Л. Ю. Колотилина, Усеченные множества, содержащие собственные значения, и ассоциированные классы невырожденных матриц,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2024, том 534, 89–106

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 534, 2024 г.

Л. Ю. Колотилина

УСЕЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, И АССОЦИИРОВАННЫЕ КЛАССЫ НЕВЫРОЖДЕННЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

В последние годы в ряде публикаций рассматривались так называемые усеченные множества локализации, содержащие спектр заданной матрицы, которые получаются из известных множеств в результате удаления некоторых их подмножеств, заведомо не содержащих собственных значений. В этой связи мы упомянем пионерские работы Пароди [11] и Шнайдера [12], а также относительно недавнюю статью Мелмана [9], в которых фигурировали усеченные круги Гершгорина. Затем усеченные овалы Кассини двух типов были предложены в работе [6], а усеченные множества Дашница–Зусмановича – в статье [15].

Как хорошо известно, если имеются некоторые множества, содержащие все собственные значения матриц, то, потребовав, чтобы в их объединение не попадал нуль, мы получим соответствующие достаточные условия невырожденности матриц.

В этой работе мы рассматриваем условия невырожденности, соответствующие усеченным кругам Гершгорина и усеченным множествам Дашница–Зусмановича, и показываем, что удовлетворяющие им матрицы получаются в результате перестановки строк соответственно матриц со строгим диагональным преобладанием (SDD матриц) и матриц Дашница–Зусмановича (DZ матриц). Этот факт объясняет введение терминов PSDD (Permuted SDD) и PDZ (Permuted DZ), которые мы используем для соответствующих матриц, а также позволяет нам получить верхние оценки для нормы $\|A^{-1}Q\|_\infty$, где A – это PSDD или PDZ матрица, а Q – прямоугольная матрица подходящих размеров.

Статья построена следующим образом. §2 посвящен PSDD матрицам, а PDZ матрицы исследуются в §3. В оставшейся части данного

Ключевые слова: PSDD матрицы, PDZ матрицы, SDD матрицы, матрицы Дашница–Зусмановича (DZ матрицы), усеченные круги Гершгорина, усеченные множества Дашница–Зусмановича, l_∞-норма обратной, верхние оценки.

вводного параграфа мы приводим необходимые определение и специфицируем обозначения, используемые в работе.

Определение 1.1. *Говорят, что матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *имеет* строгое диагональное преобладание (*является* SDD (Strictly Diagonally Dominant) *матрицей*), *если*

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определение 1.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Будем говорить, что ее элемент* a_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, строго преобладает в строке i, *если*

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |a_{ik}|.$$

В работе используются следующие обозначения.
$\langle n\rangle = \{1, \ldots, n\}$ – это множество индексов.
S_n – симметрическая группа степени n.
Матрица перестановки $\pi \in S_n$ определяется по формуле

$$P_\pi = \sum_{i\in\langle n\rangle} e_{\pi(i)i},$$

где e_{rs}, $r, s \in \langle n\rangle$, – матричные единицы с 1 на позиции (r, s) и нулями на остальных позициях.
Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, через $\mathrm{Spec}A$ обозначается ее (собственный) спектр, т.е. множество всех ее собственных значений;

$$r_i(A) = \sum_{j\in\langle n\rangle\setminus\{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

– усеченные абсолютные строчные суммы матрицы A;

$$r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}|, \quad j \neq i, \quad i, j \in \langle n\rangle.$$

§2. Усеченные круги Гершгорина и PSDD матрицы

В работе [9] были рассмотрены множества локализации Пароди–Шнайдера, содержащие спектр матрицы (см. [11, 12]) и состоящие из фрагментов ее кругов Гершгорина, также см. [6].

Теорема 2.1 ([9]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\mathrm{Spec}A \subseteq \bigcup_{i\in\langle n\rangle} \left\{\Gamma_i(A) \setminus (\Delta_i(A) \cap \Gamma_i(A))\right\},$$

где при $i = 1, \ldots, n$

$$\Gamma_i(A) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{ii}| \leqslant r_i(A)\}$$

– это круги Гершгорина для A*;*

$$\Delta_i(A) = \left(\bigcup_{j \neq i} \Delta_{ij}(A) \right),$$

и

$$\Delta_{ij}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{jj}| < |a_{ji}| - r_j^i(A) \right\}, \quad j \neq i.$$

Установим условия невырожденности, эквивалентные теореме 2.1. С этой целью введем следующее определение.

Определение 2.1. *Будем говорить, что* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$*,* $n \geqslant 2$*, является* PSDD матрицей*, если для каждого* $i \in \langle n \rangle$

- *либо*

$$|a_{ii}| > r_i(A), \tag{2.1}$$

- *либо* $|a_{ii}| \leqslant r_i(A)$ *и* $\exists j \neq i$*, такое что*

$$|a_{ji}| > |a_{jj}| + r_j^i(A). \tag{2.2}$$

Другими словами, A является PSDD матрицей тогда и только тогда, когда каждый из ее столбцов содержит элемент, который строго преобладает в своей строке.

