А. А. Булатов, Конечные подрешетки в решетке клонов,
Алгебра и логика, 1994, том 33, номер 5, 514–549

https://www.mathnet.ru/al2280

Алгебра и логика, 33, N 4 (1994), 514—549

УДК 512.57

КОНЕЧНЫЕ ПОДРЕШЕТКИ В РЕШЕТКЕ КЛОНОВ

А. А. БУЛАТОВ

1. Введение. Формулировка результатов

Как явствует из названия работы, основным объектом нашего рассмотрения будет решетка клонов конечнозначных функций. Все функции, с которыми мы будем иметь дело, определены на множестве $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Напомним, что клон — это множество k-значных функций, содержащее все проекции (т.е. функции вида $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$) и замкнутое относительно всевозможных суперпозиций. Все клоны k-значных функций образуют решетку, которая обозначается обычно через $\mathcal{L}_k$. Кроме термина "клон" часто используют близкое понятие итеративной алгебры [1], т.е. множества k-значных функций, замкнутого относительно суперпозиции, перестановок и отождествлений переменных, а также добавления фиктивных аргументов. Заметим, что итеративные алгебры, содержащие все проекции, — это в точности клоны. Хотя все результаты в данной работе сформулированы для решеток клонов, доказательства нам будет удобнее вести на языке итеративных алгебр. Решетка всех итеративных алгебр обозначается через $\mathcal{L}'_k$. Отметим, что $\mathcal{L}_k$ изоморфна главному фильтру в $\mathcal{L}'_k$, порожденному алгеброй проекций. Итеративная алгебра всех k-значных функций обозначается через P_k. Как обычно, $\langle F \rangle$ обозначает итеративную алгебру, порожденную множеством $F \subseteq P_k$.

Одной из естественных задач, возникающих при изучении такой сложной решетки, как $\mathcal{L}_k$, является задача о нахождении семейств ее подрешеток того или иного типа. Для решетки $\mathcal{L}_2$ указанную задачу можно считать решенной, поскольку имеется полное описание $\mathcal{L}_2$ [2]. В отношении $\mathcal{L}_k$ при $k \geq 3$ существуют лишь немногочисленные продвижения в решении данной задачи. В частности, в [3] показано, что решетка подмножеств счетного множества представима интервалом в $\mathcal{L}_3$ (а значит, и в $\mathcal{L}_k$ для любого $k \geq 3$, так как $\mathcal{L}_3$ изоморфна некоторой подрешетке в $\mathcal{L}_k$). Отсюда следует вложимость в $\mathcal{L}_3$ любой не более чем счетной дистрибутивной решетки. В [4] отмечено, что любая конечная решетка является подрешеткой в $\mathcal{L}_k$ для подходящего k. Далее, в [5] показано, что решетка подполугрупп свободной полугруппы счетного ранга изоморфно вкладывается в $\mathcal{L}_4$. Отсюда, используя результаты работ [6, 7], мы получаем вложимость в $\mathcal{L}_k$, $k \geq 3$, широкого класса конечных решеток.

Отправным пунктом данной работы был вопрос о вложимости произвольной конечной решетки в $\mathcal{L}_k$ для фиксированного числа k. Удается, однако, получить несколько более широкое утверждение, из которого следует решение задачи о нахождении конечных подрешеток в $\mathcal{L}_k$. Основным результатом является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Любая решетка, являющаяся не более чем счетным прямым произведением конечных решеток, изоморфно вложима в $\mathcal{L}_4$.*

Эта теорема дает нам, в частности, примеры континуальных решеток, вложимых в $\mathcal{L}_4$. Если же мы ограничимся лишь счетными решетками указанного вида, то получим хорошо известный класс счетных финитно аппроксимируемых решеток.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любая счетная финитно аппроксимируемая решетка изоморфно вложима в $\mathcal{L}_4$.*

Известно, что финитно аппроксимируемой является решетка, свободная в многообразии, порождаемом своими конечными членами. Отсюда мы получаем следующую серию примеров подрешеток в $\mathcal{L}_4$. Пусть $\mathcal{X}$—многообразие решеток, порождаемое своими конечными членами.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Свободная в $\mathcal{X}$ решетка счетного ранга изоморфно вложима в $\mathcal{L}_4$.*

Заметим, что вложимость в $\mathcal{L}_4$ абсолютно свободной решетки счетного ранга вытекает из результатов [5—7].

СЛЕДСТВИЕ 3. *Любая конечная решетка изоморфно вложима в $\mathcal{L}_4$.*

Из следствия 3 получаем еще одно важное свойство решетки, а именно выполнимость на ней каких-либо тождеств или квазитождеств.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Решетка $\mathcal{L}_4$ не удовлетворяет никакому нетривиальному квазитождеству.*

Невыполнимость в $\mathcal{L}_3$, а значит, и в $\mathcal{L}_k$ для $k \geq 3$ нетривиальных тождеств была доказана в [5].

Отметим одно следствие из доказательства теоремы, связанное с так называемыми моноидными интервалами. Напомним, что *моноидным интервалом* ($\mathrm{Int}\,(M)$) для моноида M преобразований множества E_k называется семейство клонов, у которых множество унарных функций совпадает с M (это семейство является интервалом в $\mathcal{L}_k$). В литературе (напр., [8]) рассматривались вопросы, связанные со строением (в частности, мощностью) моноидных интервалов. Все клоны, участвующие в построенном в доказательстве теоремы вложении, имеют одно и то же множество M унарных функций, где $M = \{e_1^1, f\}$, $f(2) = 2$ и $f(x) = 0$, если $x \neq 2$. Поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ 5. *Любая решетка, являющаяся не более чем счетным прямым произведением конечных решеток, изоморфно вложима в* $\mathrm{Int}\,(M)$.

Это свойство, вероятно, справедливо не только для указанного моноида M, но и для каких-нибудь других моноидов преобразований.

Вызывает большой интерес вопрос о справедливости утверждения теоремы для решетки $\mathcal{L}_3$. Другими словами, принципиально ли ограничение $k \geq 4$ в теореме или это всего лишь недостаток техники автора? До сих пор не известно никаких существенных различий в решеточных свойствах решеток $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_k$ при $k > 3$. У автора, однако, нет никаких гипотез по этому вопросу.

Прежде чем приступить непосредственно к доказательству теоремы, мы кратко изложим метод и схему этого доказательства. Через $\mathrm{Sub}\,L$ ($\mathrm{Sub}_{0,1}L$) обозначается решетка подрешеток (соответственно

0, 1-подрешеток) решетки L. В [9] показано, что любая конечная решетка изоморфно вложима в $SubP(A)$, где $P(A)$ — решетка подмножеств подходящего конечного множества A. Легко заметить, что $\mathrm{Sub}P(A)$ вложима в $\mathrm{Sub}_{0,1}P(B)$, где $B = A\cup\{b,c\}$, $b,c\notin A$. Поэтому любая конечная решетка вкладывается в решетку 0, 1-подрешеток подходящей конечной булевой алгебры. Таким образом, нам достаточно вкладывать прямые произведения решеток вида $\mathrm{Sub}_{0,1}P(A)$, где A — конечное множество. Поскольку из включения $A\subseteq B$ следует, что $\mathrm{Sub}_{0,1}P(A)$ является подрешеткой в $\mathrm{Sub}_{0,1}P(B)$, то нам достаточно построить вложение в $\mathcal{L}_4$ решетки $\prod_{l\in N}\mathrm{Sub}_{0,1}P(A_l)$, где $A_l = \{0,1\}^l$, а $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел.

Опишем теперь грубую схему доказательства. В разделе 2 мы определим следующие три множества функций (по возрастанию): множество $\mathcal{M}$, класс $\mathcal{M}'$ функций, которые мы будем называть *монотонно разбиваемыми*, и класс разбиваемых функций, а также докажем некоторые свойства функций из этих классов. Функции, из которых состоит самый большой из указанных классов (они названы нами *разбиваемыми*), обладают многими удобными свойствами. Все рассуждения в разделах 2—4 будем вести внутри класса разбиваемых функций.

Большую роль в доказательстве будет играть самое маленькое из перечисленных множеств — $\mathcal{M}$. Оно состоит из функций, очень тесно связанных с подмножествами из $\{0,1\}^l$ для различных натуральных l. Каждому подмножеству $B \subseteq \{0,1\}^l$ будет соответствовать единственная функция $f_B\in\mathcal{M}$, обратно, каждой функции из $\mathcal{M}$ мы поставим в соответствие единственное подмножество из $\{0,1\}^l$ для подходящего l. Специальные "правильные" термы от функций из $\mathcal{M}$ в сигнатуре итеративной алгебры соответствуют до некоторой степени операциям объединения и пересечения множеств (см. тождества (1$\cap$) и (1$\cup$)). Кроме того, функции класса $\mathcal{M}$ обладают полезными свойствами (одно из них мы называем *нумеруемостью*), позволяющими в некотором смысле различать их переменные при любых перестановках (лемма 1).

С помощью класса $\mathcal{M}$ мы продемонстрируем, как можно закодировать подмножества из $\{0,1\}^l$ с помощью функций. К сожалению, для построения нужного нам вложения класса $\mathcal{M}$ недостаточно, и нам придется ввести класс $\mathcal{M}'$ монотонно разбиваемых функций, устроенных более сложно. Класс $\mathcal{M}'$ содержит множество $\mathcal{M}$ (см. лемму 6), все его функции разбиваемы и ведут себя аналогично функциям из $\mathcal{M}$ (ср. тождества (1$\cap$), (1$\cup$) и лемму 18). А сам класс $\mathcal{M}$ пригодится нам, когда мы будем доказывать, что $\mathcal{M}'$ непусто (лемма 6), и при доказательстве взаимной однозначности построенного отображения.

После этого с помощью некоторых вспомогательных множеств для каждой последовательности $\Theta = (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots)$, где $\mathcal{Q}_l$ являются 0,1-подрешетками из $P(\{0,1\}^l)$, мы определим множество $\mathcal{M}'_\Theta \subseteq \mathcal{M}'$. Для множества $A \subseteq P_4$ через $\Omega(A)$ будем обозначать множество функций, полученных из функций, содержащихся в A, с помощью перестановок и добавления фиктивных переменных. Вложение φ решетки $\prod_{l\in N} \mathrm{Sub}_{0,1} P(A_l)$ в интервал $[\langle\Lambda\rangle, \langle\mathcal{M}'\rangle]$, определяемое равенством $\varphi(\Theta) = \langle\mathcal{M}'_\Theta \cup \Lambda\rangle$, где $\Lambda = \langle\mathcal{M}'\rangle \setminus \Omega(\mathcal{M}')$, будет искомым.

В разделе 4 мы докажем, что φ — верхний гомоморфизм. Для этого мы сначала покажем в разделе 3, что при некоторых "хороших" подстановках и отождествлениях функций из $\mathcal{M}'$ (из $\mathcal{M}'_\Theta$) снова получаются функции из $\mathcal{M}'$ ($\mathcal{M}'_\Theta$) (леммы 8, 10, 13—17). Далее (в разделе 4), будет показано, как из функций, принадлежащих множествам $\mathcal{M}'_\Theta$ и $\mathcal{M}'_\Upsilon$, (Θ,Υ — последовательности 0,1-подрешеток) сконструировать любую функцию из $\mathcal{M}'_{\Theta\vee\Upsilon}$. Это и будет означать, что φ — верхний гомоморфизм (см. леммы 18—21 и предложение 1).

В разделе 5 для доказательства взаимной однозначности отображения φ и сохранения им решеточных пересечений нам понадобится более подробно изучить функции из множества Λ. Мы выделим из Λ систему Λ' неразбиваемых функций и охарактеризуем их с помощью некоторых условий (D1)—(D8). Далее будет показано, что функции из $\langle\mathcal{M}'\rangle$, удовлетворяющие условиям (D1)–(D8), образуют подалгебру и, более того, при "плохих" подстановках функций из $\mathcal{M}' \cup \mathcal{N}$ ($\mathcal{N} = \Lambda \setminus \Lambda'$) и "плохих" отождествлениях их аргументов получаются функции, удовлетворяющие (D1)—

(D8). Кроме того, при подстановках $f \circ g$ в существенную переменную, где одна из функций f или g удовлетворяет (D1)—(D8), а вторая принадлежит $\langle \mathcal{M}' \rangle$, снова получается функция, удовлетворяющая условиям (D1)—(D8) (леммы 24—29). Отсюда мы получим равенство $\langle \mathcal{M}'_\Theta \cup \Lambda \rangle = \Omega(\mathcal{M}'_\Theta) \cup \Lambda$, а уже из него будет вытекать взаимная однозначность φ и сохранение им решеточных пересечений.

