} n$ . (15)

Поскольку явный вид функции  $f(y)$  неизвестен, уместно воспользоваться

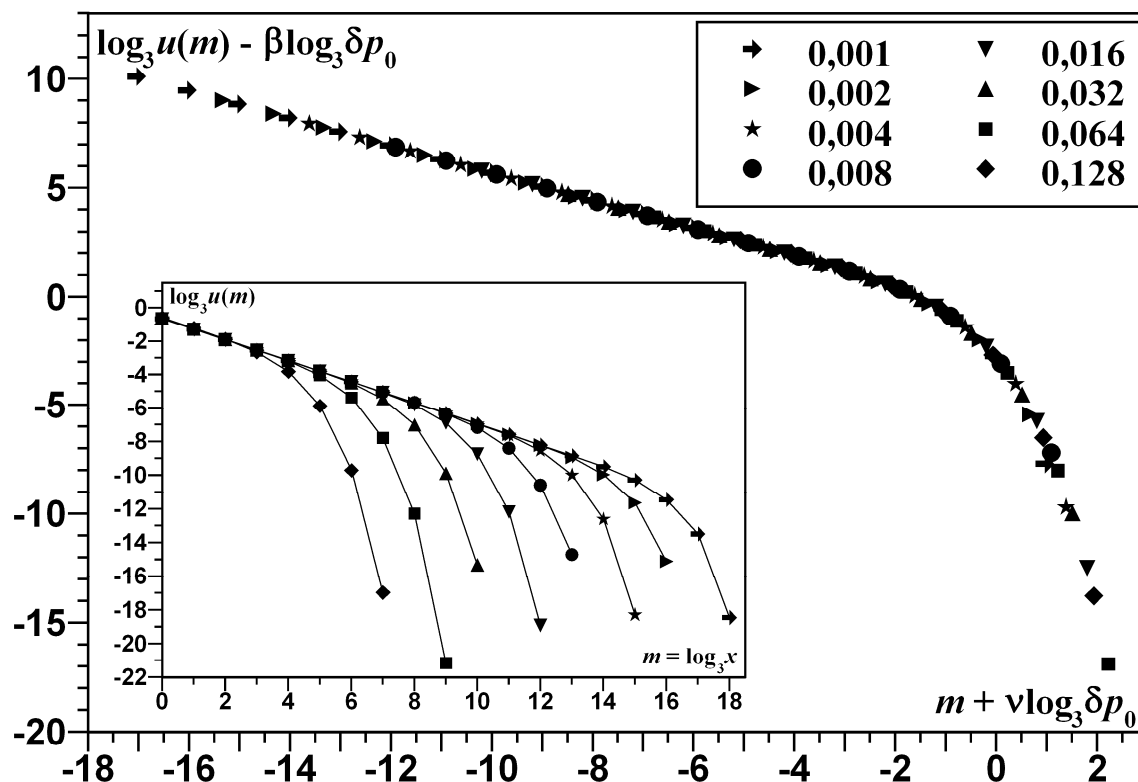


Рис. 6. Скейлинг распределения переключений по магнитуде для неустойчивой точки из примера 3 ( $s_2 = 1$ ) при различных значениях стартовой отстройки  $\delta p_0$

При скейлинговых показателях  $\beta = \log_{3/2} 3 \approx 1,710\dots$  и  $\nu = \log_{3/2} 2 \approx 2,710\dots$  графики совпадают, что дает показатель распределения  $\alpha = \log_3 2 \approx 0,631\dots$

На врезке приведены те же графики, но без скейлинга.

процедурой *конечномерного скейлинга*, предполагающей возможность представить плотность распределения в виде

$$u(x) = \delta p_0^\beta \cdot g(x \cdot \delta p_0^\nu). \quad (16)$$

Эквивалентность записей (14) и (16) предполагает выполнение скейлингового соотношения

$$\beta = \nu(1 + \alpha). \quad (17)$$

Оно позволяет легко определять показатель  $\alpha$  по экспериментальным данным. Графики распределения, построенные для различных значений  $\delta p_0$  и отмасштабированные в соответствии с формулой (16), должны совпасть при правильном подборе скейлинговых показателей  $\beta$  и  $\nu$ .

На рис. 6 дан пример конечномерного скейлинга для распределения переключений по магнитуде, демонстрирующий эту процедуру в действии (заметим, что для магнитуды соотношение (17) имеет вид  $\beta = \nu\alpha$ ).