Ясно, что класс PSDD матриц содержит подкласс SDD матриц, для которых условие (2.1) выполняется при всех $i \in \langle n \rangle$. Также из определения 2.1 немедленно вытекает, что класс PSDD матриц инвариантен относительно перестановок строк и столбцов, т.е. если A – PSDD матрица и P, Q – $n \times n$ - матрицы-перестановки, то PAQ также является PSDD матрицей. В частности, если A – SDD матрица, то PAQ является PSDD матрицей.

В соответствии с определением 2.1, если A является PSDD матрицей, то при любом $i \in \langle n \rangle$ либо $0 \notin \Gamma_i(A)$ в силу (2.1), либо $0 \in \Delta_i(A)$ в силу (2.2), так что, в силу теоремы 2.1, $0 \notin \mathrm{Spec}A$, т.е. A – невырожденная матрица. Итак, мы имеем следующее обобщение классической теоремы Леви–Депланка, см., например, [8, III.2.2.1].

Теорема 2.2. *Если* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*,* $n \geqslant 2$*, является PSDD матрицей, то она невырождена.*

Нам понадобится следующая почти очевидная лемма.

Лемма 2.1. *В каждой строке матрицы* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *имеется не более одного элемента, который в ней строго преобладает.*

Доказательство. Допустим, что в строке i строго преобладают два элемента a_{ir} и a_{is}, где $r \neq s$. Тогда мы имеем

$$|a_{ir}| > \sum_{k\neq r} |a_{ik}| \geqslant |a_{is}| > \sum_{k\neq s} |a_{ik}| \geqslant |a_{ir}|.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Следующая простая лемма является ключевой.

Лемма 2.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *является PSDD матрицей и пусть элементы* $a_{j_i i}$, $i = 1, \dots, n$, *строго преобладают в своих строках. Тогда все индексы* j_i, $i = 1, \dots, n$, *попарно различны, т.е.* $\{j_i : \ i \in \langle n\rangle\} = \langle n\rangle$.

Доказательство. Допустим, что $j_r = j_s$ при некоторых $r \neq s$ и положим $k = j_r = j_s$. Тогда a_{kr} и a_{ks} – различные элементы, и каждый из них строго преобладает в строке k, что невозможно ввиду леммы 2.1. □

Из леммы 2.2 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– PSDD матрица и пусть элементы* $a_{j_i i}$ $i = 1, \dots, n$, *строго преобладают в своих строках. Тогда отображение* $i \to j_i$, $i = 1, \dots, n$, *биективно, т.е.* $j_i = \pi(i)$, $i = 1, \dots, n$, *где* $\pi \in S_n$ *– перестановка на множестве* $\langle n\rangle$.

Теперь мы готовы представить простую характеризацию PSDD матриц, объясняющую аббревиатуру PSDD, означающую Permuted SDD. Также для заданной PSDD матрицы A эта характеризация позволяет оценить сверху норму $\|A^{-1}\|_\infty$ ее обратной.

Теорема 2.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *A является PSDD матрицей;*
(ii) $A = P_\pi B$, *где* $\pi \in S_n$, *а* B *– SDD матрица;*
(iii) $A = CP_\pi$, *где* $\pi \in S_n$, *а* C *– SDD матрица.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Если A является PSDD матрицей, то, по следствию 2.1, найдется такая перестановка $\pi \in S_n$, что элементы

$a_{\pi(i)i}$, $i = 1, \ldots, n$, строго преобладают в своих строках. Это означает, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ диагональный элемент $b_{ii} = a_{\pi(i)i}$ строго преобладает в строке i, т.е. $B = P_\pi^T A$ является SDD матрицей.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Как упомянуто выше, если B – SDD матрица, то из определения 2.1 следует, что $A = P_\pi B$ – PSDD матрица.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Ясно, что матрицы $B = P_\pi^T A$ и $P_\pi(P_\pi^T A)P_\pi^T = AP_\pi^T = C$ одновременно либо являются, либо не являются SDD матрицами. $\square$

Как хорошо известно, SDD матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами, так что из теоремы 2.3 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 2.2. *Всякая* PSDD *матрица явлется невырожденной и может быть преобразована в невырожденную $\mathcal{H}$-матрицу как перестановкой строк, так и перестановкой столбцов.*

В завершение данного параграфа мы получим верхнюю оценку для нормы $\|A^{-1}Q\|_\infty$, где A – PSDD матрица, а Q – прямоугольная матрица подходящих размеров. Для этого мы воспользуемся характеризацией PSDD матриц из теоремы 2.3 и следующим обобщением классической верхней оценки для l_∞-нормы обратной к SDD матрице, независимо предложенной в работах [4] и [13].

Теорема 2.4 ([14], также см. [3]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является SDD матрицей. Тогда для произвольной матрицы $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$, справедлива оценка*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |q_{ik}|}{|a_{ii}| - \sum\limits_{k\neq i} |a_{ik}|}.$$

Искомая верхняя оценка для PSDD матрицы представлена в следующей теореме.