2. Построение вложения

В дальнейших рассуждениях встретятся многие объекты различной природы. Поэтому нам будет удобно принять ряд соглашений относительно обозначений. Элементы множества $\{0,1\}^l$, l — натуральное число, мы будем обозначать малыми греческими буквами. Каждый такой элемент α является последовательностью из l элементов множества $\{0,1\}$. Через $\alpha(i)$ будем обозначать i-й элемент этой последовательности. Последовательности элементов множества E_4 (обычно это будут наборы значений переменных функции) мы будем называть *кортежами* и обозначать малыми латинскими буквами с чертой сверху. Компоненты кортежа $\overline{a}$ будут выделяться нижними индексами.

2.1. Нумеруемость. Зафиксируем натуральное число l. Пусть $l^* = 2l + 3$.

Кортеж $\overline{v}^j = (3, \ldots, 3, 2, 3, \ldots, 3)$ длины l^*, где двойка стоит на j-м месте, назовем j-м *l-выделяющим.*

Кортеж $\overline{s}^j = (3, \ldots, 3, 2, 2, 3, \ldots, 3)$ длины l^*, где двойки стоят на j-м и $j+1$-м местах, назовем j-м *l-связывающим.*

Для удобства множество $\{1, \ldots, n\}$ мы будем обозначать через $\underline{n}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция и $I \subseteq \underline{n}$. *Нумерацией*[1] или *$l$-нумерацией* множества переменных функции f с индексами из I назовем отображение $\nu : I \to \underline{l^*}$, обладающее следующим свойством. Для каждого l-выделяющего (l-связывающего) кортежа $\overline{v}^j$ ($\overline{s}^j$) если $x_i = 3$ при $i \notin I$ и

[1] Этот термин в данной работе не связан с понятием нумерации в теории алгоритмов. Его использование является здесь удобным и отражает существо дела. Коллизий с алгоритмическим значением слова "нумерация" не возникнет.

$x_i = v^j_{\nu(i)}$ $(s^j_{\nu(i)})$ при $i{\in}I$, то $f(x_1,\ldots,x_n) = 3$. Множество переменных с индексами из I (далее для удобства мы не будем различать переменную и ее индекс, т.е. будем говорить о переменных из множества I) назовем *нумеруемым* (*l-нумеруемым*), если существует его нумерация (l-нумерация).

Кортеж $(a_i)_{i\in I}$ будем называть *ν-нумеруемым* (или, если это не приводит к двусмысленности, *нумеруемым* либо *l-нумеруемым*), если для любых $i,j{\in}I$ из $\nu(i) = \nu(j)$ следует $a_i = a_j$. Если ν является отображением "на",то для нумеруемого кортежа $(a_i)_{i\in I}$ через $\nu(\overline{a})$ обозначим кортеж $(b_u)_{u\in\underline{l^*}}$ такой, что $b_{\nu(i)} = a_i$. Везде, где это возможно, мы будем опускать указание на число l.

Заметим, что если множество переменных из $I{\subseteq}\underline{n}$ нумеруемо, то оно имеет не единственную нумерацию. В самом деле, если ν — нумерация множества I, то отображение ν' такое, что $\nu'(i) = l^* - \nu(i) + 1$ для $i{\in}I$, также является нумерацией I. Это легко следует из определения выделяющих и связывающих кортежей (все кортежи можно "перевернуть“). Так определенную нумерацию ν' мы будем называть *противоположной* к ν. Если множество I имеет только две взаимно противоположные нумерации, то мы скажем, что оно *однозначно нумеруемо.*

2.2. Множество $\mathcal{M}$. Для элемента $\alpha{\in}\{0,1\}^l$ через $\mathrm{cod}(\alpha)$ обозначим кортеж $(a_i)_{i\in\underline{l^*}}$, где

$$a_i = \begin{cases} 2, & \text{если } i = l+1,\ l+2,\ l+3; \\ 2, & \text{если либо } \alpha(i) = 0 \text{ и } i \le l, \text{ либо } \alpha(l^* - i + 1) = 0 \\ & \text{и } i \ge l+4; \\ 3, & \text{если либо } \alpha(i) = 1 \text{ и } i \le l, \text{ либо } \alpha(l^* - i + 1) = 1 \\ & \text{и } i \ge l+4. \end{cases}$$

Кортеж $\mathrm{cod}(\alpha)$ назовем *кодирующим* для элемента α. Заметим, что каждый кодирующий кортеж, в отличие от выделяющих и связывающих, содержит не менее трех двоек.

Пусть теперь $B \subseteq \{0,1\}^l$. Через f_B обозначим функцию вида:

$$f_B(x,y,z_1,\dots,z_l) = \begin{cases} 3, & \text{если } x = y = 3,\ (z_i)_{i\in \underline{l^*}} = \overline{v}^j \\ & \text{или } \overline{s}^j \text{ для некоторого } j \in \underline{l^* - 1}; \\ 2, & \text{если } z_i \in \{2,3\},\ x = 2 \text{ и либо } y = 2, \\ & \text{либо } y = 1 \text{ и } (z_i)_{i\in \underline{l^*}} = \mathrm{cod}(\alpha),\ \alpha \in B; \\ 1, & \text{если } z_i \in \{2,3\} \text{ и либо } x = 1,\ y = 1,2, \\ & \text{либо } x = 2,\ y = 1 \text{ и не имеет места} \\ & \text{предыдущий случай}; \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Функция f_B при $x = 2$, $y = 1$ действует аналогично характеристической функции, "выбирая" кодирующие кортежи элементов множества B.

Множество всех функций вида f_B, где $B \subseteq \{0,1\}^l$, обозначим через $\mathcal{M}_l$, кроме того, положим $\mathcal{M} = \bigcup_{t\in \mathbf{N}} \mathcal{M}_t$.

Заметим, что для произвольных $B_1, B_2 \subseteq \{0,1\}^l$ справедливы следующие равенства:

$$\begin{array}{lrl} & & f_{B_1}(f_{B_2}(x,y,z_1,\dots,z_{l^*}),y,z_1,\dots z_{l^*}) = \\ (1\cap) & = & f_{B_2}(f_{B_1}(x,y,z_1,\dots,z_{l^*}),y,z_1,\dots,z_{l^*}) = \\ & = & f_{B_1\cap B_2}(x,y,z_1,\dots,z_{l^*}) \end{array}$$

и

$$\begin{array}{lrl} & & f_{B_1}(x,f_{B_2}(x,y,z_1,\dots,z_{l^*}),z_1,\dots,z_{l^*}) = \\ (1\cup) & = & f_{B_2}(x,f_{B_1}(x,y,z_1,\dots,z_{l^*}),z_1,\dots,z_{l^*}) = \\ & = & f_{B_1\cup B_2}(x,y,z_1,\dots,z_{l^*}). \end{array}$$

Равенства $(1\cap)$ и $(1\cup)$ нетрудно проверить, используя определение функций вида f_B.

ЛЕММА 1. *Множество $\{z_1,\dots,z_{l^*}\}$ переменных функции $f_B(x,y,z_1,\dots,z_{l^*})$, где $B \subseteq \{0,1\}^l$, однозначно нумеруемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν_0 — тождественное отображение множества $\underline{l^*}$. Непосредственно из определения функции f_B вытекает, что ν_0 — нумерация множества $\underline{l^*}$ переменных функции f_B. Пусть ν —

произвольная нумерация этого множества. Нам нужно доказать, что либо $\nu = \nu_0$, либо $\nu = \nu'$.

По определению, для любого выделяющего или связывающего кортежа $\bar{b}$ функция f_B на наборе $x = y = 3$, $z_i = b_{\nu(i)}$ при $i \in \underline{l^*}$ принимает значение 3. Нумерация ν должна удовлетворять следующим требованиям:

а) $\nu(\underline{l^*}) = \underline{l^*}$. Действительно, если $j \in \underline{l^*} \setminus \nu(\underline{l^*})$, то для $\bar{b} = \bar{v}^j$ функция f_B на соответствующем наборе принимает значение 0, так как $x = y = 3$, $z_i = b_{\nu(i)} = 3$ для всех $i \in \underline{l^*}$.

б) Для каждого $j \in \underline{l^* - 1}$ либо $\nu^{-1}(j+1) = \nu^{-1}(j)+1$, либо $\nu^{-1}(j+1) = \nu^{-1}(j) - 1$. Пусть $\bar{b} = \bar{s}^j$, тогда на соответствующем ему наборе переменных функция f_B принимает значение 3. Так как ν взаимно однозначно, то $(z_i)_{i \in \underline{l^*}} = (b_{\nu(i)})_{i \in \underline{l^*}}$ — связывающий кортеж (поскольку среди компонент $\bar{b}$ в точности две равны 2, а остальные — 3). Предположим, что $(b_{\nu(i)})_{i \in \underline{l^*}} = \bar{s}^{j'}$. Тогда $b_{\nu(j')} = b_{\nu(j'+1)} = 2$ и поэтому $\{j, j+1\} = \{\nu(j'), \nu(j'+1)\}$. Отсюда и вытекает нужное условие.

в) Нумерация ν равна либо ν_0, либо ν_0'. Предположим сначала, что $\nu^{-1}(2) = \nu^{-1}(1) + 1$. Тогда $\nu^{-1}(j+1) = \nu^{-1}(j) + 1$ для всех $j \in \underline{l^* - 1}$. Действительно, пусть мы доказали это для $j-1$, т.е. $\nu^{-1}(j) = \nu^{-1}(j-1)+1$. Если $\nu^{-1}(j+1) = \nu^{-1}(j) - 1$, то $\nu^{-1}(j+1) = \nu^{-1}(j) - 1 = \nu^{-1}(j-1)$, что противоречит взаимной однозначности ν^{-1}. Отсюда $\nu^{-1}(l^*) = \nu^{-1}(1) + l^* - 1 \leq l^*$, поэтому $\nu^{-1}(1) = 1$ и, согласно полученным нами равенствам, ν — тождественное отображение.

Аналогично можно показать, что если $\nu^{-1}(2) = \nu^{-1}(1) - 1$, то $\nu = \nu_0'$. Лемма 1 доказана.

2.3. Разбиваемые функции. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ назовем *l-разбиваемой*, если существует разбиение $W \cup Z$ множества $\underline{n}$, $|W| \geq 1$, $|Z| \geq l^*$, такое, что

(R1) если $f(\bar{x}) = 3$, то $x_i = 3$ при $i \in W$ и $x_i \in \{2, 3\}$ при $i \in Z$;

(R2) $f(\bar{x}) \in \{1, 2\}$ тогда и только тогда, когда $\{x_i \mid i \in W\} \subseteq \{1, 2\}$ и $\{x_i \mid i \in Z\} \subseteq \{2, 3\}$;

(R3) все нумерации множества Z являются l-нумерациями, и существует нумерация ν_0 множества Z такая, что для любой нумерации ν

множества Z и любого $i \in Z$ либо $\nu(i) = \nu_0(i)$, либо $\nu(i) = \nu_0'(i)$.

(R4) $f(3, \ldots, 3) = 0$.

Функцию мы будем называть *разбиваемой*, если она l-разбиваема для некоторого l. Разбиваемые функции имеют два сорта переменных. Подстановка разбиваемых функций в переменные первого сорта (множество W), как мы увидим ниже, не нарушает свойства быть разбиваемой, напротив, подстановка в переменную второго сорта (множество Z) никогда не дает разбиваемой функции. Кроме того, множество Z нумеруемо, и все его нумерации очень мало отличаются друг от друга. Эти свойства разбиваемых функций позволяют их аргументам сохранять "индивидуальность" при перестановках и аналогичны свойствам функций из $\mathcal{M}$, определяемым кортежами, на которых они принимают значения 0 и 3.

ЛЕММА 2. *Каждая нумерация множества Z является сюръективным отображением.*

Для доказательства нужно рассмотреть кортежи, аналогичные рассмотренным в п. "а" доказательства леммы 1 и использовать (R4).

ЛЕММА 3. *Для любых нумераций ν_1, ν_2 множества Z и каждого $i \in Z$ справедливо одно из равенств: $\nu_1(i) = \nu_2(i)$ или $\nu_1(i) = \nu_0'(i)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из (R3), поскольку $\nu_j(i) = \nu_0(i)$ или $\nu_j(i) = \nu_0'(i)$ при $j = 1, 2$.

ЛЕММА 4. *Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — разбиваемая функция, то $\underline{n} = W \cup Z$ — единственное разбиение, обладающее свойством* (R2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\underline{n} = W' \cup Z'$ — разбиение множества $\underline{n}$, удовлетворяющее свойству (R2), и $W' \neq W$, $Z' \neq Z$. Тогда найдется $j \in \underline{n}$ такой, что либо $j \in W'$ и $j \notin W$, либо $j \notin W'$ и $j \in W$. Рассмотрим функцию f на наборе $\overline{a}$, где $a_i = 1$ при $i \in W'$ и $a_i = 3$ при $i \in Z'$. Если $j \in W'$ и $j \notin W$, то $j \in Z$ и $a_j = 1$. Отсюда $f(\overline{a}) = 0$ согласно (R2) для $W \cup Z$ и разбиение $W' \cup Z'$ не обладает свойством (R2). Аналогично во втором случае $a_j = 3$ и $j \in W$, поэтому $f(\overline{a}) = 0$ и разбиение $W' \cup Z'$ снова не удовлетворяет (R2). Лемма 4 доказана.