### СВОЙСТВА МОДЕЛИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В случае произвольного  $n$  передаточная функция отображения (4) дается выражением

$$F(p) = \sum_{i=1}^n C_n^i p^i q^{n-i} \cdot \sum_{k=1}^i s_k,$$

которое после замены  $s_k$  на  $\sigma_k$  принимает вид

$$F(p) = p + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_n^i p^i q^{n-i} \cdot \sum_{k=1}^i \sigma_k. \quad (18)$$

Для определения неподвижных точек отображения (4)–(18), подставим формулу (18) в уравнение (6), исключив из диапазона суммирования значение  $i = n$  (в силу нормировки (3) соответствующее слагаемое входит в сумму с нулевым коэффициентом). После отбрасывания тривиальных решений  $p = 0$  и  $q = 0$  остается уравнение на нетривиальные неподвижные точки

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i p^{i-1} q^{n-1-i} \sum_{k=1}^i \sigma_k = 0. \quad (19)$$

Производная передаточной функции отображения, необходимая для определения устойчивости неподвижных точек, находится дифференцированием формулы (18)

$$F'(p) = 1 + \sum_{i=1}^n (C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} q^{n-i} - C_{n-1}^i p^i q^{n-1-i}) \cdot \sum_{k=1}^i \sigma_k.$$

Сменив порядок суммирования, имеем

$$F'(p) = 1 + \sum_{k=1}^n \sigma_k \cdot \sum_{i=k}^n (C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} q^{n-i} - C_{n-1}^i p^i q^{n-1-i}).$$

Легко видеть, что внутренняя сумма упрощается до одного члена, что окончательно дает

$$F'(p) = 1 + \sum_{k=1}^n \sigma_k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}. \quad (20)$$

Откуда, в частности,

$$\begin{aligned} F'(0) &= 1 + \sigma_1 = ns_1 \\ F'(1) &= 1 + \sigma_n = ns_n \end{aligned}$$

что определяет устойчивость тривиальных неподвижных точек  $p = 0$  и  $1$  условиями  $s_1 < 1/n$  ( $\sigma_1 < 0$ ) и  $s_n < 1/n$  ( $\sigma_n < 0$ ), соответственно.

Важным следствием формулы (20) является очевидная оценка

$$F'(p) > 0. \quad (21)$$

Положительность производной передаточной функции отображения (4) имеет следствием чередование устойчивости его неподвижных точек [13], что существенно упрощает анализ.

Вероятность передачи возникшего дефекта на следующий уровень есть

$$P = \sum_{k=1}^n s_k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = \frac{1}{n} \left( 1 + \sum_{k=1}^n \sigma_k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \right). \quad (22)$$

Сопоставление формул (20) и (22) позволяет установить связь между производной передаточной функции и вероятностью передачи дефекта

$$P = F'(p)/n. \quad (23)$$

Подставив это соотношение в формулу (12), приходим к выражению для показателя распределения

$$\alpha = 1 - \log_n F'(p), \quad (24)$$

из которого вытекает ограничение на диапазон показателей для устойчивых и неустойчивых неподвижных точек отображения (4).

В области самоорганизованной критичности, где выполнено условие устойчивости  $F'(p) < 1$ , возможны только значения показателя  $\alpha_s > 1$ , соответствующие авариям, а в области обычной критичности, где  $F'(p) > 1$ , будет наблюдаться уже катастрофическая статистика с  $\alpha_u < 1$ .

Заметим, что соотношение (23) может быть получено и непосредственно. Изменение концентрации дефектов на величину  $\Delta p$  влечет на следующем слое изменение их концентрации на  $\Delta F(p) = F'(p)\Delta p$ . А переключение состояния одного элемента из  $n$  входящих в блок как раз и дает изменение концентрации  $\Delta p = 1/n$ , входящее как коэффициент в формулу (23). Из нее же автоматически вытекает и ограничение (21), обеспечивающее чередование устойчивостей неподвижных точек отображения (4).

В завершение общего анализа сопоставим формулы (15) и (24). Это приводит к соотношению

$$v(1 - \alpha) = 1,$$

связывающему показатель распределения переключений  $\alpha$  и скейлинговый показатель  $v$ , который определяет максимальный размер переключения, возможного в случае обычной критичности при отстройке стартовой концентрации дефектов от критического значения.