Теорема 2.5. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является PSDD матрицей и пусть элементы $a_{j_i i}$, $i = 1, \ldots, n$, строго преобладают в соответствующих строках. Тогда для произвольной матрицы $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$, имеет место оценка*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |q_{j_i k}|}{|a_{j_i i}| - \sum\limits_{k\neq i} |a_{j_i k}|}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Исходя из следствия 2.1, положим $\pi(i) = j_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда, по предположению, элементы $a_{\pi(i)i}$, $i = 1, \dots, n$, строго преобладают в своих строках, и, как показано в доказательстве теоремы 2.3, матрица $B = P_\pi^T A$ с элементами

$$b_{ik} = a_{\pi(i)k} = a_{j_i k}, \quad i, k = 1, \dots, n, \tag{2.4}$$

имеет строгое диагональное преобладание. Заметим, что

$$A^{-1}Q = B^{-1}(P_\pi^T Q) = B^{-1}\widetilde{Q},$$

где $\widetilde{Q} = (\widetilde{q}_{ik})$,

$$\widetilde{q}_{ik} = q_{\pi(i)k} = q_{j_i k}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m. \tag{2.5}$$

Теперь, применяя теорему 2.4 и используя соотношения (2.4) и (2.5), мы выводим оценку (2.3) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}Q\|_\infty = \|B^{-1}\widetilde{Q}\|_\infty &\leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\widetilde{q}_{ik}|}{|b_{ii}| - \sum\limits_{k \neq i} |b_{ik}|} \\
&= \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |q_{j_i k}|}{|a_{j_i i}| - \sum\limits_{k \neq i} |a_{j_i k}|}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Как нетрудно убедиться, та же оценка (2.4) может быть получена и при использовании представления $A = CP_\pi$ вместо $A = P_\pi B$.

§3. Усеченные множества Дашница–Зусмановича и PDZ матрицы

В этом параграфе мы рассматриваем так называемые PDZ матрицы, ассоциированные с множествами локализации Дашница–Зусмановича, и показываем, что PDZ матрица либо является матрицей Дашница–Зусмановича (DZ матрицей), либо отличается от DZ матрицы транспозицией двух ее строк. Основываясь на этом результате, мы выводим верхнюю оценку для l_∞-нормы обратной к PDZ матрице A, а также и для l_∞-нормы произведения $A^{-1}Q$, где Q – прямоугольная матрица.

DZ матрицы были введены в работе [1] и определяются следующим образом.

Определение 3.1 ([1]). *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется* DZ матрицей*, если существует такой индекс $i \in \langle n \rangle$, что*

$$|a_{ii}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) > |a_{ji}|\, r_i(A) \quad \text{для всех} \quad j \in \langle n \rangle \setminus \{i\}. \tag{3.1}$$

Для удобства мы будем говорить, что $n \times n$ матрица A, удовлетворяющая условию (3.1), является *DZ матрицей с ведущим индексом i*, или же *$DZ_n^{(i)}$ матрицей.*

Как показано в работе [1], любая DZ матрица является невырожденной, и, более того (см., например, [5]), она является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей. Из невырожденности DZ матриц несложно получить следующие множества Дашница–Зусмановича, которые содержат все собственные значения матрицы и содержатся в объединении ее кругов Гершгорина.

Теорема 3.1 ([1]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\mathrm{Spec} A \subseteq \bigcap_{i\in\langle n\rangle} \bigcup_{j\in\langle n\rangle\setminus\{i\}} D_{ij}(A),$$

где

$$D_{ij}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{ii}|\,(|z - a_{jj}| - r_j^i(A)) \leqslant |a_{ji}|\, r_i(A)) \right\}, \quad j \neq i. \tag{3.2}$$

Усеченные множества Дашница–Зусмановича, которые фигурируют в следующей теореме, были предложены в работе [15] и, очевидно, содержатся в множествах Дашница–Зусмановича (3.2).

Теорема 3.2 ([15]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\mathrm{Spec} A \subseteq \bigcap_{i\in\langle n\rangle} \bigcup_{j\in\langle n\rangle\setminus\{i\}} (D_{ij}(A) \setminus \Omega_{ij}(A)),$$

где множества $D_{ij}(A)$ определены в (3.2) и

$$\Omega_{ij}(A) = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{ii}|\,(|z - a_{jj}| + r_j^i(A)) < |a_{ji}|\,(|a_{ij}| - r_i^j(A)) \Big\}, \quad j \neq i.$$

Заметим, что, как легко видеть и как было показано в [15], имеют место включения $\Omega_{ij}(A) \subseteq D_{ij}(A)$, $i, j \in \langle n \rangle$, $j \neq i$.

В связи с теоремой 3.2, естественно выделяется следующий тип матриц.

Определение 3.2. *Будем говорить, что матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *является* PDZ матрицей, *или, более точно,* $\mathrm{PDZ}_n^{(i)}$ матрицей, *если существует такой индекс* $i \in \langle n\rangle$, *что для любого* $j \in \langle n\rangle \setminus \{i\}$ *выполняется либо условие* (3.1), *либо условие*

$$|a_{ii}|\,(|a_{jj}| + r_j^i(A)) < |a_{ji}|\,(|a_{ij}| - r_i^j(A)). \tag{3.3}$$

Индекс i, *фигурирующий в* (3.1) *и* (3.3), *называется* ведущим индексом $\mathrm{PDZ}_n^{(i)}$ *матрицы* A.