Учитывая лемму 4, для разбиваемой функции f классы разбиения, удовлетворяющего условиям (R1)—(R4), будем обозначать через $W(f)$ и $Z(f)$.

Разбиваемую (l-разбиваемую) функцию f, удовлетворяющую условию $|W(f)| \geq 2$, назовем *сильно (l-)разбиваемой.*

ЛЕММА 5. *Функция f_B, где $B \subseteq \{0,1\}^l$, $l \in \mathbf{N}$, сильно l-разбиваема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разбиение $W(f_B) = \{x, y\}$, $Z(f_B) = \{z_1, \ldots$ $\ldots, z_{l^*}\}$ удовлетворяет условию (R1) (согласно п. 1 из определения f_B) и (R2) (согласно пп. 2 и 3 из определения f_B). Условие (R3) непосредственно вытекает из леммы 1, а (R4) — из определения функции f_B. Итак, f_B разбиваема, а так как $|W(f_B)| = 2$, то f_B сильно разбиваема. Лемма 5 доказана.

2.4. Монотонно разбиваемые функции. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — разбиваемая функция, $X \subseteq W(f)$, $Y = W(f) \setminus X$. Через $T(f, X)$ обозначим множество кортежей $(x_i^0)_{i \in Z(f)}$ таких, что функция f на наборе $(x_i)_{i \in \underline{n}}$, где

$$x_i = \begin{cases} x_i^0, & \text{если } i \in Z(f), \\ 2, & \text{если } i \in X, \\ 1, & \text{если } i \in Y, \end{cases}$$

принимает значение 2. Очевидно, каждая компонента кортежа из $T(f, X)$ равна либо 2, либо 3. Через $TF(f)$ обозначим множество всех кортежей $(x_i)_{i \in Z(f)}$, где $x_i \in \{2, 3\}$.

Функцию f назовем *монотонно l-разбиваемой*, если она обладает следующими свойствами:

(M1) f — сильно l-разбиваемая;

(M2) если $f(\overline{x}) = 3$, где $(x_i)_{i \in Z(f)}$ — ν-нумеруемый для нумерации ν множества $Z(f)$, то $\nu((x_i)_{i \in Z(f)})$ — выделяющий или связывающий кортеж;

(M3) для любого $X \subseteq W(f)$ если $T(f, X) \neq \varnothing$, то $T(f, W(f) \setminus X) = \varnothing$;

(M4) если $X_1 \subseteq X_2 \subseteq W(f)$, то $T(f, X_1) \subseteq T(f, X_2)$;

(M5) справедливы равенства $T(f, W(f)) = TF(f)$, $T(f, \varnothing) = \varnothing$.

Монотонно l-разбиваемую для некоторого l функцию будем также называть *монотонно разбиваемой.* Множество всех монотонно l-разбиваемых функций будем обозначать через $\mathcal{M}_l'$. Кроме того, положим

$\mathcal{M}' = \bigcup_{t\in\mathbf{N}} \mathcal{M}'_t$. Условия (M1)–(M5) еще больше, чем свойство "быть разбиваемой", приближает функцию к функциям множества $\mathcal{M}$. В отличие от свойств функций из $\mathcal{M}$, в этих условиях участвуют не отдельные переменные, а группы переменных. Условие (M2) ограничивает множество кортежей, на которых монотонно разбиваемая функция принимает значение 3, такими, которые необходимы для нумеруемости, и вместе со свойством (R3) из определения разбиваемости работает подобно п. 1 в задании функций из $\mathcal{M}$. В силу условий (M3) и (M5) каждое множество аргументов из $W(f)$ ведет себя аналогично переменным либо x, либо y функций класса $\mathcal{M}$. Уже отмечалось, что функции из $\mathcal{M}$ походят на характеристические функции некоторых множеств. Для монотонно разбиваемых функций справедливо нечто подобное, только характеризуемые множества зависят от группы переменных $X\subseteq W(f)$, равных 2, и определяются множествами $T(f,X)$.

Множество разбиваемых (l-разбиваемых), но не сильно разбиваемых функций, удовлетворяющих условиям (M2), (M4) и (M5), будем обозначать через $\mathcal{N}$ ($\mathcal{N}_l$). Функции из $\mathcal{N}$ получаются, в частности, при отождествлении всех переменных монотонно разбиваемой функции f из множества $W(f)$.

ЛЕММА 6. *Справедливо включение* $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f_B — функция из $\mathcal{M}_l$ для некоторого $l\in\mathbf{N}$. По лемме 5 она сильно разбиваема. Проверим условия (M3)—(M5). Для этого вычислим множества $T(f,X)$ при всех $X\subseteq W(f)$. Из пп. 2 и 3 определения мы получаем, что

$$T(f_B,X) = \begin{cases} TF(f_B), & \text{если } X = \{x,y\} = W(f); \\ \{\mathrm{cod}(a) \mid a \in B\}, & \text{если } X = \{x\}; \\ \varnothing, & \text{если } X = \{y\}; \\ \varnothing, & \text{если } X = \varnothing. \end{cases}$$

Это и дает выполнимость условий (M3)—(M5). Условие (M2) следует из определения функции f_B. Лемма 6 доказана.

Пусть множество переменных I функции f нумеруемо. Будем называть кортеж $(a_i)_{i\in I}$ *кодирующим*, если для нумерации ν множества I кортеж $\nu(\overline{a})$ — кодирующий.

ЛЕММА 7. *Пусть функция f является l-разбиваемой, ν,μ — нумерации $Z(f)$ и $\overline{a} = (a_i)_{i\in Z(f)}$ есть ν-нумеруемый кодирующий кортеж. Тогда $\overline{a}$ является μ-нумеруемым и $\nu(\overline{a}) = \mu(\overline{a})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{b} = \nu(\overline{a})$. По определению кодирующих кортежей для любого $u\in\underline{l^*}$ справедливо равенство $b_u = b_{l^*-u+1}$, поэтому если $\nu(i_1) = \nu'(i_2)$, то $a_{i_1} = a_{i_2}$. Отсюда если $\mu(i_1) = \mu(i_2)$, то по лемме 3 имеем $\mu(i_j) = \nu(i_j)$ или $\mu(i_j) = \nu'(i_j)$, $j = 1,2$. Следовательно, $b_{\mu(i_1)} = b_{\mu(i_2)}$, т.е. $a_{i_1} = a_{i_2}$ и $\overline{a}$ является μ-нумеруемым. Аналогично если $\nu(i_1) = \mu(i_2)$, то, используя так же, как и ранее, лемму 3, получаем $\nu(i_1) = \nu(i_2)$ или $\nu(i_1) = \nu'(i_2)$. Отсюда, поскольку $\overline{a}$ — ν-нумеруемый и кодирующий, имеем $a_{i_1} = a_{i_2}$. Таким образом, $\nu(\overline{a}) = \mu(\overline{a})$, и лемма 7 доказана.

Для функции $f\in\mathcal{M}'_l\cup\mathcal{N}_l$ и множества $X\subseteq W(f)$ через $B(f,X)$ обозначим множество:

$\{\alpha\in\{0,1\}^l \mid$ найдется ν-нумеруемый для некоторой l-нумерации ν множества $Z(f)$ кортеж $(a_i)_{i\in Z(f)}\in T(f,X)$ такой, что $\nu(\overline{a}) = \mathrm{cod}(\alpha)\}$.

Из (M5) следует, что $B(f,\varnothing) = \varnothing$ и $B(f,W(f)) = \{0,1\}^l$. Заметим также, что в силу леммы 7 в определении $B(f,X)$ можно ограничиться какой-нибудь одной нумерацией.

Пусть $\Theta\in\prod_{l\in\mathbf{N}}\mathrm{Sub}_{0,1}P(\{0,1\}^l)$, т.е. $\Theta = (\mathcal{Q}_1,\ldots,\mathcal{Q}_l,\ldots)$, где $\mathcal{Q}_l$, $l\in\mathbf{N}$, есть 0,1-подрешетка из $P(\{0,1\}^l)$. Через $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}_l}$ обозначим множество функций $f\in\mathcal{M}'_l$ таких, что для любого $X\subseteq W(f)$ справедливо включение $B(f,X)\in\mathcal{Q}_l$. Положим также $\mathcal{M}'_\Theta = \bigcup_{l\in\mathbf{N}}\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}_l}$.

Обозначим через Λ множество функций $\langle\mathcal{M}'\rangle\setminus\Omega(\mathcal{M}')$. Пусть $\varphi : \prod_{l\in\mathbf{N}}\mathrm{Sub}_{0,1}P(\{0,1\}^l) \to \mathcal{L}'_4$ — отображение, определенное следующим образом: $\varphi(\Theta) = \langle\mathcal{M}'_\Theta\cup\Lambda\rangle$, где $\Theta\in\prod_{l\in\mathbf{N}}\mathrm{Sub}_{0,1}P(\{0,1\}^l)$. Данное преобразование является отображением в решетку итеративных алгебр (ни одна из алгебр вида $\varphi(\Theta)$ не содержит проекций). Чтобы получить отображение в решетку клонов, нам нужно всегда вместо алгебры $\varphi(\Theta)$ взять множество $\varphi(\Theta)\cup\{e^n_i \mid n\in\mathbf{N},\ i\in\underline{n}\}$, рассматриваемое как клон. Далее мы будем доказывать, что φ — нужное нам решеточное вложение.

3. Вспомогательные утверждения

В этом разделе мы докажем несколько лемм относительно сохранения сигнатурными операциями итеративной алгебры свойства функции быть разбиваемой, принадлежать классу $\mathcal{M}$ или $\mathcal{M}'$.

3.1. Подстановки и разбиваемость. Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — разбиваемая функция и $m\in\mathbf{N}$. Нам неоднократно понадобятся следующие обозначения: $\overline{f} = f(x_1,x_{m+1},\dots,x_{n+m-1})$, $\overline{Z}(f) = Z(\overline{f})\setminus\{1\}$ и $\overline{W}(f) = W(\overline{f})\setminus\{1\}$.

ЛЕММА 8. *Если $f(x_1,\dots,x_n)$ и $g(x_1,\dots,x_m)$ являются l-разбиваемыми функциями (f или g сильно l-разбиваема) и $1\in W(f)$, то функция $f(g(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1})$ также (сильно) l-разбиваема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем разбиваемость функции $h = f\circ\circ g$. Положим $W(h) = W(g)\cup\overline{W}(f)$, $Z(h) = Z(g)\cup\overline{Z}(f)$. Пусть теперь $h(x_1,\dots,x_{m+n-1}) = 3$. Тогда, используя условие (R1) для f, имеем $g(x_1,\dots,x_m) = 3$, $x_i = 3$ при $i\in\overline{W}(f)$ и $x_i\in\{2,3\}$ при $i\in\overline{Z}(f)$. Далее, из условия (R1) для g имеем $x_i = 3$ при $i\in W(g)$ и $x_i\in\{2,3\}$ при $i\in Z(g)$. Таким образом, $x_i = 3$ при $i\in W(h)$ и $x_i\in\{2,3\}$ при $i\in Z(h)$, и условие (R1) доказано. Аналогично может быть доказано и (R2).

Проверим условие (R3). Пусть ν_0, μ_0 — нумерации соответственно $Z(f)$ и $Z(g)$ из условия (R3) для функций f и g. Определим отображение $\lambda_0 : Z(h) \to \underline{l^*}$ следующим образом:

$$\lambda_0(i) = \begin{cases} \mu_0(i), & \text{если } i\in Z(g); \\ \nu_0(i-m+1), & \text{если } i\in\overline{Z}(f). \end{cases}$$

Проверим, что λ_0 — нумерация. Пусть $(x_i)_{i\in\underline{n+m-1}}$ — набор переменных такой, что $x_i = 3$ при $i\in W(h)$, $x_i = v^j_{\lambda_0(i)}$ $(s^j_{\lambda_0(i)})$ при $i\in Z(h)$ для некоторого l-выделяющего (l-связывающего) кортежа, $j\in\underline{l^*}$ $(j\in\underline{l^*-1})$. Тогда $g(x_1,\dots,x_m) = 3$, так как $x_i = 3$ при $i\in W(g)$ и $x_i = v^j_{\mu_0(i)}$ $(s^j_{\mu_0(i)})$ при $i\in Z(g)$. Далее, $f(3,x_{m+1},\dots,x_{n+m-1}) = 3$, поскольку $x_i = 3$ при $i\in\overline{W}(f)$ и $x_i = v^j_{\nu_0(i-m+1)}$ $(s^j_{\nu_0(i-m+1)})$. Отсюда $h(\overline{x}) = 3$ и λ_0 — нумерация.