### Свойства модели при $n = 4$

В случае  $n = 4$  уравнение (19) с учетом нормировки (3) запишется как

$$4q^2\sigma_1 + 6pq(\sigma_1 + \sigma_2) - 4p^2\sigma_4 = 0.$$

Введя новую переменную  $-1 \leq x \leq 1$ , такую что

$$p = \frac{1+x}{2}, \quad q = \frac{1-x}{2}, \tag{25}$$

полученное уравнение можно свести к виду

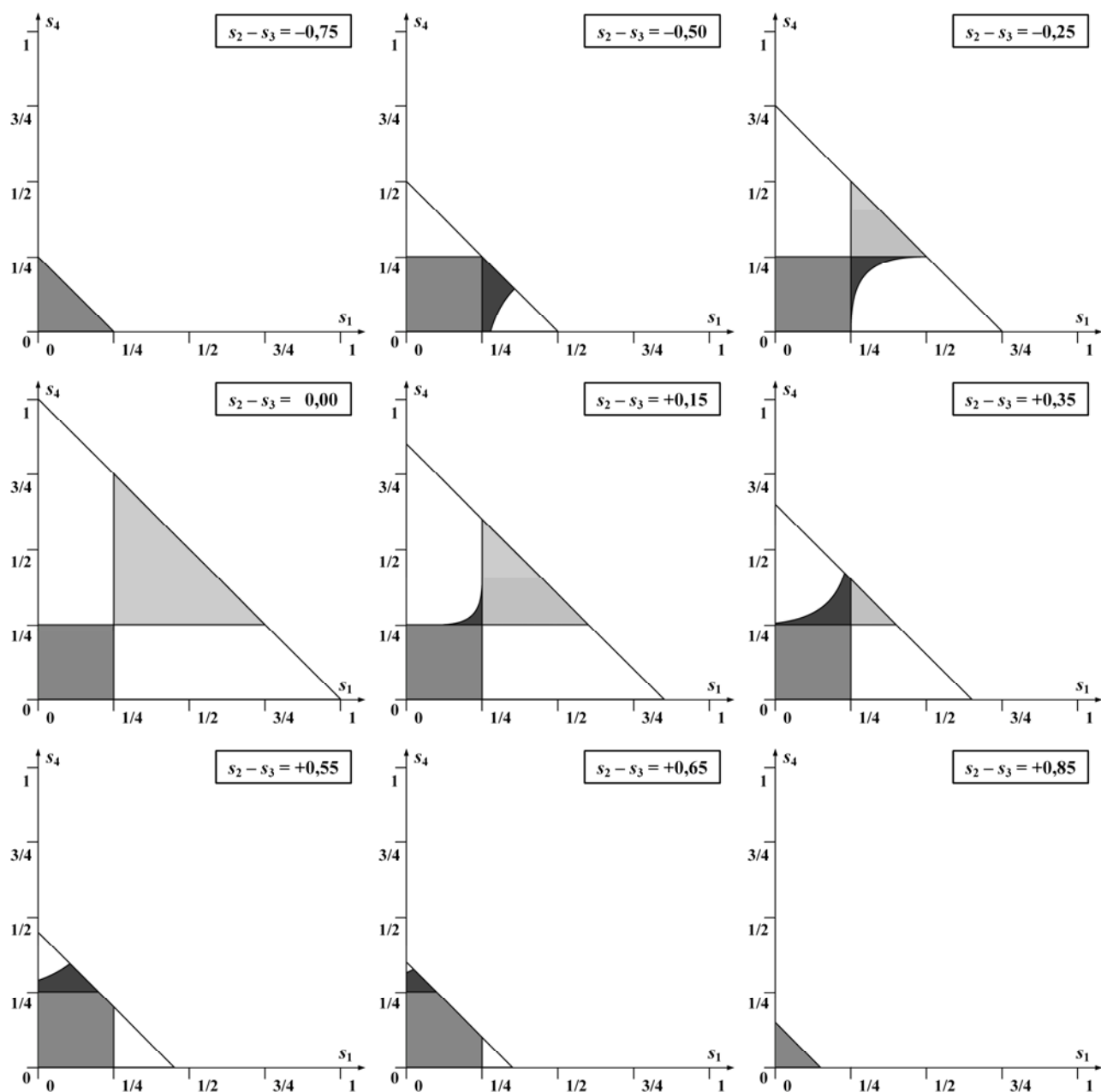
$$(a - 3b) \cdot x^2 + 8c \cdot x + (7a + 3b) = 0, \tag{26}$$

где обозначено  $a = \sigma_1 - \sigma_4$ ,  $b = \sigma_2 - \sigma_3$ ,  $c = \sigma_2 + \sigma_3$ .

Поскольку для отображения (4) устойчивость неподвижных точек чередуется, в случае одновременной устойчивости ( $\sigma_1, \sigma_4 < 0$ ) или неустойчивости ( $\sigma_1, \sigma_4 > 0$ ) тривиальных неподвижных точек  $p = 0$  и  $1$  между ними лежит ровно одно решение уравнения (26), а его второе решение не имеет физического смысла. Таким образом, эти случаи ничем принципиально не отличаются от ситуации  $n = 3$ .