Заметим, что из условия (3.3) следует, что либо a_{ij} строго преобладает в строке i, либо a_{ji} строго преобладает в строке j. Следовательно, по крайней мере одна из строк i и j не может иметь строгого диагонального преобладания. При этом по модулю элемент a_{ij} строго больше каждого из остальных внедиагональных элементов i-ой строки.

Ясно, что любая DZ матрица заведомо является и PDZ матрицей.

Для $j = 1, \ldots, n$ определим индексные множества

$$T_A(j) = \left\{ i \neq j : \ |a_{ii}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) > |a_{ji}|\, r_i(A) \right\}$$

и

$$S_A(j) = \left\{ i \neq j : \ |a_{ii}|\,(|a_{jj}| + r_j^i(A)) < (|a_{ji}|\,(|a_{ij}| - r_i^j(A)) \right\}.$$

В терминах множеств $T_A(j)$ и $S_A(j)$, где $j \in \langle n\rangle$, A является $\mathrm{PDZ}_n^{(i)}$ матрицей тогда и только тогда, когда

$$\exists i \in \langle n\rangle : \ \forall j \neq i \quad i \in T_A(j) \cup S_A(j),$$

т.е.

$$\{i\} \subseteq \bigcap_{j\neq i} (T_A(j) \cup S_A(j))\,.$$

Ясно, что из теоремы 3.2 вытекает следующее достаточное условие невырожденности, из которого, в частности, следует невырожденность DZ матриц.

Теорема 3.3 ([15])**.** *Если* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *является PDZ матрицей, то она невырождена.*

Заметим, что, в отличие от DZ матриц, PDZ матрицы могут не быть $\mathcal{H}$-матрицами.

Ниже нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. *Если матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, *удовлетворяет условию* (3.3) *при некоторых* $i, j \in \langle n \rangle$, $j \neq i$, *то условие* (3.3) *не выполняется ни для какого* $k \neq j, i$ *и того же самого* i. *Другими словами,*

$$S_A(j) \cap S_A(k) = \varnothing \quad \text{для всех} \quad j \neq k.$$

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что, наряду с (3.3), для некоторого $k \neq j, i$ выполнено неравенство

$$|a_{ii}| \, (|a_{kk}| + r_k^i(A)) < |a_{ki}| \, (|a_{ik}| - r_i^k(A)). \tag{3.4}$$

Тогда из (3.3) и (3.4) выводим

$$|a_{ij}| > r_i^j(A) \geqslant |a_{ik}| > r_i^k(A) \geqslant |a_{ij}|.$$

Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение. □

Лемма 3.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *пусть* $k \neq i$ *и положим* $B = (b_{ij}) = P_{(i,k)}A$. *Тогда*

$$i \in S_A(k) \quad \Longleftrightarrow \quad i \in T_B(k),$$

т.е.

$$|a_{ii}| \, (|a_{kk}| + r_k^i(A)) < |a_{ki}| \, (|a_{ik}| - r_i^k(A)) \tag{3.5}$$

тогда и только тогда, когда

$$|b_{ii}| \, (|b_{kk}| - r_k^i(B)) > |b_{ki}| \, r_i(B). \tag{3.6}$$

Доказательство. Поскольку $B = (b_{ij}) = P_{(i,k)}A$, для всех значений $r, s \in \langle n \rangle$ мы, очевидно, имеем

$$b_{rs} = \begin{cases} a_{ks}, & r = i, \\ a_{is}, & r = k, \\ a_{rs}, & r \neq i, k. \end{cases} \tag{3.7}$$

Используя соотношения (3.7), мы легко заключаем, что условия (3.5) и (3.6) эквивалентны. □

Лемма 3.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, *и пусть* $B = (b_{ij}) = P_{(i,k)}A$. *Если* $i \in T_A(j) \cap S_A(k)$, *где индексы* $i, j, k \in \langle n \rangle$ *попарно различны, то* $i \in T_B(j) \cap T_B(k)$.

Доказательство. Ввиду леммы 3.2, из условия $i \in S_A(k)$ следует, что $i \in T_B(k)$, так что нам остается показать, что $i \in T_B(j)$. С этой целью установим сперва, что

$$|b_{ji}| \, (|b_{kk}| - r_k^i(B)) < |b_{ki}| \, (|b_{jj}| - r_j^i(B)). \tag{3.8}$$

В силу соотношений (3.7), неравенство (3.8) принимает вид

$$|a_{ii}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) > |a_{ji}|\,(|a_{ik}| - r_i^k(A)), \tag{3.9}$$

тогда как (3.9) очевидным образом вытекает из условия $i \in T_A(j)$, означающего, что

$$|a_{ii}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) > |a_{ji}|\,r_i(A).$$

Наконец, из (3.8) и условия $i \in T_B(k)$, или

$$|b_{ii}|\,(|b_{kk}| - r_k^i(B)) > |b_{ki}|\,r_i(B)$$

мы заключаем, что $b_{ki} \neq 0$, и выводим

$$\begin{aligned} |b_{ii}|\,(|b_{jj}| - r_j^i(B)) &> |b_{ii}|\frac{|b_{ji}|}{|b_{ki}|}\,(|b_{kk}| - r_k^i(B)) \\ &> \frac{|b_{ji}|}{|b_{ki}|}\,|b_{ki}|r_i(B) = |b_{ji}|r_i(B), \end{aligned}$$

что и означает, что $i \in T_B(j)$.