Пусть теперь λ — произвольная t-нумерация $Z(h)$, $t\in\mathbf{N}$. Тогда для каждого t-выделяющего (t-связывающего) кортежа v^j (s^j), $j\in\underline{t^*}$ $(j\in\underline{t^*-1})$, функция h на наборе переменных $(x_i)_{i\in\underline{n+m-1}}$, где $x_i = 3$ при $i\in W(h)$, $x_i = v^j_{\lambda(i)}$ $(s^j_{\lambda(i)})$ при $i\in Z(h)$, принимает значение 3. Из (R1) для f следует, что $g(x_1,\dots,x_m) = 3$, поэтому ограничение $\lambda\mid_{Z(g)}= \mu$ является нумерацией множества $Z(g)$. Отсюда $t = l$ и при $i\in Z(g)$ справедливо $\lambda(i) = \mu(i) = \mu_0(i) = \lambda_0(i)$ либо $\lambda(i) = \mu(i) = \mu'(i) = \lambda'(i)$. Далее, $f(3,x_{m+1},\dots,x_{n+m-1}) = 3$, поэтому $\lambda\mid_{\overline{Z}(f)}= \overline{\nu}$ — нумерация множества $\overline{Z}(f)$. Отсюда, учитывая условие (R3) для f, имеем $\lambda(i) = \overline{\nu}(i) = \nu_0(i-m+1) = \lambda_0(i)$ либо $\lambda(i) = \overline{\nu}(i) = \nu'_0(i-m+1) = \lambda'_0(i)$ и условие (R3) доказано.

Поскольку согласно (R4) для g справедливо равенство $g(3,\dots,3) = 0$, то $h(3,\dots,3) = f(0,3,\dots,3) = 0$ и условие (R4) доказано. Наконец, по построению, $|W(h)| \geq |W(f)|,|W(g)|$, т.е. из сильной разбиваемости одной из функций f,g следует сильная разбиваемость h. Лемма 8 доказана.

Отметим два утверждения, вытекающие из доказательства леммы 8. Напомним, что через $\mathrm{ar}f$ обозначается число переменных функции f.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Пусть $f,g\in P_4$, $\mathrm{ar}f = n$, $\mathrm{ar}g = m$ и $h = f\circ g$. Пусть также разбиения $W(f)\cup Z(f)$, $W(g)\cup Z(g)$ множеств $\underline{n}$, $\underline{m}$ удовлетворяют условию* (R1) *и $1\in W(f)$. Тогда для каждой нумерации ν множества $Z(h)$ ее ограничения на множества $Z(g)$ и $\overline{Z}(f)$ являются нумерациями этих множеств для функций g и $\overline{f}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Пусть $f,g\in P_4$, $\mathrm{ar}f = n$, $\mathrm{ar}g = m$ и $h = f\circ g$. Если разбиения $W(f)\cup Z(f)$, $W(g)\cup Z(g)$ множеств $\underline{n}$, $\underline{m}$ удовлетворяют условиям* (R1),(R2) *и $1\in W(f)$, то $W(g)\cup\overline{V}(f),Z(g)\cup\overline{Z}(f)$ — разбиение множества переменных функции h, удовлетворяющее* (R2).

ЛЕММА 9. *Пусть функции f,g являются l-разбиваемыми, $\mathrm{ar}f = n$, $\mathrm{ar}g = m$, $h = f\circ g$, $1\in W(f)$. Тогда для любого $X\subseteq W(h)$ справедливо равенство*

$$T(h,X) = \{(a_i)_{i\in Z(h)} \mid (a_i)_{i\in Z(g)}\in T(g,X\cap W(g)) \text{ и } (a_i)_{i\in\overline{Z}(f)}\in T(\overline{f},(X\cap\overline{W}(f))\cup\{1\})\}\cup\{(a_i)_{i\in Z(h)} \mid (a_i)_{i\in Z(g)}\in TF(g)\setminus T(g,X\cap W(g)) \text{ и } (a_i)_{i\in\overline{Z}(f)}\in T(\overline{f},X\cap\overline{W}(f))\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $h(\overline{a}) = 2$, где $a_i = 2$ при $i \in X$ и $a_i = 1$ при $i \in W(h) \setminus X$. Тогда условие (R2) для f обеспечивает справедливость включения $g(a_1, \ldots, a_m) \in \{1, 2\}$. Если $g(a_1, \ldots, a_m) = 2$, то $(a_i)_{i \in Z(g)} \in T(g, X \cap W(g))$, а так как $f(2, a_{m+1}, \ldots, a_{n+m-1}) = 2$, то $(a_i)_{i \in \overline{Z}(f)} \in T(\overline{f}, (X \cap \overline{W}(f)) \cup \{1\})$. Случай $g(a_1, \ldots, a_m) = 1$ рассматривается аналогично.

Для доказательства обратного включения нужно все рассуждения провести в обратном порядке.

ЛЕММА 10. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{M}_l' \cup \mathcal{N}_l$ для некоторого $l \in \mathbf{N}$ и $1 \in W(f)$. Тогда функция $h = f \circ g$ также принадлежит $\mathcal{M}_l' \cup \mathcal{N}_l$. При этом $h \in \mathcal{N}_l$ тогда и только тогда, когда $f, g \in \mathcal{N}_l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8 достаточно проверить условия (M2)—(M5). Условия (M4) и (M5) легко следуют из леммы 9.

Докажем условие (M3). Для функций из $\mathcal{N}$ оно эквивалентно (M5). Пусть $X \subseteq W(h)$ и $T(h, X) \neq \varnothing$. Рассмотрим 4 случая.

СЛУЧАЙ 1. $T(g, X \cap W(g)) \neq \varnothing$ и $T(\overline{f}, X \cap \overline{W}(f)) \neq \varnothing$. Тогда из условия (M3) функций f и g получаем равенства $T(g, W(g) \setminus X) = \varnothing$ и $T(\overline{f}, (\overline{W}(f) \setminus X) \cup \{1\}) = \varnothing$. Рассмотрим произвольный кортеж $(x_i)_{i \in \underline{n+m-1}}$, где $x_i \in \{2, 3\}$ при $i \in Z(h)$, $x_i = 2$ при $i \in W(h) \setminus X$ и $x_i = 1$ при $i \in X$. Тогда $g(x_1, \ldots, x_m) = 1$ и $f(1, x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1}) = 1$, так как из (M4) следует включение $T(\overline{f}, \overline{W}(f) \setminus X) \subseteq T(\overline{f}, (\overline{W}(f) \setminus X) \cup \{1\}) = \varnothing$.

СЛУЧАЙ 2. $T(g, X \cap W(g)) \neq \varnothing$ и $T(\overline{f}, X \cap \overline{W}(f)) = \varnothing$. Так как $T(h, X) \neq \varnothing$, то $T(\overline{f}, (X \cap \overline{W}(f)) \cup \{1\}) \neq \varnothing$. Тогда, как и выше, $T(g, W(g) \setminus X) = \varnothing$ и $T(\overline{f}, \overline{W}(f) \setminus (X \cup \{1\})) = \varnothing$. Рассмотрим кортеж $(x_i)_{i \in \underline{n+m-1}}$, где $x_i \in \{2, 3\}$ при $i \in Z(h)$, $x_i = 2$ при $i \in W(h) \setminus X$ и $x_i = 1$ при $i \in X$. Тогда $g(x_1, \ldots, x_m) = 1$ и $f(1, x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1}) = 1$. Таким образом, $T(h, W(h) \setminus X) = \varnothing$.

СЛУЧАЙ 3. $T(g, X \cap W(g)) = \varnothing$ и $T(\overline{f}, X \cap \overline{W}(f)) \neq \varnothing$. Используя условие (M4), получаем равенство $T(\overline{f}, (\overline{W}(f) \setminus X) \cup \{1\}) = \varnothing$. Отсюда для любого кортежа $(x_i)_{i \in \underline{n+m-1}}$, где $x_i \in \{2, 3\}$ при $i \in Z(h)$, $x_i = 2$ при $i \in W(h) \setminus X$ и $x_i = 1$ при $i \in X$, справедливо $x_i = 1$ при $i \in \overline{W}(f) \cap X$, а потому $f(g, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) = 1$.

СЛУЧАЙ 4. $T(g, X\cap W(g)) = \varnothing$ и $T(f, X\cap\overline{W}(f)) = \varnothing$. Этот случай невозможен, так как для любого кортежа $(x_i)_{i\in\underline{n+m-1}}$, где $x_i\in\{2,3\}$ при $i\in Z(h)$, $x_i = 1$ при $i\in W(h)\setminus X$ и $x_i = 2$ при $i\in X$, верны равенства $g(x_1,\ldots,x_m) = 1$ и $f(1, x_{m+1},\ldots,x_{n+m-1}) = 1$, а значит, и $h(\overline{x}) = 1$, т.е. $T(h, X) = \varnothing$.

Свойство (M2) следует из следствия 1 и (M2) для f и g. Лемма 10 доказана.

Если $h = f\circ g$ содержится в $\mathcal{M}'$, то в силу (M4) лемма 9 может быть изложена следующим образом.

ЛЕММА 11. *Если функции f,g содержатся в $\mathcal{M}'_l\cup\mathcal{N}_l$ и* $\operatorname{ar} f =$ $= n$, $\operatorname{ar} g = m$, $h = f\circ g$, $1\in W(f)$, *то для любого $X\subseteq W(h)$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned}T(h,X) \;=\; &\{(a_i)_{i\in Z(h)} \mid (a_i)_{i\in Z(g)}\in T(g, X\cap W(g)) \text{ и}\\ &(a_i)_{i\in\overline{Z}(f)}\in T(\overline{f}, (X\cap\overline{W}(f))\cup\{1\})\}\cup\{(a_i)_{i\in Z(h)} \mid a_i\in\{2,3\}\\ &\text{для } i\in Z(g) \text{ и } (a_i)_{i\in\overline{Z}(f)}\in T(\overline{f}, X\cap\overline{W}(f))\}.\end{aligned}$$

3.2. Отождествления и разбиваемость. Напомним, что для множества функций C через $C^{(n)}$ обозначается n-й слой C, т.е. множество n-местных функций из C. Пусть $f\in P_4^{(n)}$, λ — отображение множества $\underline{n}$ в множество $\underline{m}$. Определим тогда функцию $\nabla_\lambda f\in P_4^{(m)}$ следующим образом:

$$(\nabla_\lambda f)(x_1,\ldots,x_m) = f(x_{\lambda(1)}, x_{\lambda(2)},\ldots,x_{\lambda(n)}).$$

ЛЕММА 12. *Пусть $g(x_1,\ldots,x_m) = \nabla_\lambda f(x_1,\ldots,x_n)$, где $\lambda:\underline{n}\to\underline{m}$ сюръективно. Если μ есть l-нумерация множества $I\subseteq\underline{m}$ переменных функции g, то $\mu\circ\lambda$ является l-нумерацией множества переменных $\lambda^{-1}(I)$ функции f.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть кортеж $\overline{a}$ таков, что $a_i = 3$ при $i\notin\lambda^{-1}(I)$ и для некоторого l-выделяющего (l-связывающего) кортежа $\overline{c}$ выполнено $a_i = c_{\mu\circ\lambda(i)}$ при $i\in\lambda^{-1}(I)$. Нам нужно показать, что $f(\overline{a}) = 3$. Поскольку $a_i = a_j$ при $\lambda(i) = \lambda(j)$, то справедливо равенство $f(\overline{a}) = g(\overline{b})$, где $\overline{b} = (b_u)_{u\in\underline{m}} = \lambda((a_i)_{i\in\underline{n}})$. Здесь $b_u = 3$ при $u\in\underline{m}\setminus I$ и $b_u = c_{\mu(u)}$ при $i\in I$. Отсюда $g(\overline{b}) = 3$, так как μ — нумерация, и лемма 12 доказана.