Интерес представляет ситуация, когда тривиальные неподвижные точки имеют разную устойчивость и между ними могут оказаться две нетривиальных. Для этого необходимо, чтобы оба решения уравнение (26) существовали и были физически осмыслены. Область их существования ограничивается многообразиями, на которых дискриминант уравнения (26)

$$D/4 = 16(c^2 - a^2) + 9(a + b)^2 = 9\sigma_1^2 + 46\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_1^4 + 18(\sigma_1 - \sigma_4)b + b^2$$



**Рис. 7. Фазовая диаграмма для  $n = 4$  в сечении  $s_1$ – $s_4$  при различных значениях  $s_2 - s_3$**

Свойства областей, где  $s_1$  и  $s_4$  находятся по одну сторону от  $1/4$ , аналогичны свойствам областей 3 и 4 случая  $n = 3$  (см. рис. 3). Если  $s_1, s_4 > 1/4$  (светлая заливка), между неустойчивыми тривиальными неподвижными точками отображения (4) лежит устойчивая нетривиальная (самоорганизованная критичность), а если  $s_1, s_4 < 1/4$  (промежуточная заливка), между устойчивыми тривиальными неподвижными точками лежит неустойчивая нетривиальная (самоорганизованная критичность).

Новым по сравнению со случаем  $n = 3$  является возникновение нетривиальных неподвижных точек в части областей, где  $s_1$  и  $s_4$  находятся по разные стороны от  $1/4$  (темная заливка). Здесь тривиальные неподвижные точки имеют разную устойчивость, и между ними возникает сразу пара нетривиальных, одна из которых соответствует обычной, а вторая – самоорганизованной критичности.

Без заливки оставлены области, где нетривиальных неподвижных точек нет, аналогичные областям 1 и 2 случая  $n = 3$  (см. рис. 3).



обращается в ноль. Здесь происходит рождение/взаимоуничтожение нетривиальных неподвижных точек отображения (4).

В сечениях  $b = \text{const}$  эти многообразия принимают вид гипербол, касающихся прямых  $\sigma_1 = 0$  и  $\sigma_4 = 0$ , которые ограничивают область устойчивости тривиальных неподвижных точек отображения, соответственно, в точках  $\sigma_4 = b$  и  $\sigma_1 = -b$ . Точки касания соответствуют рождению/взаимоуничтожению нетривиальных неподвижных точек, приходящемуся на край диапазона (8). Таким образом, область существования физически осмысленных нетривиальных точек ограничена в каждом сечении участком кривой  $D = 0$ , лежащим между точками касания.

Примеры фазовых диаграмм в сечениях  $b = \text{const}$  представлены на рис. 7. При наличии у отображения (4) двух устойчивых точек, имеющих физический смысл, одна из них всегда соответствует самоорганизованной критичности, а вторая – накоплению (при  $b > 0$ ) или исправлению (при  $b < 0$ ) дефектов.

Вероятность передачи изменения для критических концентраций в соответствии с формулой (22) составляет

$$P = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{(3b - a) \cdot x^3 - 6c \cdot x^2 - 3(a + b) \cdot x + 2c}{8} \right).$$

С учетом уравнения (26) эта запись может быть последовательно упрощена до

$$P = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{c \cdot x^2 + 2a \cdot x + c}{4} \right) = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{(4c^2 + a(3b - a)) \cdot x + 3c(a + b)}{2(3b - a)} \right). \quad (27)$$

Отдельный интерес представляет анализ случая  $s_1 = s_4$ , соответствующего диагонали фазовых диаграмм рис. 7. В этом случае  $a = 0$ , в силу чего уравнение (26) принимает вид

$$x^2 - 2rx - 1 = 0,$$

где  $r = 4c / 3b$ . Только одно из решений

$$x = r \pm \sqrt{r^2 + 1}$$

имеет смысл – то, в котором знак перед радикалом противоположен знаку  $r$ .