Лемма 3.3 доказана. □

Теперь, основываясь на леммах 3.1–3.3, мы установим основной результат этого параграфа.

Ясно, что из леммы 3.1 непосредственно вытекает следующая характеризация PDZ матриц.

Теорема 3.4. *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *является* $PDZ_n^{(i)}$ *матрицей тогда и только тогда, когда*

- *либо она является* $DZ_n^{(i)}$ *матрицей* (*т.е.* $i \in \bigcap\limits_{j\neq i} T_A(j)$),
- *либо найдется такой индекс* $k \neq i$, *что* $i \in S_A(k) \cap \bigcap\limits_{j\neq i,k} T_A(j)$; *другими словами, условие* (3.1) *выполняется для всех* $j \neq i, k$, *а условие* (3.3) *выполняется для* $j = k$.

Из теоремы 3.4 вытекает следующее свойство PDZ матриц, которое является простым необходимым условием для того, чтобы матрица являлась PDZ матрицей.

Следствие 3.1. *Если* A *–* PDZ *матрица порядка* $n \geqslant 2$, *то она имеет не более одного нулевого диагонального элемента.*

Доказательство. Предположим для определенности, что A есть $\mathrm{PDZ}_n^{(i)}$ матрица. Тогда, по теореме 3.4, условие

$$|a_{ii}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) > |a_{ji}|\,r_i(A)$$

выполняется для как минимум $n-2$ значений j. Теперь нам остается лишь заметить, что из последнего неравенства следует, что $a_{ii} \neq 0$, а также и $a_{jj} \neq 0$. □

Теперь с помощью теоремы 3.4 мы покажем, что если A является $\mathrm{PDZ}_n^{(i)}$ матрицей и не является $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матрицей, то найдется такой индекс $k \neq i$, что $P_{(i,k)}A$ есть $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матрица, т.е. множество всех $\mathrm{PDZ}_n^{(i)}$ матриц состоит из $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матриц и тех матриц, которые получаются из $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матриц перестановкой строки i со строкой k, где $k \neq i$.

Теорема 3.5. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является $PDZ_n^{(i)}$ матрицей, где $i \in \langle n\rangle$. Тогда*
- *либо A есть $DZ_n^{(i)}$ матрица,*
- *либо найдется такой индекс $k \neq i$, что матрица $P_{(i,k)}A$ с переставленными строками i и k есть $DZ_n^{(i)}$ матрица.*

Доказательство. Нам достаточно рассмотреть тот случай, когда A не является $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матрицей. В этом случае, в соответствии с теоремой 3.4, найдется такой индекс $k \neq i$, что $i \in S_A(k)$ и $i \in T_A(j)$ для всех $j \neq i, k$.

Если $n = 2$, то нам остается единственное условие $i \in S_A(k)$, и тогда, ввиду леммы 3.2, $P_{(i,k)}A$ является $\mathrm{DZ}_2^{(i)}$ матрицей.

Пусть теперь $n \geqslant 3$. Положим $B = P_{(i,k)}A$. В этом случае, в силу леммы 3.3, для каждого $j \neq i, k$ из $i \in T_A(j) \cap S_A(k)$ следует, что $i \in T_B(j) \cap T_B(k)$. Таким образом, $i \in \bigcap\limits_{j\neq i} T_B(j)$, т.е. B является $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матрицей, что и требовалось доказать. □

Поскольку, как хорошо известно, DZ матрицы невырождены [1], то из теоремы 3.5 немедленно вытекает теорема 3.3.

Как легко убедиться, если A – DZ матрица, то для любой матрицы-перестановки P матрица P^TAP также является DZ матрицей. Отсюда следует, что для любой матрицы-перестановки P, если PA является DZ матрицей, то и $AP = P^T(PA)P$ также является DZ матрицей. Это замечание приводит нас к следующему результату, вытекающему из теоремы 3.5.