Пусть $f \in P_4^{(n)}$, $i, j \in \underline{n}$, $i < j$. Положим тогда

$$\nabla_{i,j} f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1} \ldots, x_{n-1}).$$

ЛЕММА 13. *Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — (сильно) l-разбиваемая функция, $n, n-1 \in Z(f)$ и $\nu(n) = \nu(n-1)$ для некоторой нумерации ν множества $Z(f)$, то функция $g = \nabla_{n-1,n} f$ (сильно) l-разбиваема. Если, кроме того, f монотонно разбиваема, то такова и g.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим разбиваемость функции g. В качестве искомого разбиения рассмотрим следующее: $W(g) = W(f)$, $Z(g) = Z(f) \setminus \{n\}$. Исходя из разбиваемости функции f, нетрудно проверить, что указанное разбиение удовлетворяет условиям (R1) и (R2). Для проверки (R3) рассмотрим отображение $\mu_0 = \nu\ |_{Z(g)}$, ν — нумерация из условия леммы. Для каждого кортежа $v^j(s^j)$, $j \in \underline{l^*}$ ($j \in \underline{l^* - 1}$), функция g на наборе переменных $(x_i)_{i \in \underline{n-1}}$, где $x_i = 3$ при $i \in W(g)$ и $x_i = v^j_{\mu_0(i)}(s^j_{\mu_0(i)}) = v^j_{\nu(i)}(s^j_{\nu(i)})$ при $i \in Z(g)$, принимает значение $g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}) = 3$, так как ν — нумерация $Z(f)$ и $\nu(n-1) = \nu(n)$. Итак, μ_0 является нумерацией $Z(g)$. Пусть теперь μ — некоторая t-нумерация $Z(g)$, $t \in \mathbf{N}$. Тогда по лемме 12 отображение $\overline{\mu} : Z(f) \to \underline{t^*}$, где $\overline{\mu}(i) = \mu(i)$ при $i \in Z(g)$ и $\overline{\mu}(n) = \mu(n-1)$, является нумерацией множества $Z(f)$. Отсюда $t = l$. По лемме 3 для функции f справедливо: $\overline{\mu}(i) = \nu(i)$ или $\overline{\mu}(i) = \nu'(i)$, $i \in Z(f)$. Отсюда $\mu(i) = \mu_0(i)$, либо $\mu(i) = \mu_0'(i)$, $i \in Z(g)$, и (R3) доказано. Условие (R4) проверяется непосредственно. Наконец, из равенства $W(g) = W(f)$ следует, что если f сильно разбиваема, то и g сильно разбиваема.

Пусть теперь f монотонно разбиваема. Вычислим множества $T(g, X)$. Они получаются из множеств $T(f, X)$ следующим образом:

$$T(g,X) = \{(x_i)_{i \in Z(g)} \mid (x_i')_{i \in Z(f)} \in T(f,X), \text{ где } x_i' = x_i \text{ при } i \in Z(g) \text{ и } x_i' = x_{n-1}\}.$$

Отсюда немедленно следуют условия (M3), (M4) и (M5). Свойство (M2) следует из (M2) для f и леммы 12. Лемма 13 доказана.

ЛЕММА 14. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является l-разбиваемой и*

$n, n-1 \in W(f)$, *то функция* $g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \nabla_{n-1,n} f(x_1, \ldots, x_n)$ *является* l*-разбиваемой, при этом она*

— *сильно* l*-разбиваемая, если* $|W(f)| > 2$;

— *содержится в* $\mathcal{M}'_l \cup \mathcal{N}_l$, *если* f *содержится в* $\mathcal{M}'_l \cup \mathcal{N}_l$;

— *монотонно разбиваемая, если* f *монотонно разбиваемая и* $|W(f)| > 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим разбиваемость функции g. В качестве искомого разбиения рассмотрим следующее: $W(g) = W(f) \setminus \{n\}$, $Z(g) = Z(f)$. Для него выполнены, очевидно, условия (R1), (R2). Так как свойство нумеруемости и нумерации множества $Z(g) = Z(f)$ зависят лишь от значений функции f на наборах переменных, в которых все переменные из $W(f)$ имеют одинаковые значения, то нумерации множеств $Z(g)$ и $Z(f)$ совпадают. Отсюда следует свойство (R3). Справедливость условия (R4) также очевидна. Если $|W(f)| > 2$, то $|W(g)| \geq 2$, т.е. в этом случае g сильно разбиваема.

Далее, нетрудно видеть, что

$$T(g, X) = \begin{cases} T(f, X), & \text{если } n-1 \notin X, \\ T(f, X \cup \{n\}), & n-1 \in X, \end{cases}$$

где $X \subseteq W(g)$. Из этого равенства вытекают свойства (M3), (M4) и (M5). Наконец, поскольку из равенства $f(x_1, \ldots, x_n) = 3$ следует $x_i = 3$, $i \in W(f)$, то условие (M2) для g следует из (M2) для f. Лемма 13 доказана.

3.3. Сигнатурные операции и множества $\mathcal{M}'_\Theta$. Здесь мы докажем, что множества $\mathcal{M}'_\Theta$ замкнуты относительно рассматривавшихся выше специфических видов сигнатурных операций итеративной алгебры.

ЛЕММА 15. *Пусть* $\mathcal{Q}$ — $0,1$*-подрешетка решетки* $P(\{0,1\}^l)$, $l \in \mathbf{N}$. *Если функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$ *содержатся в* $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} \cup \mathcal{N}_l$ *и* $1 \in W(f)$, *то функция* $h = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$ *также принадлежит* $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} \cup \mathcal{N}_l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 10 функция h содержится в $\mathcal{M}' \cup \mathcal{N}_l$, поэтому нам нужно лишь проверить, что если $h \in \mathcal{M}'$, то для любого непустого $X \subset W(h)$ выполнено включение $B(h, X) \in \mathcal{Q}$. Пусть λ — нумерация множества $Z(h)$, через λ_1 и λ_2 обозначим ее ограничения на $Z(g)$ и $\overline{Z}(f)$.

Если $(a_i)_{i\in Z(h)}$ λ-нумеруемый, то кортежи $(a_i)_{i\in Z(g)}$ и $(a_i)_{i\in \overline{Z}(f)}$ соответственно λ_1- и λ_2-нумеруемые и выполняется равенство

$$\lambda((a_i)_{i\in Z(h)}) = \lambda_1((a_i)_{i\in Z(g)}) = \lambda_2((a_i)_{i\in \overline{Z}(f)}).$$

Далее, $B(h,X) = \{\alpha \in \{0,1\}^l \mid \lambda((a_i)_{i\in Z(h)}) = \mathrm{cod}(\alpha)$ и $(a_i)_{i\in Z(h)} \in T(h,X)\}$. По лемме 11 включение $\alpha \in B(h,X)$ справедливо тогда и только тогда, когда найдутся λ_1-нумеруемый кортеж $(a_i)_{i\in Z(g)}$ и λ_2-нумеруемый кортеж $(a_i)_{i\in \overline{Z}(f)}$ такие, что $\lambda_1((a_i)_{i\in Z(g)}) = \lambda_2((a_i)_{i\in \overline{Z}(f)}) = \mathrm{cod}(\alpha)$ и либо $(a_i)_{i\in Z(g)} \in T(g, X\cap W(g))$ и $(a_i)_{i\in \overline{Z}(f)} \in T(\overline{f}, (X\cap \overline{W}(f))\cup\{1\})$, либо $(a_i)_{i\in \overline{Z}(f)} \in T(\overline{f}, X\cap \overline{W}(f))$. А это, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha \in (B(g, X\cap W(g)) \cap B(\overline{f}, (X\cap \overline{W}(f))\cup\{1\}) \cup B(f, X\cap \overline{W}(f)).$$

Таким образом,

$$B(h,X) = (B(g, X\cap W(g)) \cap B(\overline{f}, (X\cap \overline{W}(f))\cup\{1\})) \cup B(f, X\cap \overline{W}(f)) \in \mathcal{Q},$$

и лемма 15 доказана.

ЛЕММА 16. *Пусть $\mathcal{Q}$ — 0,1-подрешетка решетки $P(\{0,1\}^l)$, $l\in \mathbf{N}$. Если $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$, $n, n-1 \in Z(f)$ и $\nu(n) = \nu(n-1)$ для некоторой нумерации ν множества $Z(f)$, то $g = \nabla_{n-1,n} f \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 13 нам достаточно показать, что для любого непустого $X \subset W(f)$ справедливо $B(g,X) \in \mathcal{Q}$. Пусть ν — нумерация $Z(f)$ и $(a_i)_{i\in Z(g)} \in T(g,X)$ является ν-нумеруемым кодирующим кортежем, μ — нумерация $Z(f)$, соответствующая ν по лемме 12 и $\overline{b} = (b_i)_{i\in Z(f)}$ такой, что $b_n = a_{n-1}$, $b_i = a_i$ при $i \in Z(f)\setminus\{n\}$. Тогда кортеж $\overline{b}$ содержится в $T(f,X)$, является μ-нумеруемым и $\mu(\overline{b}) = \nu(\overline{a})$. Таким образом, $B(g,X) \subseteq B(f,X)$. Обратно, пусть $(b_i)_{i\in Z(f)} \in T(f,X)$ — μ-нумеруемый кодирующий кортеж. Тогда $b_{n-1} = b_n$ и поэтому кортеж $\overline{a}$, $a_i = b_i$ при $i\in Z(g)$ содержится в $T(g,X)$, является ν-нумеруемым и кодирующим. Наконец, $\nu((b_i)_{i\in Z(g)}) = \mu(\overline{a})$, и поэтому $B(f,X) \subseteq B(g,X)$. Мы получили $B(g,X) = B(f,X) \in \mathcal{Q}$, и лемма 16 доказана.

ЛЕММА 17. *Пусть $\mathcal{Q}$ — 0,1-подрешетка решетки $P(\{0,1\}^l)$, $l\in \mathbf{N}$. Если $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ и $n, n-1 \in W(f)$, то $g = \nabla_{n-1,n} f \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} \cup \mathcal{N}_l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого непустого $X \subset W(g)$ справедливо равенство

$$B(g,X) = \begin{cases} B(f,X), & \text{если } n-1 \notin X; \\ B(f,X \cup \{n\}), & \text{если } n-1 \in X. \end{cases}$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы.

4. Сохранение решеточных объединений

4.1. Подобные функции. Введем еще одно понятие, необходимое для нашего доказательства. Пусть f — l-разбиваемая функция, $l \in \mathbf{N}$. Скажем, что функция g подобна f, если g является l-разбиваемой и выполняются следующие условия:

(P1) $\mathrm{ar} f = \mathrm{ar} g$;

(P2) $W(f) = W(g)$ и $Z(f) = Z(g)$;

(P3) $f(\overline{x}) = 3$ тогда и только тогда, когда $g(\overline{x}) = 3$.

Из (P3) следует, в частности, что отображение $\nu : Z(f) \to \underline{l}^*$ является нумерацией $Z(f)$ тогда и только тогда, когда ν — нумерация $Z(g)$.

Определим теперь несколько операций над функциями, являющихся термальными операциями итеративной алгебры.

1) Пусть $f \in P_4^{(n)}$, $g \in P_4^{(m)}$, $i \in \underline{n}$, тогда $f \circ_i g$ есть функция, полученная подстановкой g вместо i-й переменной функции f, т.е.

$$f \circ_i g(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_i, \ldots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \ldots, x_{n+m-1}).$$

2) Пусть $f \in P_4^{(n)}$, $g_i \in P_4^{(m_i)}$ для $i \in \underline{t}$, $i_1, \ldots, i_t \in \underline{n}$. Тогда $S_{\{i_1,\ldots,i_t\}}(f, g_1, \ldots, g_t)$ есть функция, полученная подстановкой g_j вместо переменной с номером i_j функции f. Более формально, пусть $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$, тогда

$$S_{\{i_1,\ldots,i_t\}}(f, g_1, \ldots, g_t) = (\ldots((f \circ_{i_t} g_t) \circ_{i_{t-1}} g_{t-1}) \circ_{i_{t-2}} \ldots \circ_{i_2} g_2) \circ_{i_1} g_1.$$

3) Пусть $f, g \in P_4^{(n)}$ — подобные разбиваемые функции, $X \subseteq W(f)$ и $|X| = t$. Положим $S'_X(f,g) = \nabla_\lambda(S_X(f, g, \ldots, g))$. Здесь отображение $\lambda : \underline{(n-1)(t+1)+1} \to \underline{n}$ определено равенством $\lambda(i) = j$, где i-я переменная соответствует переменной x_j функции f или g при подстановке.

ЛЕММА 18. *Пусть $f,g\in\mathcal{M}'$ — подобные функции и $X\subseteq W(f)$. Тогда $h=S'_X(f,g)$ подобна каждой из функций f,g и для каждого $Y\subseteq W(h)$ справедливо равенство*

$$T(h,Y)=(T(f,X\cup Y)\cap T(g,Y))\cup T(f,Y\setminus X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что h подобна f. По леммам 10, 13, 14 получаем $h\in\mathcal{M}'$. В частности, h разбиваема. Условие (P1) следует из построения функции h. Условие (P2) вытекает из построенного в доказательствах лемм 8, 13, 14 разбиения множества переменных функции h и определения операции S'_X. Проверим (P3). Пусть кортеж $(x_i)_{i\in\underline{n}}$ таков, что $f(\overline{x})=3$. Тогда $x_i=3$ при $i\in W(f)$ и $g(\overline{x})=3$, поскольку g подобна f. Следовательно, $h(\overline{x})=f(\overline{x})=3$, так как подстановки производились в переменные множества $W(f)$. Обратно, пусть $h(\overline{x})=3$. Тогда условие (R1) для f влечет $g(\overline{x})=3$. Значит, $x_i=3$ при $i\in W(f)$, т.е $3=h(\overline{x})=f(\overline{x})$.