В частности, если все элементы системы относятся только ко второму или только к третьему типу восприимчивости, то  $r = \pm 2/3$  (верхний знак соответствует варианту  $s_2 = 1$ , нижний –  $s_3 = 1$ ). При этом

$$x = \pm \frac{2 - \sqrt{13}}{3},$$

а соответствующая неустойчивая критическая точка

$$p_c = \frac{1}{2} \pm \frac{2 - \sqrt{13}}{6} \approx \begin{cases} 0,232\dots \\ 0,768\dots \end{cases}$$

характеризуется показателем распределения

$$\alpha_u = \log_4 \frac{11 + \sqrt{13}}{6} \approx 0,642\dots$$

Приведенное значение, как будет показано далее, является наименьшим для обычной критичности в случае  $n = 4$ , причем именно этому случаю соответствует самый узкий диапазон значений  $\alpha_u$  среди всех  $n$  (см. рис. 9 ниже). Для сравнения, рацемической смеси элементов второго и третьего типа ( $s_2 = s_3 = 1/2$ ) отвечает неустойчивая неподвижная точка  $p_c = 1/2$  ( $x = 0$ ), характеризующаяся несколько большим показателем  $\alpha_u = \log_4 3/8 = 0,708\dots$

### Свойства модели при $n = 5$ в симметричном случае

Для  $n = 5$  ограничимся симметричным случаем:  $s_1 = s_5, s_2 = s_4$ .

При этом уравнение (19) с учетом нормировки (3) упрощается до вида

$$q^3 \sigma_1 + 2pq^2(\sigma_1 + \sigma_2) - 2p^2q(\sigma_1 + \sigma_2) - p^3 \sigma_1 = 0,$$

который заменой (25) сводится к кубическому уравнению

$$(\sigma_1 + 2\sigma_2) \cdot x^3 - (5\sigma_1 + 2\sigma_2) \cdot x = 0.$$

Отсюда немедленно находится нетривиальная, но очевидная в симметричном случае, неподвижная точка  $p_c = 1/2$  ( $x = 0$ ) и выражение для неочевидных неподвижных точек

$$x^2 = \frac{5\sigma_1 + 2\sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2}. \quad (28)$$

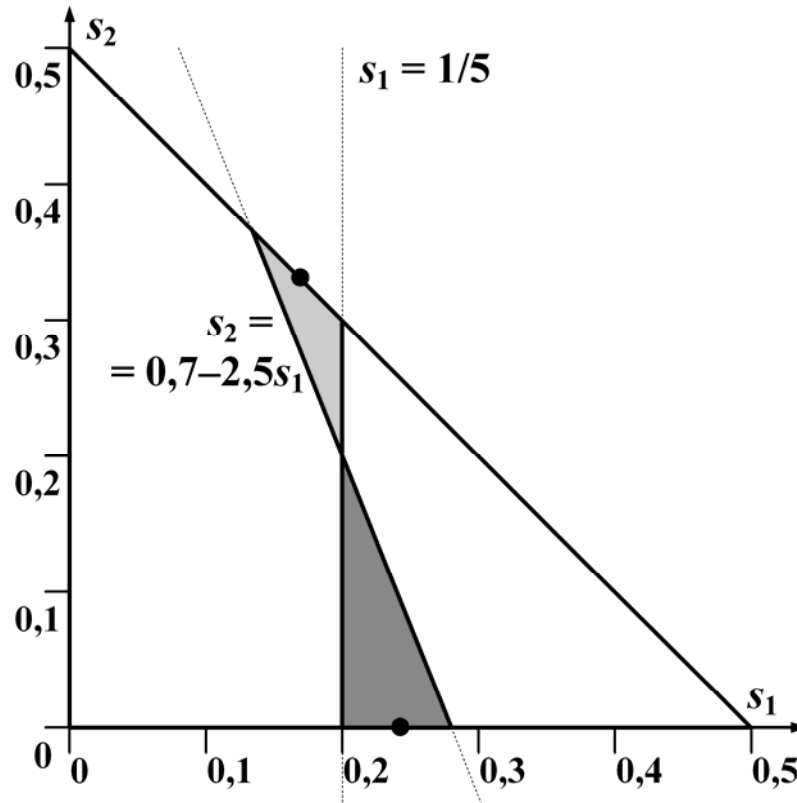
Они существуют и удовлетворяют ограничению (8), при выполнении условия

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} < -\frac{5}{2}.$$

Кроме того, из ограничения (2) для  $\sigma_3$  возникает условие

$$\sigma_1 + \sigma_2 \leq 1/2.$$

Этих два неравенства определяют фазовую диаграмму системы, которая приведена на рис. 8 [13]. Принципиально новым по сравнению с меньшими значениями  $n$  является ситуация бистабильности самоорганизованной критичности, возникающая, если  $0 < 5\sigma_1 < -2\sigma_2$ . При этом по мере подъема по уровням кон-



**Рис. 8. Фазовая диаграмма для  $n = 5$  в симметричном случае**

Светлой заливкой показана область, где нетривиальные неподвижные точки, отличные от  $\frac{1}{2}$ , неустойчивы, а темной, – где устойчивы. Без заливки оставлены области, где неочевидных нетривиальных неподвижных точек нет.