Следствие 3.2. *Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является $PDZ_n^{(i)}$ матрицей и не является $DZ_n^{(i)}$ матрицей, то найдется такой индекс $k \neq i$, что обе матрицы $P_{(i,k)}A$ и $AP_{(i,k)}$ одновременно являются $DZ_n^{(i)}$ матрицами, т.е. PDZ матрица либо является DZ матрицей, либо отличается от DZ матрицы транспозицией двух ее строк или столбцов.*

Замечание 3.1. В связи со следствием 3.2 нужно упомянуть, что если A является $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матрицей, то невырожденная матрица $P_{(i,k)}A$, где $k \neq i$, $k \in \langle n\rangle$, не обязана быть $\mathrm{PDZ}_n^{(i)}$ матрицей. Действительно, пусть $A = I_n$ – единичная матрица порядка $n \geqslant 3$. Тогда A является SDD матрицей и, следовательно, также и $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матрицей. Однако для произвольных индексов $i \neq k$ матрица $B = (b_{ij}) = P_{(i,k)}A = P_{(i,k)}$ не является PDZ матрицей по следствию 3.1, поскольку $b_{ii} = b_{kk} = 0$.

Итак, *множество* PDZ *матриц, не являющихся* DZ *матрицами, строго содержится во множестве матриц, которые получаются из* DZ *матриц как результат транспозиции строк.*

Выведем верхнюю оценку для нормы обратной $\|A^{-1}\|_\infty$ для PDZ матрицы A. Для этого мы воспользуемся следующей известной оценкой нормы обратной к DZ матрице, которая является S-SDD матрицей при $S = \{i\}$.

Теорема 3.6 ([10], также см. [2])**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является $DZ_n^{(i)}$ матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{j\neq i} \left\{ \frac{\max\{|a_{jj}| - r_j^i(A) + r_i(A),\ |a_{ji}| + |a_{ii}|\}}{|a_{ii}|\,[|a_{jj}| - r_j^i(A)] - |a_{ji}|\, r_i(A)} \right\}. \tag{3.10}$$

Основываясь на теоремах 3.5 и 3.6, установим верхнюю оценку для $\|A^{-1}\|_\infty$, где A – PDZ матрица, не являющаяся DZ матрицей.

Теорема 3.7. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – $PDZ_n^{(i)}$ матрица такая, что для некоторого $k \in \langle n\rangle$ выполнены условия*

$$|a_{ii}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) > |a_{ji}|\, r_i(A) \quad \text{для всех} \quad j \neq i, k \tag{3.11}$$

и

$$|a_{ii}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A)) < |a_{ki}|\,(|a_{ik}| - r_i^k(A)). \tag{3.12}$$

Тогда

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{\max\{|a_{kk}| + r_k^i(A) + |a_{ik}| - r_i^k(A),\ |a_{ki}| + |a_{ii}|\}}{|a_{ki}|\,(|a_{ik}| - r_i^k(A)) - |a_{ii}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A))},\right.$$

$$\left.\max_{j\neq i,k}\frac{\max\{|a_{kk}| + r_k^i(A) + |a_{jj}| - r_j^i(A),\ |a_{ki}| + |a_{ji}|\}}{|a_{ki}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) - |a_{ji}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A))}\right\}. \quad (3.13)$$

Доказательство. По теореме 3.5, матрица $B = (b_{ij}) = P_{(i,k)}A$ является $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матрицей. Поскольку

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty &= \max_{i\in\langle n\rangle}\left\{|A^{-1}|e\right\}_i = \max_{i\in\langle n\rangle}\left\{|B^{-1}|P_{(i,k)}e\right\}_i \\ &= \max_{i\in\langle n\rangle}\left\{|B^{-1}|e\right\}_i = \|B^{-1}\|_\infty,\end{aligned}$$

нам остается применить теорему 3.6 к $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матрице B.

Принимая во внимание очевидные соотношения

$$\begin{aligned}&|b_{ii}| = |a_{ki}|, \quad r_i(B) = |a_{kk}| + r_k^i(A),\\ &|b_{kk}| = |a_{ik}|, \quad r_k^i(B) = r_i^k(A), \quad |b_{ki}| = |a_{ii}|,\end{aligned}$$

и при $j \neq i, k$ соотношения

$$|b_{jj}| = |a_{jj}|, \quad r_j^i(B) = r_j^i(A), \quad |b_{ji}| = |a_{ji}|,$$

мы заключаем, что при $j \neq i, k$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}|b_{jj}| - r_j^i(B) + r_i(B) &= |a_{jj}| - r_j^i(A) + |a_{kk}| + r_k^i(A),\\ |b_{ji}| + |b_{ii}| &= |a_{ji}| + |a_{ki}|,\end{aligned}$$

и

$$|b_{ii}|\,(|b_{jj}| - r_j^i(B)) - |b_{ji}|\,r_i(B) = |a_{ki}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) - |a_{ji}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A)),$$

тогда как при $j = k$ мы имеем

$$\begin{aligned}|b_{kk}| - r_k^i(B) + r_i(B) &= |a_{ik}| - r_i^k(A) + |a_{kk}| + r_k^i(A),\\ |b_{ki}| + |b_{ii}| &= |a_{ii}| + |a_{ki}|,\end{aligned}$$

и

$$|b_{ii}|\,(|b_{kk}| - r_k^i(B)) - |b_{ki}|r_i(B) = |a_{ki}|\,(|a_{ik}| - r_i^k(A)) - |a_{ii}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A)).$$

Теперь требуемая оценка (3.13) немедленно следует из приведенных выше соотношений и теоремы 3.6. □