Пусть теперь кортеж $(x_i)_{i\in\underline{n}}$ таков, что $x_i=2$ при $i\in Y$, $x_i=1$ при $i\in W(h)\setminus Y$ и $x_i\in\{2,3\}$ при $i\in Z(h)$. Учитывая условие (M4) для функции f, мы получаем: $h(x_1,\ldots,x_n)=2$ тогда и только тогда, когда либо $(x_i)_{i\in Z(h)}\in T(f,Y\setminus X)$, либо $(x_i)_{i\in Z(h)}\in T(g,Y)$ и $(x_i)_{i\in Z(h)}\in T(f,X\cup Y)$ (в случае, когда $g(x_1,\ldots,x_n)=2$). Отсюда немедленно следует равенство из формулировки леммы.

ЛЕММА 19. *Пусть f и g являются l-разбиваемыми подобными функциями. Если для любого $X\subseteq W(f)$ справедливо равенство $T(f,X)=$ $=T(g,X)$, то f и g равны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойствам (P3) и (R2) нам нужно сравнивать значения функций только тогда, когда они принимают значения 1 и 2. Если условие леммы справедливо, то $f(\overline{x})=2$ тогда и только тогда, когда $g(\overline{x})=2$, а это и означает равенство функций f и g.

4.2. Вспомогательные функции. Пусть $f\in\mathcal{M}'_l$, $l\in\mathbf{N}$. Обозначим через $T'(f,X)$ множество всех некодирующих кортежей из $T(f,X)$, где $X\subseteq W(f)$. Через $K(f,B)$, где $B\subseteq\{0,1\}^l$, обозначим множество кортежей $(a_i)_{i\in Z(f)}\in TF(f)$ таких, что $(a_i)_{i\in Z(f)}$ — ν-нумеруемый для некоторой нумерации ν множества $Z(f)$ и $\nu((a_i)_{i\in Z(f)})=\mathrm{cod}(\alpha)$, $\alpha\in B$. Заметим, что в силу леммы 7 в этом определении нумерацию можно считать фиксированной.

Предположим теперь, что $f \in \mathcal{M}'_{\mathcal{B}} \vee \mathcal{M}'_{\mathcal{C}}$ для некоторых 0,1-подрешеток $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ из $P(\{0,1\}^l)$. Мы будем строить некие приближения функции f с помощью функций из $\mathcal{M}'_{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{M}'_{\mathcal{C}}$. Пусть $V \subset W(f)$, $V \neq \varnothing$, $U = W(f) \setminus V$, $B \subseteq \{0,1\}^l$, ν — нумерация $Z(f)$. Через $G^B_{f,V}$ обозначим функцию, обладающую следующими свойствами:

$G^B_{f,V}$ подобна f;

$$T(G^B_{f,V}, X) = \begin{cases} TF(f), & \text{если } X \supset V \text{ или } X \supset U \\ & \text{и } V \neq W(f); \\ T'(f,V) \cup K(f,B), & \text{если } X = V; \\ \varnothing & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Такая функция существует, поскольку указанные свойства лишь определяют ее значения на различных наборах аргументов. Более того, по лемме 19 она единственна. Кроме того, нам потребуется функция $G^{\{0,1\}^l}_{f,W(f)}$, подобная f, для которой $T(G^{\{0,1\}^l}_{f,W(f)}, X) = TF(f)$, если $X = W(f)$ и $\varnothing$ в противном случае.

ЛЕММА 20. 1) *Пусть $V \subset W(f)$, $V \neq \varnothing$, $B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Тогда $G^B_{f,V}$ содержится в $\mathcal{M}'_{\mathcal{B}} \cup \mathcal{M}'_{\mathcal{C}}$.*

2) *$G^{\{0,1\}^l}_{f,W(f)}$ содержится в $\mathcal{M}'_{\mathcal{B}} \cup \mathcal{M}'_{\mathcal{C}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для краткости $G^B_{f,V}$ ($G^{\{0,1\}^l}_{f,W(f)}$) через g. Для определенности будем полагать, что $B \in \mathcal{B}$. Так как g подобна f, то она разбиваема. Проверим сначала принадлежность g классу $\mathcal{M}'$. Условие (M2) непосредственно вытекает из подобия f и g, а (M5) из определения функции g. Свойства (M3) и (M4) также легко проверяются с помощью определения g.

Проверим теперь, что для любого $X \subseteq W(f)$ выполнено $B(g, X) \in \mathcal{B}$. Если $X \neq V$, то из определения g следует, что $B(g, X)$ равно $\varnothing$ или $\{0,1\}^l$ и содержится в $\mathcal{B}$. Наконец, непосредственно из определения получаем $B(g, V) = B \in \mathcal{B}$. Лемма 20 доказана.

Через $G_{f,V}$, $\varnothing \neq V \subseteq W(f)$, обозначим функцию (как и выше, существует лишь одна такая функция), определенную следующим образом:

$G_{f,V}$ подобна f;

$$T(G_{f,V},X)=\begin{cases} TF(f), & \text{если } X=V \text{ или } V\neq W(f)\\ & \text{и } X\supset W(f)\backslash V;\\ T(f,V), & \text{если } X=V;\\ \varnothing & \text{— в противном случае.}\end{cases}$$

ЛЕММА 21. *Для любого* $V\subseteq W(f)$, $V\neq\varnothing$ *функция* $G_{f,V}$ *содержится в* $\langle\mathcal{M}'_B\cup\mathcal{M}'_C\rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $V=W(f)$, то $G_{f,V}=G^{\{0,1\}^l}_{f,W(f)}\in\mathcal{M}'_B\cup\cup\mathcal{M}'_C$ и ничего доказывать не нужно. Поскольку $B=B(f,V)\in\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$ и $G^B_{f,V}=G_{f,V}$, то нам достаточно доказать, что для любых $C,D\subseteq\{0,1\}^l$ справедливы включения $G^{C\cup D}_{f,V},G^{C\cap D}_{f,V}\in\langle G^C_{f,V},G^D_{f,V}\rangle$. Для краткости введем обозначения $G^C_{f,V}=g_1$, $G^D_{f,V}=g_2$.

Установим сначала включение $G^{C\cap D}_{f,V}\in\langle g_1,g_2\rangle$. Положим $h(\overline{x})==S'_V(g_1,g_2)$ и заметим, что включение $h\in\langle g_1,g_2\rangle$ очевидно. Докажем равенство $h=G^{C\cap D}_{f,V}$. Учитывая подобие функций h,g_1,g_2, $G^{C\cap D}_{f,V}$, нам достаточно доказать равенство $T(h,X)=T(G^{C\cap D}_{f,V},X)$ для всех $X\subseteq W(f)$.

По лемме 18 получаем

$$T(h,X)=(T(g_1,X\cup V)\cap T(g_2,X))\cup T(g_1,X\backslash V).$$

Поскольку $T(g_1,X\cup V)=TF(f)$ при $X\not\subseteq V$ и $T(g_1,X\cup V)=T(g_1,V)$ при $X\subseteq V$, то

$$T(h,X)=\begin{cases} T(g_2,X)\cup T(g_1,X\backslash V), & \text{если } X\not\subseteq V;\\ (T(g_1,V)\cap T(g_2,X))\cup T(g_1,X\backslash V), & \text{если } X\subseteq V.\end{cases}$$

В первом случае (при $X\not\subseteq V$) имеем $T(g_2,X)=TF(f)$ при $X\supset V$, $T(g_1,X\backslash V)=TF(f)$ при $X\supset W(f)\backslash V$ и $T(g_2,X)\cup T(g_1,X\backslash V)=\varnothing$ в противном случае. Во втором случае если $X\subset V$, то

$$T(h,X)=(T(g_1,V)\cap\varnothing)\cup T(g_1,X\backslash V)\subseteq T(g_1,X)=\varnothing.$$

Наконец, при $X=V$ мы имеем $X\backslash V=\varnothing$, поэтому

$$\begin{aligned} T(h,X) &= (T(g_1,V)\cap T(g_2,X))\cup\varnothing=T(g_1,V)\cap T(g_2,X)=\\ &= (T'(f,V)\cup K(f,C))\cap(T'(f,V)\cup K(f,D))= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= T'(f,V)\cup(K(f,C)\cap K(f,D)) = T'(f,V)\cup K(f,C\cap D) = \\ &= T(G^{C\cap D}_{f,V},V). \end{aligned}$$

Итак, мы получили следующее равенство:

$$T(h,X) = \begin{cases} TF(f), & \text{если } X \supset V \text{ или } X \supset W(f)\backslash V; \\ T(G^{C\cap D}_{f,V},X), & \text{если } X = V; \\ \varnothing & \text{— в противном случае,} \end{cases}$$

таким образом, $T(h,X) = T(G^{C\cap D}_{f,V},X)$ для всех $X\subseteq W(f)$ и $h = G^{C\cap D}_{f,V}$.

Установим теперь включение $G^{C\cup D}_{f,V}\in\langle g_1,g_2\rangle$. Обозначим через U множество $W(f)\backslash V$ и положим $h(\overline{x}) = S'_U(g_1,g_2)$. Аналогично предыдущему случаю, достаточно доказать равенство $T(h,X) = T(G^{C\cup D}_{f,V},X)$ для $X\subseteq W(f)$. Включение $X\backslash U\subseteq V$ очевидно, кроме того, $X\backslash U = V$ тогда и только тогда, когда $V\subseteq X$, а в этом случае $X\cup U = W(f)$. Если же $V\not\subseteq X$, то $X\backslash U\subset V$ и $T(g_1,X\backslash U) = \varnothing$. По лемме 18 получаем

$$\begin{aligned} T(h,X) &= (T(g_1,X\cup U)\cap T(g_2,X))\cup T(g_1,X\backslash U) = \\ &= \begin{cases} T(g_1,X\cup U)\cap T(g_2,X), & \text{если } V\not\subseteq X; \\ (T(g_1,W(f))\cap T(g_2,X))\cup T(g_1,V) & \text{в противном случае;} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} T(g_2,X), & \text{если } V\not\subseteq X \text{ и } X \not\subseteq U; \\ \varnothing, & \text{если } V \not\subseteq X \text{ и } V \subseteq U; \\ T(g_2,V)\cup T(g_1,V), & \text{если } X = V; \\ TF(f), & \text{если } V \subset X; \end{cases} = \\ &= \begin{cases} TF(f), & \text{если } X \supset V \text{ или } X \supset U; \\ T(G^{C\cup D}_{f,V},V), & \text{если } X = V; \\ \varnothing & \text{— в противном случае;} \end{cases} = \\ &= T(G^{C\cup D}_{f,V},V). \end{aligned}$$

Таким образом, $h = G^{C\cup D}_{f,V}$, и лемма 21 доказана.

4.3. Доказательство основного утверждения. Теперь мы можем доказать стабильность отображения φ относительно объединения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение φ — верхний гоморфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно показать, что для любых $\Theta, \Upsilon \in \prod_{l \in N} \mathrm{Sub}_{0,1} P(\{0,1\}^l)$ справедливо равенство $\langle \mathcal{M}'_\Theta \cup \mathcal{M}'_\Upsilon \rangle = \langle \mathcal{M}'_{\Theta \vee \Upsilon} \rangle$, т.е. $\mathcal{M}'_{\Theta \vee \Upsilon} \subseteq \langle \mathcal{M}'_\Theta \cup \mathcal{M}'_\Upsilon \rangle$, так как $\mathcal{M}'_\Theta, \mathcal{M}'_\Upsilon = \langle \mathcal{M}'_{\Theta \vee \Upsilon} \rangle$. Ясно также, что это включение достаточно показать для каждой компоненты последовательностей Θ, Υ (в силу покомпонентного действия операции $\vee$). Таким образом, мы будем рассматривать 0,1-подрешетки $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ из $P(\{0,1\}^l)$. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ и $f \in \mathcal{M}'_\mathcal{D}$. Покажем,что $f \in \langle \mathcal{M}'_\mathcal{B} \cup \mathcal{M}'_\mathcal{C} \rangle$.

Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольный порядковый фильтр в решетке подмножеств из $W(f)$. Через $f_\mathfrak{R}$ обозначим функцию, подобную f и удовлетворяющую условию: для всех $X \subseteq W(f)$ справедливо $T(f_\mathfrak{R}, X) = T(f, X)$, если $X \in \mathfrak{R}$ и $T(f_\mathfrak{R}, X) = \varnothing$ в противном случае. Покажем по индукции, что для любого порядкового фильтра $\mathfrak{R}$ в решетке $P(W(f))$ функция $f_\mathfrak{R}$ содержится в $\langle \mathcal{M}'_\mathcal{B} \cup \mathcal{M}'_\mathcal{C} \rangle$.