Жирными точечками отмечены значения параметров, которым соответствуют экстремальные значения показателя в неочевидных неподвижных точках, приведенные в тексте.

центрация дефектов устанавливается на нетривиальном значении, зависящем от  $P_0$ .

Вероятность передачи изменения для критических концентраций в соответствии с формулой (22) составляет

$$P = \frac{1}{5} \left( 1 + \frac{-(5\sigma_1 + 2\sigma_2) + 6x^2(3\sigma_1 + 2\sigma_2) - 5x^4(\sigma_1 + 2\sigma_2)}{8} \right).$$

Подстановка решения (28) позволяет упростить эту формулу до вида

$$P = \frac{1 - \sigma_1 x^2}{5}.$$

Исследование полученного выражения на экстремальные значения дает следующие результаты:

$\sigma_1, \sigma_5 = 2 - 4/\sqrt{5} \approx 0,211\dots$	$\sigma_1, \sigma_5 = 1 - 2/\sqrt{3} \approx -0,155\dots$
$\sigma_2, \sigma_4 = -1$	$\sigma_2, \sigma_4 = 2/\sqrt{3} - 1/2 \approx 0,655\dots$
$\sigma_3 = 4 - 8/\sqrt{5} \approx 0,422\dots$	$\sigma_3 = -1$
$x^2 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0,528\dots$	$x^2 = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0,464\dots$
$p_c = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{2} \approx \begin{cases} 0,863\dots \\ 0,137\dots \end{cases}$	$p_c = \frac{1 \pm \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{2} \approx \begin{cases} 0,841\dots \\ 0,159\dots \end{cases}$
$\alpha_s^{\max} = 1 - \log_5(8\sqrt{5} - 17) \approx 1,073\dots$	$\alpha_u^{\min} = 1 - \log_5(8 - 4\sqrt{3}) \approx 0,957\dots$

Подчеркнем, что приведенные максимальное и минимальное значения показателя относятся к неочевидным неподвижным точкам отображения (4). Для  $p_c = 1/2$ , как мы увидим далее, экстремальные значения показателя значительно дальше отстоят от единицы:

$$\alpha_s^{\max} = \log_5 16 \approx 1,723\dots \quad ; \quad \alpha_u^{\min} = \log_5 8/3 \approx 0,609\dots$$

### Экстремальные значения показателя при произвольном $n$

Как было показано выше, области самоорганизованной критичности выполнены ограничением  $\alpha_s > 1$ , а в области обычной –  $\alpha_u < 1$ . Найдем для произвольного  $n$  вторые концы диапазонов, ограничивающих значения показателя  $\alpha$ .

Как показывает численное изучение решений уравнения (19), изменение экстремальных значений показателя  $\alpha$  с ростом  $n$  существенно различается в случаях обычной и самоорганизованной критичности.

Для области самоорганизованной критичности наибольшее значение  $\alpha_s$  достигается при  $s_1 = s_n = 1/2$  (т.е. для рацемической смеси крайних пессимистов и крайних оптимистов). Легко убедиться, что очевидное значение  $p_c = 1/2$  будет в этом случае неподвижной точкой отображения (4)–(18). По формуле (22) найдем вероятность передачи дефекта

$$P = 2^{-(n-1)},$$

что согласно выражению (12) дает показатель распределения событий

$$\alpha_s = \frac{n-1}{\log_2 n}.$$

Таким образом, показатель  $\alpha_s$  неограниченно возрастает при увеличении  $n$ . Соответствующий график приведен на врезке рис. 9.

Для области обычной критичности поведение показателя оказывается более сложным, поскольку здесь свойства модели зависят от четности  $n$ .

В случае нечетного  $n = 2l + 1$  экстремум достигается при  $s_{l+1} = 1$ , т.е. когда вся система состоит из идеальных демократов. Вновь, как и в случае само-

организованной критичности, здесь имеется очевидная критическая точка  $p_c = 1/2$ , что можно проверить непосредственной подстановкой в формулу (18).