Заметим, что в том случае, когда в теореме 3.7 матрица A удовлетворяет дополнительному условию

$$|a_{kk}| + r_k^i(A) \geqslant |a_{ki}|, \tag{3.14}$$

оценка (3.13) упрощается следующим образом:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{|a_{kk}| + r_k^i(A) + |a_{ik}| - r_i^k(A)}{|a_{ki}|\,(|a_{ik}| - r_i^k(A)) - |a_{ii}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A))},\right.$$
$$\left.\max_{j\neq i,k} \frac{|a_{kk}| + r_k^i(A) + |a_{jj}| - r_j^i(A)}{|a_{ki}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) - |a_{ji}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A))}\right\}. \tag{3.15}$$

В том же случае, когда при всех $j \neq i,k$ справедливо неравенство $|a_{jj}| \leqslant r_j(A)$, т.е.

$$|a_{ji}| \geqslant |a_{jj}| - r_j^i(A), \tag{3.16}$$

оценка (3.13) принимает вид

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{|a_{ki}| + |a_{ii}|}{|a_{ki}|\,(|a_{ik}| - r_i^k(A)) - |a_{ii}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A))},\right.$$
$$\left.\max_{j\neq i,k} \frac{|a_{ki}| + |a_{ji}|}{|a_{ki}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) - |a_{ji}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A))}\right\}. \tag{3.17}$$

Действительно, в обозначениях из доказательства теоремы 3.7, условие (3.14) сводится к неравенству

$$|b_{ii}| \leqslant r_i(B). \tag{3.14a}$$

Поскольку первый знаменатель в (3.13) положителен, из (3.14) следует, что

$$|a_{ik}| - r_i^k(A) > |a_{ii}|. \tag{3.18}$$

Теперь, суммируя (3.14) и (3.18), мы получаем

$$|a_{kk}| + r_k^i(A) + |a_{ik}| - r_i^k(A) > |a_{ki}| + |a_{ii}|. \tag{3.19}$$

Поскольку B является DZ_n^i матрицей, то из неравенства (3.14a) с необходимостью следует, что

$$|b_{jj}| > r_j(B) \quad \text{для всех} \quad j \neq i,$$

так что при $j \neq i,k$ мы имеем $|a_{jj}| > r_j(A)$, или

$$|a_{jj}| - r_j^i(A) > |a_{ji}|. \tag{3.20}$$

Из (3.14) и (3.20) мы получаем, что при всех $j \neq i, k$ справедливо неравенство

$$|a_{kk}| + r_k^i(A) + |a_{jj}| - r_j^i(A) > |a_{ki}| + |a_{ji}|. \tag{3.21}$$

Неравенства (3.19) и (3.21) доказывают (3.15).

Рассмотрим тот случай, когда выполнено условие (3.16), т.е. $|b_{jj}| - r_j^i(B) \leqslant |b_{ji}|$ при всех $j \neq i, k$. Поскольку B – DZ_n^i матрица, отсюда вытекает, что $|b_{ii}| > r_i(B)$, т.е.

$$|a_{ki}| > |a_{kk}| + r_k^i(A). \tag{3.22}$$

Из неравенств (3.22) и (3.16) следует, что

$$|a_{ki}| + |a_{ji}| > |a_{kk}| + r_k^i(A) + |a_{jj}| - r_j^i(A), \tag{3.23}$$

тогда как из (3.11) и (3.16) вытекает, что $a_{ji} \neq 0$ и

$$|a_{ii}| > r_i(A) \geqslant |a_{ik}|,$$

так что

$$|a_{ii}| \geqslant |a_{ik}| - r_i^k(A). \tag{3.24}$$

Теперь из (3.22) и (3.24) мы выводим, что

$$|a_{ki}| + |a_{ii}| > |a_{kk}| + r_k^i(A) + |a_{ik}| - r_i^k(A). \tag{3.25}$$

Совместно соотношения (3.23) и (3.25) доказывают, что в рассматриваемом случае оценка (3.13) сводится к (3.17).

В заключение, мы обобщим оценку теоремы 3.7 на случай $\|A^{-1}Q\|_\infty$, где Q – прямоугольная матрица. С этой целью мы воспользуемся следующим аналогом теоремы 3.6, который является частным случаем более общего результата, установленного в работе [7] для S-SDD матриц.

Теорема 3.8 ([7], также см. [3])**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – $DZ_n^{(i)}$ матрица. Тогда для произвольной матрицы $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$, справедлива оценка*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{j\neq i} \left\{ \frac{\xi_{ij}(A,Q)}{|a_{ii}|\,[|a_{jj}| - r_j^i(A)] - |a_{ji}|\; r_i(A)} \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{ij}(A,Q) = \max\{&(|a_{jj}| - r_j^i(A))\, R_i(Q) + r_i(A)\, R_j(Q), \\ &|a_{ji}|\, R_i(Q) + |a_{ii}|\, R_j(Q)\}, \quad i,j \in \langle n\rangle, \quad i \neq j, \end{aligned} \tag{3.26}$$