Если $\mathfrak{R} = \{W(f)\}$, то $f_\mathfrak{R} = G^{\{0,1\}^l}_{f,W(f)}$ и, следовательно, $f_\mathfrak{R} \in \langle \mathcal{M}'_\mathcal{B} \cup \mathcal{M}'_\mathcal{C} \rangle$. Докажем теперь, что если нужное нам утверждение верно для фильтра $\mathfrak{R}$ и множество V таково, что для всех $X \supset V$ выполняется включение $X \in \mathfrak{R}$, то $f_{\mathfrak{R} \cup \{V\}} \in \langle \mathcal{M}'_\mathcal{B} \cup \mathcal{M}'_\mathcal{C} \rangle$.

Если $T(f, V) = \varnothing$, то доказывать нечего, так как $f_\mathfrak{R} = f_{\mathfrak{R} \cup \{V\}}$ (это будет, в частности, при $V = \varnothing$). Предположим, что $T(f, V) \neq \varnothing$. Пусть $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \cup \{V\}$ и $U = W(f) \backslash V$. Рассмотрим функцию

$$h(\overline{x}) = S'_U(G_{f,V}, f_\mathfrak{R}).$$

По лемме 19 для доказательства равенства $h = f_{\mathfrak{R}'}$ достаточно проверить равенства $T(h, X) = T(f_{\mathfrak{R}'}, X)$ при всевозможных $X \subseteq W(f)$.

Как и ранее, $X \backslash U \subseteq V$, кроме того, $X \backslash U = V$ тогда и только тогда, когда $X \supseteq V$, а в этом случае $X \cup U = W(f)$. Если же $V \not\subseteq X$, то $X \backslash U \subset V$ и $T(G_{f,V}, X \backslash U) = \varnothing$. По лемме 18 имеем

$$\begin{aligned} T(h, X) &= (T(G_{f,V}, X \cup U) \cap T(f_\mathfrak{R}, X)) \cup T(G_{f,V}, X \backslash U) && = \\ &= \begin{cases} T(G_{f,V}, X \cup U) \cap T(f_\mathfrak{R}, X), & \text{если } V \not\subseteq X; \\ T(f_\mathfrak{R}, X) \cup T(G_{f,V}, V) & \text{— в противном случае} \end{cases} && = \end{aligned}$$

(если $X \not\subseteq U$, то $X \cup U \supset U$ и $T(G_{f,V}, X \cup U) = TF(f)$, если же $X \subseteq U$, то

$T(G_{f,V}, X \cup U) = \varnothing)$

$$= \begin{cases} T(f_{\Re}, X), & \text{если } V \not\subseteq X \text{ и } X \not\subseteq U; \\ \varnothing, & \text{если } V \not\subseteq X \text{ и } X \subseteq U; \\ T(f_{\Re}, V) \cup T(G_{f,V}, V), & \text{если } X = V; \\ T(f_{\Re}, X) \cup T(G_{f,V}, V), & \text{если } X \supset V. \end{cases}$$

При $X = V$ справедливо $T(f_{\Re}, V) = \varnothing$, отсюда имеем $T(h, V) = T(G_{f,V}, V) = T(f, V)$. Далее, при $X \supset V$ выполнено $T(f_{\Re}, X) = T(f, X) \supseteq T(f, V) = T(G_{f,V}, V)$. Таким образом,

$$T(h, X) = \begin{cases} T(f_{\Re}, X), & \text{если } X \neq V; \\ T(f, V), & \text{если } X = V; \end{cases} = T(f_{\Re'}, X)$$

для всех $X \subseteq W(f)$. Итак, $f_{\Re'} \in \langle \mathcal{M}'_B \cup \mathcal{M}'_C \rangle$. Наконец, для $\Re = P(W(f))$ справедливо равенство $f_{\Re} = f$, и предложение доказано.

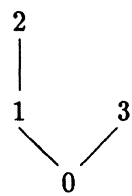
5. Сохранение решеточных пересечений и взаимной однозначности

В этом разделе нам придется рассматривать функции, не только не принадлежащие классу $\mathcal{M}'$, но даже не являющиеся разбиваемыми. Мы рассмотрим некоторые условия на функции и докажем, что каждая функция из $\langle \mathcal{M}' \rangle$ удовлетворяет семи из них, а функции, удовлетворяющие восьмому, образуют подалгебру в $\langle \mathcal{M}' \rangle$. Далее мы покажем, что функции, не содержащиеся в этой подалгебре, — это в точности функции из множества $\Omega(\mathcal{M}' \cup \mathcal{N}')$, где $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cap \langle \mathcal{M}' \rangle$.

5.1. Восемь условий. Обозначим через ω следующее бинарное отношение (записанное в матричной форме по столбцам):

$$\omega = \begin{pmatrix} 01230001 \\ 01231232 \end{pmatrix},$$

это отношение является частичным порядком:



Пусть $f \in P_4$. Через $W(f) \subseteq \underline{\mathrm{ar} f}$ обозначим множество всех переменных x_i функции f таких, что если $f(\overline{x}) = 3$, то $x_i = 3$ (если f не принимает значения 3, то $W(f) = \underline{\mathrm{ar} f}$). Заметим, что если f разбиваема, то $W(f)$ в указанном только что смысле — это в точности множество $W(f)$ из определения разбиваемости. Пусть также $Z(f) = \underline{\mathrm{ar} f} \backslash W(f)$. Рассмотрим теперь следующие условия:

(D1) Если кортеж $\overline{x}$ таков, что $x_i = 3$ при $i \in W(f)$, то $f(\overline{a}) \in \{0,3\}$.

(D2) Если для кортежа $\overline{a}$ найдется $i \in \underline{\mathrm{ar} f}$ такой, что $x_i = 0$ и x_i — существенная переменная, то $f(\overline{a}) = 0$.

(D3) f сохраняет унарное отношение $\{(2)\}$.

(D4) f сохраняет отношение ω.

(D5) $f(3, \ldots, 3) = 0$.

(D6) Если $\overline{a}$ таков, что $x_i \in \{1,3\}$ при $i \in \underline{\mathrm{ar} f}$, то $f(\overline{a}) \in \{0,1\}$.

(D7) На кортеже $\overline{a}$, где $x_i \in \{1,3\}$, $i \in \underline{\mathrm{ar} f}$, функция f принимает значение 0, если $\{i \mid x_i = 1\} \supset W(f)$. Из $f(\overline{a}) = 1$ при $\{i \mid x_i = 1\} = W(f)$ следует условие (R2) для $W(f) \cup Z(f)$.

(D8) Если для $W(f)$ справедливо (R2), то множество $Z(f) = \underline{\mathrm{ar} f} \backslash W(f)$ ненумеруемо.

ЛЕММА 22. *Монотонно разбиваемая функция удовлетворяет условиям* (D1)—(D7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f монотонно разбиваема. Условия (D1), (D2) непосредственно вытекают из свойств (R1),(R2). Условие (D3) следует из (M5), а (D5) — это в точности условие (R4). Условия (D6), (D7) вытекают из (R1), (R2), (R4) и (M5). Проверим, что любая $f \in \mathcal{M}'$ сохраняет ω. Пусть $\mathrm{ar} f = n$ и кортежи $\overline{a}, \overline{b}$ таковы, что $(a_i, b_i) \in \omega$ для всех $i \in \underline{n}$. Если $f(\overline{a}) = 0$, то $(f(\overline{a}), f(\overline{b})) \in \omega$. В частности, это произойдет, если $a_i = 0$ для какого-нибудь $i \in \underline{n}$ или $a_i = 1$ для некоторого $i \in Z(f)$. Рассмотрим 4 случая.

СЛУЧАЙ 1. $f(\overline{b}) = 3$. Тогда поскольку $b_i = 3$ при $i \in W(f)$, то $a_i \in \{0,3\}$ при $i \in W(f)$. А тогда $f(\overline{a}) \in \{0,3\}$ и $(f(\overline{a}), f(\overline{b})) \in \omega$.

СЛУЧАЙ 2. $f(\overline{b}) = 2$. В этом случае поскольку $b_i \in \{1,2\}$ при $i \in W(f)$, то $a_i \in \{0,1,2\}$, поэтому $f(\overline{a}) \in \{0,1,2\}$ и снова получаем $(f(\overline{a}), f(\overline{b})) \in \omega$.

СЛУЧАЙ 3. $f(\bar{b}) = 1$. Тогда, как и в случае 2, $f(\bar{a}) \in \{0, 1, 2\}$ и, если $f(\bar{a}) \neq 0$, то $a_i = b_i$ при $i \in Z(f)$. При этом если $a_i = 2$, то и $b_i = 2$ для всех $i \in W(f)$. Применяя условие (M4), получаем $f(\bar{a}) = 1$ и $(f(\bar{a}), f(\bar{b})) \in \omega$.

СЛУЧАЙ 4. $f(\bar{b}) = 0$. Имеется три возможности (они не исключают друг друга):

если $b_i = 0$ для некоторого $i \in \underline{n}$ или $b_i = 1$ для некоторого $i \in Z(f)$, то $f(\bar{a}) = 0$;

$b_i = 3$ при $i \in W(f)$, тогда либо $a_i = 0$ для некоторого $i \in \underline{n}$, либо $a_i = 1$ для какого-нибудь $i \in Z(f)$, либо $\bar{a} = \bar{b}$, и во всех случаях $f(\bar{a}) = 0$;

$\{b_i \mid i \in W(f)\} \not\subseteq \{3\}, \{1, 2\}$, тогда либо найдется $i \in \underline{n}$ и $a_i = 0$, либо указанное условие сохранится и мы снова получаем равенство $f(\bar{a}) = 0$.

Итак, во всех случаях $(f(\bar{a}), f(\bar{b})) \in \omega$ и f сохраняет ω.

ЛЕММА 23. *Для всех функций* $f \in \langle \mathcal{M}' \rangle$ *выполняются условия* (D2)—(D6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку условия (D3),(D4) сформулированы на языке сохранения отношений, то они выполняются для любой $f \in \langle \mathcal{M}' \rangle$. Проверим, что операции итеративной алгебры не нарушают выполнимости (D2), (D5), (D6). Для унарных операций это очевидно.

Пусть $h = f \circ g$. Функции f, g удовлетворяют (D2), (D5) и (D6). Тогда h удовлетворяет (D2), так как для любого кортежа $\bar{a}$ если $a_i = 0$ при некотором i, то либо $h(\bar{a}) = f(g, a_{\mathrm{ar}g+1}, \ldots, a_{\mathrm{ar}h}) = 0$, либо $g(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}g}) = 0$, а значит, и $h(\bar{a}) = f(0, a_{\mathrm{ar}g+1}, \ldots, a_{\mathrm{ar}h}) = 0$. Далее, $h(3, \ldots, 3) = f(g(3, \ldots, 3)3, \ldots, 3) = f(0, 3, \ldots, 3) = 0$ и (D5) доказано. Пусть $\bar{a}$ таков, что $a_i \in \{1, 3\}$. Тогда $g(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}g}) \in \{0, 1\}$. Отсюда, используя условия (D2) и (D6) для f, получаем требуемое. Лемма 23 доказана.

Выполнимость условий (D1), (D7) для функций из $\langle \mathcal{M}' \rangle$ мы рассмотрим в следующем пункте вместе с условием (D8).

5.2. Условие (D8) и сигнатурные операции. Здесь мы покажем, что функции из $\langle \mathcal{M}' \rangle$, удовлетворяющие условию (D8), образуют подалгебру в $\langle \mathcal{M}' \rangle$.

ЛЕММА 24. *Если* $h = \nabla_{n-1,n}(f)$ *и функция* $f \in \langle \mathcal{M}' \rangle$ *удовлетворяет* (D1), (D7), *то и* h *удовлетворяет* (D1), (D7). *Если, кроме того,* f

удовлетворяет (D8), *то и* h *удовлетворяет* (D8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала, что

$$W(h) \supseteq \begin{cases} W(f), & \text{если } n, n-1 \notin W(f); \\ (W(f) \setminus \{n\}) \cup \{n-1\} & \text{— в противном случае.} \end{cases} \qquad (1)$$

Действительно, если $h(\overline{x}) = 3$, то $f(\overline{x}, x_n) = 3$, где $x_n = x_{n-1}$. Поэтому $x_i = 3$ при $i \in W(f)$. Отсюда мы и получаем нужное включение.