В соответствии с формулой (22), вероятность передачи дефекта

$$P = 2^{-2l} C_{2l}^l.$$

Воспользовавшись для нахождения числа сочетаний формулой Стирлинга

$$x! \cong \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+1/2} e^{-x+1/12x},$$

получаем выражение

$$P \cong \frac{\exp(-1/8l)}{\sqrt{\pi l}},$$

определяющее в соответствии с формулой (12) показатель

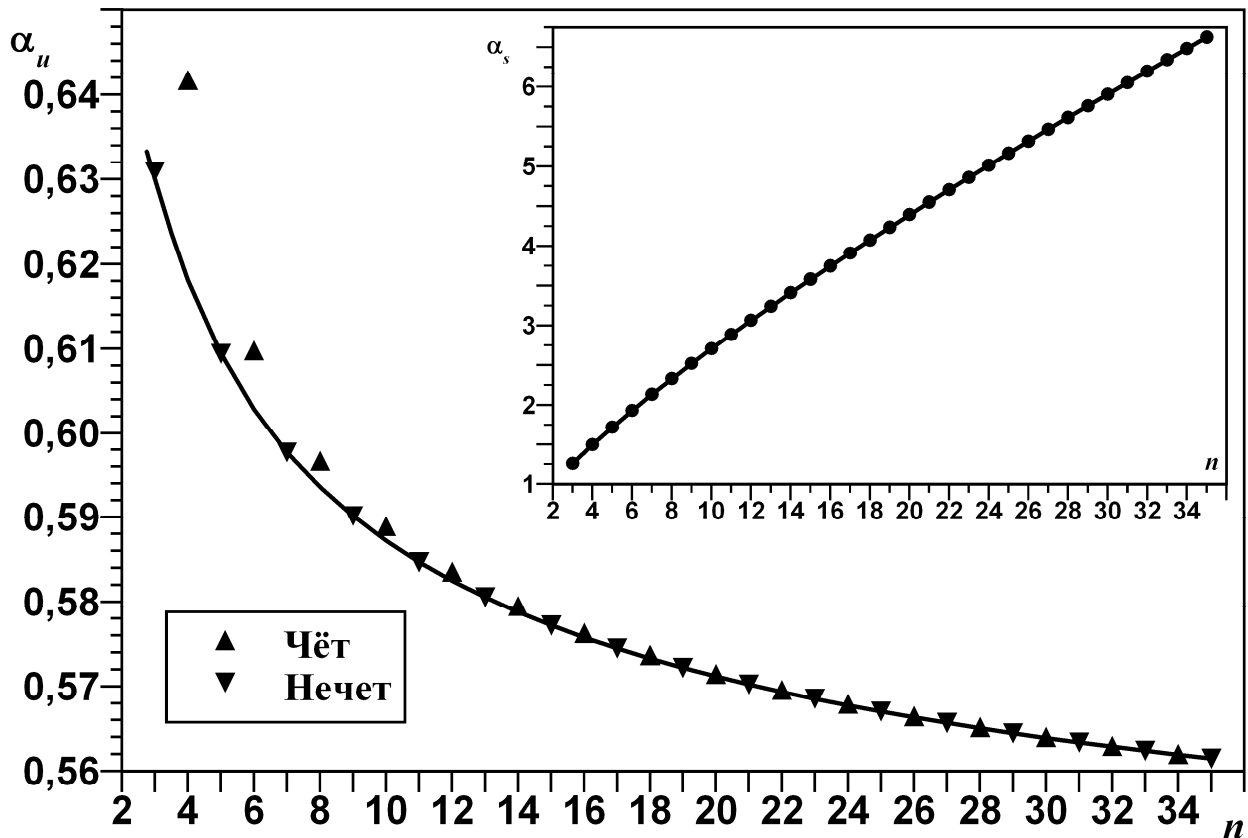


Рис. 9. Экстремальные показатели распределения переключений

Значками показаны реальные значения показателя, линией – расчетная зависимость (в случае неустойчивой критической точки соответствует нечетным  $n$ ).

Для неустойчивой критической точки минимальный показатель убывает до  $1/2$  при возрастании  $n$ .

Для устойчивой критической точки (врезка) максимальный показатель неограниченно возрастает.

$$\alpha_u \cong \frac{1/8l + \ln \sqrt{\pi l}}{\ln(2l + 1)}.$$

Таким образом,  $\alpha_u \rightarrow 1/2$  сверху при  $n \rightarrow \infty$ .

В случае четного  $n = 2l$  вопреки интуитивным ожиданиям экстремум достигается не при  $s_l = s_{l+1} = 1/2$  (рацемическая смесь *недодемократов* пессимистического и оптимистического толка), а как при  $s_l = 1$ , так и при  $s_{l+1} = 1$  (тотальное присутствие недодемократов только одного из двух толков). Из-за этого симметрия, позволяющая провести в общем случае аналитические выкладки, исчезает. Однако, как видно из рис. 9, по мере роста  $n$  разница между его четным и нечетным значениями нивелируется.