и

$$R_i(Q) = \sum_{j=1}^{m} |q_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 3.9. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – $PDZ_n^{(i)}$ *матрица, такая что при некотором* $k \neq i$ *выполнены условия*

$$|a_{ii}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) > |a_{ji}|\,r_i(A) \quad \textit{для всех} \quad j \neq i, k$$

и

$$|a_{ii}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A)) < |a_{ki}|\,(|a_{ik}| - r_i^k(A)).$$

Тогда

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{\xi_{ik}(B,\widetilde{Q})}{|a_{ki}|\,(|a_{ik}| - r_i^k(A)) - |a_{ii}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A))},\right.$$
$$\left.\max_{j\neq i,k}\frac{\xi_{ij}(B,\widetilde{Q})}{|a_{ki}|\,(|a_{jj}| - r_j^i(A)) - |a_{ji}|\,(|a_{kk}| + r_k^i(A))}\right\},$$

где

$$\xi_{ik}(B,\widetilde{Q}) = \max\left\{(|a_{kk}| + r_k^i(A))\,R_i(Q) + (|a_{ik}| - r_i^k(A))\,R_k(Q),\right.$$
$$\left.|a_{ki}|\,R_i(Q) + |a_{ii}|\,R_k(Q)\right\},$$

и при $j \neq i, k$

$$\xi_{ij}(B,\widetilde{Q}) = \max\left\{(|a_{jj}| - r_j^i(A))\,R_k(Q) + (|a_{kk}| + r_k^i(A))\,R_j(Q),\right.$$
$$\left.|a_{ji}|\,R_k(Q) + |a_{ki}|\,R_j(Q)\right\}.$$

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 3.7. В силу теоремы 3.5, матрица $B = (b_{ij}) = P_{(i,k)}A$ является $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матрицей. Обозначим $\widetilde{Q} = P_{(i,k)}Q$. Тогда будем иметь

$$A^{-1}Q = B^{-1}P_{(i,k)}Q = B^{-1}\widetilde{Q}.$$

Поэтому для доказательства нужной оценки достаточно применить оценку теоремы 3.8 к $\mathrm{DZ}_n^{(i)}$ матрице B и прямоугольной матрице $\widetilde{Q}$ и учесть соотношения для элементов матрицы B, приведенные в доказательстве теоремы 3.7, а также очевидные соотношения

$$\begin{aligned}
R_i(\widetilde{Q}) &= R_k(Q),\\
R_k(\widetilde{Q}) &= R_i(Q),\\
R_j(\widetilde{Q}) &= R_j(Q), \quad j \neq i, k.
\end{aligned} \qquad \square$$

Список литературы

1. Л. С. Дашниц, М. С. Зусманович, *О некоторых критериях регулярности матриц и локализации их спектра.* — Ж. вычисл. мат. мат. физ. **10**, No. 5 (1970), 1092–1097.
2. Л. Ю. Колотилина, *О матрицах Дашница–Зусмановича (DZ) и матрицах типа Дашница–Зусмановича (DZT) и их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 145–165.
3. Л. Ю. Колотилина, *Верхние оцнки для* $\|A^{-1}Q\|_\infty$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 77–87.
4. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
5. L. Cvetković, *H-matrix theory vs. eigenvalue localization.* — Numer. Algorithms **42** (2006), 229–245.
6. Suhua Li, Chaoqian Li, Yaotang Li, *Exclusion sets for eigenvalues of matrices.* — [math.SP] 23 May 2017. `arXiv:1705/01758v2`
7. Y. Li, Y. Wang, *Schur complement-based infinity norm bounds for the inverse of GDSDD matrices.* — Mathematics **10** (2022), 186.
8. M. Marcus, H. Minc, *A Syrvey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1964.
9. A. Melman, *Gershgorin disk fragments.* — Math. Mag. **83** (2010), 123–129.
10. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of* SDD *and* $\mathcal{S}$-SDD *matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.
11. M. Parodi, *Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées.* — Mémor. Sci. Math. Soc. **118** (1952).
12. H. Schneider, *Regions of exclusion for the latent roots of a matrix.* — Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 320–322.
13. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
14. X. R. Yong, *Two properties of diagonally dominant matrices.* — Numer. Linear Algebra **3** (1996), 173–177.
15. Jianxing Zhao, Lili She, *Exclusion sets in Dashnic–Zusmanovich localization sets.* — J. Ineq. Appl. 2019:228 (2019).

Kolotilina L. Yu. Reduced eigenvalue inclusion sets and related classes of nonsingular matrices.

The paper considers the classes of nonsingular matrices, referred to as PSDD and PDZ matrices, that are associated with the Gerschgorin disks and Dashnic–Zusmanovich eigenvalue inclusion sets from which some subsets are excluded. It is demonstrated that PSDD and PDZ matrices are obtained by permuting rows of SDD and Dashnic–Zusmanovich (DZ) matrices, respectively. Based on these results, for PSDD and PDZ matrices A upper bounds for the l_∞-norm of the product $A^{-1}Q$ of the inverse matrix times a rectangular matrix Q are derived.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 7 октября 2024 г.