В завершение обратим внимание на следующее любопытное обстоятельство. Наряду с переключениями, инициируемыми изменением состояния одного элемента нижнего уровня при фиксированной концентрации дефектов на нем, можно рассматривать процесс ее последовательного нарастания от 0 до 1, связанный с накоплением дефектов. В этом случае вне зависимости как от величин  $n$  и  $s_k$ , так и от порядка, в котором вносятся дефекты, распределение переключений характеризуется показателем  $\alpha = 1$ . В самом деле, поскольку каждый из элементов системы должен рано или поздно сменить свое состояние с исправного на дефектное, доля событий магнитуды  $m$  в точности равна  $(n-1) / n^{m+1}$ , что и обеспечивает указанное значение показателя.

## ВЫВОДЫ

Размер переключения, вызванного изменением состояния единичного элемента на нижнем уровне системы, распределен степенным образом.

Для самоорганизованной критичности показатель распределения всегда больше единицы (аварии). Наибольшее его значение, достигаемое для систем, состоящих из рацемической смеси крайних пессимистов и оптимистов, неограниченно возрастает по мере увеличения  $n$ . Поскольку самоорганизованная критичность соответствует устойчивой неподвижной точке отображения, описывающего изменение концентрации дефектов при подъеме по уровням, ее конкретное значение на нижнем уровне несущественно.

Для обычной критичности показатель распределения всегда меньше единицы (катастрофы). Наименьшее его значение, достигаемое для систем, полностью состоящих из идеальных демократов (в случае нечетных  $n$ ) или из одного типа недодемократов (в случае четных  $n$ ), стремится к  $1/2$  сверху по мере увеличения  $n$ . Поскольку обычная критичность соответствует неустойчивой неподвижной точке отображения, описывающего изменение концентрации дефектов при подъеме по уровням, ее значение на нижнем уровне должно совпадать с критическим. При отстройке стартовой концентрации дефектов от критической степенной вид распределения переключений ограничен значением, которое убывает как степень отстройки.

## Литература

1. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. – М.: Мир, 1980. – 298 с.
2. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality// *Phys. Rev. A.* 1988. V.38, N1, p.364-374.
3. *Bak P.* How nature works: The science of self-organized criticality. Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.
4. *Dhar D., Ramaswamy R.* Exactly solved model of self-organized critical phenomena// *Phys. Rev. Lett.* 1989. V.63, N16, p.1659-1662.
5. *Paczuski M., Maslov S., Bak P.* Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models// *Phys. Rev. E.* 1996. V.53, N1, p.414-443.
6. *Подлазов А.В., Осокин А.П.* Самоорганизованная критичность эруптивных процессов в солнечной плазме// *Математическое моделирование.* 2002. Т.14, №2, с.118-126.
7. *Подлазов А.В.* Теория самоорганизованной критичности – наука о сложности// *Будущее прикладной математики. Лекции для молодых исследователей/ Под. ред. Г.Г. Малинецкого.* – М.: Эдиториал УРСС, 2005. С.404-426.
8. *Наркунская Г.С., Шнирман М.Г.* Иерархическая модель дефектообразования и сейсмичность// *Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных/ Выч. сейсмология: №22.* С.56-62. – М.: Наука, 1989.
9. *Narkunskaya G.S., Shnirman M.G.* Hierarchical model of defect development and seismicity// *Phys. Earth Planet. Inter.* 1990. V.61, p.29-35.
10. *Shnirman M.G., Blanter E.M.* Mixed hierarchical model of seismicity: Scaling and prediction// *Phys. Earth Planet. Inter.* 1999. V.111, p.295-303.
11. *Blanter E.M., Shnirman M.G.* Self-organized in a hierarchical model of defects development// *Phys. Rev. E.* 1996. V.53, N4, p.3408-3413.
12. *Blanter E.M., Shnirman M.G.* Simple hierarchical systems: Stability, self-organized criticality, and catastrophic behavior. *Phys. Rev. E.* 1997. V.55, N6, p.6397-6403.
13. *Shnirman M.G., Blanter E.M.* Scale invariance and invariant scaling in a mixed hierarchical system// *Phys. Rev. E.* 1999. V.60, N5, p.5111-5120.
14. *Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л.* и др. Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика. – М.: Наука, 2000 – 432 с.

## Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>Свойства модели в простейшем случае .....</b>	<b>4</b>
Фазовое пространство системы .....	4
Динамические свойства критического состояния .....	8
<b>Свойства модели в общем случае .....</b>	<b>13</b>
Свойства модели при $n = 4$ .....	15
Свойства модели при $n = 5$ в симметричном случае .....	18
Экстремальные значения показателя при произвольном $n$ .....	20
<b>Выводы .....</b>	<b>22</b>