Из включения (1) непосредственно вытекает (D1). Проверим условие (D7). Рассмотрим h на наборе $\overline{x}$, где $x_i = 1$ при $i \in W(h)$ и $x_i \in \{1, 3\}$. Тогда для кортежа $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_n = x_{n-1}$, справедливо включение $\{i \mid x_i = 1\} \supseteq W(f)$. Кроме того, из (1) следует, что если $j \notin W(h)$, то $j \notin W(f)$. Поэтому при $W(h) \subset \{i \in \underline{n-1} \mid x_i = 1\}$ условие (D7) для f влечет равенства $h(\overline{x}) = f(\overline{x}, x_n) = 0$. Пусть теперь $\{i \in \underline{n-1} \mid x_i = 1\} = W(h)$. Если найдется $j \in W(h)$ такой, что $j \notin W(f)$ или $n - 1 \in W(f)$ и $n \notin W(f)$, то $\{i \in \underline{n} \mid x_i = 1\} \supset W(f)$ и $h(\overline{x}) = 0$, т.е. $W(h) \cup Z(h)$ не удовлетворяет (R2).

Рассмотрим случай $W(h) \subseteq W(f)$ ($W(f) = W(h)$ или $W(f) = W(h) \cup \cup \{n\}$), при этом $n - 1$ и n содержатся или не содержатся в $W(f)$ одновременно. Тогда $\{i \in \underline{n} \mid x_i = 1\} = W(f)$ и $h(\overline{x}) = f(\overline{x}, x_n)$. Если $W(f) \cup Z(f)$ не удовлетворяет (R2), то, используя условие (D7) для f, имеем $h(\overline{x}) = f(\overline{x}, x_n) = 0$ и $W(h) \cup Z(h)$ не удовлетворяет (R2). В противном случае нам нужно показать, что $W(h) \cup Z(h)$ удовлетворяет (R2). Так как $n - 1$ и n содержатся или не содержатся в $W(f)$ одновременно, то кортеж $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ удовлетворяет условию $b_i \in \{1, 2\}$ при $i \in W(h)$ и $b_i \in \{2, 3\}$ при $i \in Z(h)$ тогда и только тогда, когда кортеж $(b_1, \ldots, b_n)$, $b_n = b_{n-1}$, удовлетворяет условию $b_i \in \{1, 2\}$ при $i \in W(f)$ и $b_i \in \{2, 3\}$ при $i \in Z(f)$. Поэтому из (R2) для $W(f) \cup Z(f)$ следует свойство (R2) для $W(h) \cup Z(h)$.

Пусть теперь f удовлетворяет (D8). Если $W(f) \cup Z(f)$ не удовлетворяет (R2), то и $W(h) \cup Z(h)$ не удовлетворяет (R2) согласно доказанному. Рассмотрим случай, когда $W(f) \cup Z(f)$ удовлетворяет (R2). Пусть сначала $W(h) \subseteq W(f)$. По лемме 12 если $Z(h)$ нумеруемо, то и $Z(f)$ нумеруемо, а это противоречит условию настоящей леммы. Если $W(h) \nsubseteq W(f)$, то по доказанному выше $W(h) \cup Z(h)$ не удовлетворяет (R2). Лемма 24 доказана.

ЛЕММА 25. *Если* $h = f \circ g$, *где* $f, g \in \langle \mathcal{M}' \rangle$ *удовлетворяют* (D1), (D7), *то и* h *удовлетворяет* (D1), (D7). *Если, кроме того,* f *или* g *удовлетворяет* (D8), *то и* h *удовлетворяет* (D8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathrm{ar}f = n$, $\mathrm{ar}g = m$. Рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1. $1 \in W(f)$. Тогда $W(h) = W(g) \cup W(f)$, если функции f и g принимают значение 3 на каких-либо кортежах, и $W(h) = \underline{\mathrm{ar}h}$ в противном случае. Действительно, если f или g не принимают значение 3, то и h не принимает. В первом случае это очевидно, а во втором вытекает из включения $1 \in W(f)$. Таким образом, $W(h) = \underline{\mathrm{ar}h}$. Если же $h(\overline{x}) = 3$, то $x_i = 3$ при $i \in W(f)$ и $g(x_1, \ldots, x_m) = 3$, а отсюда $x_i = 3$ при $i \in W(g)$. Обратно, для всякого $i \in Z(f)$ найдутся кортежи $\overline{a}, \overline{b}$ такие, что $g(\overline{a}) = 3$, $f(3, \overline{b}) = 3$ и $b_i \neq 3$. Аналогично рассуждаем для $i \in Z(g)$.

Проверим (D1). Рассмотрим кортеж $\overline{x}$, для которого $x_i = 3$ при $i \in W(h)$. Так как $W(g) \subseteq W(h)$, то $g(x_1, \ldots, x_m) \in \{0, 3\}$. Если $g(x_1, \ldots, x_m) = 0$, то $f(0, x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1}) = 0$. Если же $g(x_1, \ldots, x_m) = 3$, то из условия (D1) для f имеем $f(\overline{x}) = f(3, x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1}) \in \{0, 3\}$.

Условие (D7) мы проверим лишь в тех случаях, когда $W(g) \cup Z(f)$ и $W(f) \cup Z(f)$ удовлетворяют (R2); остальные случаи будут рассмотрены при проверке (D8). Итак, пусть кортеж $\overline{x}$ таков, что $x_i \in \{1, 3\}$ и $x_i = 1$ при $i \in W(h)$. Если $\{i \in \underline{n+m-1} \mid x_i = 1\} \supset W(h)$, то $\{i \in \underline{m} \mid x_i = 1\} \supset W(g)$ или $\{i \in \{m+1, \ldots, n+m-1\} \mid x_i = 1\} \supset \overline{W}(f)$. Используя (D7) для g или для f, получаем $h(\overline{x}) = 0$. Если $\{i \in \underline{n+m-1} \mid x_i = 1\} = W(h)$ и $h(\overline{x}) = 1$, то ввиду условия (D7) для g и f справедливы равенства $\{i \in \underline{m} \mid x_i = 1\} = W(g)$ и $\{i \in \{m+1, \ldots, n+m-1\} \mid x_i = 1\} = W(f)$. Отсюда $W(h) = W(g) \cup W(f)$ и по замечанию 2 разбиение $W(h) \cup Z(h)$ удовлетворяет (R2).

Пусть теперь f или g удовлетворяют (D8). Если $W(g) \cup Z(g)$ не удовлетворяет (R2), то для любого кортежа $\overline{x}$, $x_i = 1$ при $i \in W(g)$ и $x_i \in \{1, 3\}, i \in \underline{m}$, выполнено равенство $g(\overline{x}) = 0$. Но тогда для любых $x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1}$ справедливо $h(\overline{x}) = f(0, x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1}) = 0$. В частности, это справедливо для кортежей, указанных в условии (D7).

Рассмотрим случай, когда $W(g) \cup Z(g)$ удовлетворяет (R2), а $W(f) \cup$

$\cup Z(f)$ не удовлетворяет. Из свойства (D7) для функции g вытекает, что на любом кортеже $\overline{x}$, $x_i \in \{1,3\}$ $(i \in \underline{n+m-1})$ и $x_i = 1$ при $i \in W(h)$, функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ принимает значение 0 или 1. Поэтому $h(\overline{x})$ равно либо 0, либо $f(1, x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1})$. Поскольку $\{i \in \{m+1, \ldots, n+m-1\} \mid x_i = = 1\} \supseteq W(f)$, то $h(\overline{x}) = 0$ по (D7) для f. Таким образом, в обоих случаях $W(h) \cup Z(h)$ не удовлетворяет (R2), и h удовлетворяет (D7).

Пусть, наконец, $W(f) \cup Z(f)$ и $W(g) \cup Z(g)$ удовлетворяют (R2). Тогда $Z(f)$ или $Z(g)$ ненумеруемо. Пусть ν — нумерация $Z(h)$, тогда h принимает значение 3 и $W(h) = W(f) \cup W(g)$. По замечанию 1 отображения $\nu \mid_{Z(g)}$ и $\nu \mid_{\overline{Z}(f)}$ являются нумерациями $Z(g)$ и $\overline{Z}(f)$, что противоречит условию. Значит, $Z(h)$ ненумеруемо, и h удовлетворяет (D8).

СЛУЧАЙ 2. $1 \notin W(f)$. Тогда $\overline{W}(f) \subseteq W(h) \subseteq \overline{W}(f) \cup \overline{Z}(f)$, если f принимает значение 3, и $W(h) = \underline{\mathrm{ar} h}$ в противном случае. Действительно, если $h(\overline{x}) = 3$, то $f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1}) = 3$, а потому $x_i = 3$ при $i \in \overline{W}(f)$. С другой стороны, так как $1 \notin W(f)$, то найдется кортеж $\overline{x}$ такой, что $x_1 \neq 3$ и $f(\overline{x}) = 3$. Поскольку f сохраняет частичный порядок ω, то $f(\overline{y}) = 3$, где

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } x_i \neq 0,1; \\ 2 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

В частности, $y_1 = 2$. Однако функция g сохраняет $\{(2)\}$, поэтому

$$\begin{aligned} h(2, \ldots, 2, y_2, \ldots, y_n) &= f(g(2, \ldots, 2), y_2, \ldots, y_n) = \\ &= f(2, y_2, \ldots, y_n) = f(\overline{y}) = 3. \end{aligned}$$

Отсюда получаем второе включение.

Условие (D1) немедленно вытекает из включения $\overline{W}(f) \subseteq W(h)$, так как $1 \notin W(f)$. Проверим (D7). Пусть кортеж $\overline{x}$ таков, что $x_i \in \{1,3\}$ при $i \in \underline{n+m-1}$ и $x_i = 1$ при $i \in W(h)$. Тогда $g(x_1, \ldots, x_m) \in \{0,1\}$. Если $g(x_1, \ldots, x_m) = 0$, то $h(\overline{x}) = 0$ по условию (D2). Если же $g(x_1, \ldots, x_m) = 1$, то $f(1, x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1}) = 0$, так как $1 \notin W(f)$ и $x_i = 1$ для всех $i \in \overline{W}(f)$. Таким образом, $h(\overline{x}) = 0$, и $W(h) \cup Z(h)$ не удовлетворяет (R2). Условие (D7), а вместе с ним и (D8) доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *При доказательстве условия* (D8) *в случае* 2 *нам не потребовалось предположение, что функции f или g удовлетворяют этому условию.*

В разделе 3 нами были рассмотрены следующие случаи применения операций итеративной алгебры к монотонно разбиваемым функциям:

— суперпозиция $f \circ g$, $f, g \in \mathcal{M}'_l$, $l \in \mathbf{N}$, $1 \in W(f)$;

— отождествление $\nabla_{n-1,n}(f)$, $n-1, n \in Z(f)$ и $\nu(n-1) = \nu(n)$ для некоторой нумерации ν множества $Z(f)$;

— отождествление $\nabla_{n-1,n}(f)$, $n-1, n \in W(f)$.

В последующих четырех леммах мы рассмотрим оставшиеся случаи суперпозиции и отождествления и покажем, что во всех этих случаях результат операции удовлетворяет условию (D8).

ЛЕММА 26. *Пусть $f \in (\mathcal{M}' \cup \mathcal{N}')^{(n)}$, $n-1, n \in Z(f)$ и для любой нумерации ν множества $Z(f)$ справедливо $\nu(n) \neq \nu(n-1)$. Тогда функция $h = \nabla_{n-1,n}(f)$ удовлетворяет* (D8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $W(h) = W(f)$, то всякая нумерация ν множества $Z(h)$ продолжается по лемме 12 до нумерации $\overline{\nu}$ множества $Z(f)$. Но тогда $\overline{\nu}(n) = \overline{\nu}(n-1)$, а это противоречит условию. Множество $Z(h)$ ненумеруемо. Если $W(h) \neq W(f)$, то $W(h) \not\subseteq W(f)$ и на наборе $\overline{x}$, где $x_i = 1$ при $i \in W(h)$ и $x_i = 3$ в противном случае, имеем $h(\overline{x}) = f(\overline{x}, x_{n-1}) = 0$, так как $x_j = 1$ для всех $j \in W(h) \setminus W(f) \neq \varnothing$. Таким образом, $W(h)$ не удовлетворяет (R2).

ЛЕММА 27. *Если $h = \nabla_{n-1,n}(f)$, где $f \in (\mathcal{M}' \cup \mathcal{N}')^{(n)}$ и $\{n, n-1\} \not\subseteq W(f), Z(f)$, то h удовлетворяет* (D8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in Z(f)$. Тогда $W(h) \cup \{n\} \supset W(f)$. Далее, рассматривая h на подходящем кортеже, как в доказательстве леммы 26, получаем, что $W(h)$ не удовлетворяет (R2).

ЛЕММА 28. *Если $f, g \in \mathcal{M}' \cup \mathcal{N}'$ и $1 \notin W(f)$, то функция $h = f \circ g$ удовлетворяет условию* (D8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в точности совпадает со случаем 2 в доказательстве леммы 25 (см. также замечание после леммы 25).

ЛЕММА 29. *Если* $f \in \mathcal{M}'_{l_1} \cup \mathcal{N}'_{l_1}$, $g \in \mathcal{M}'_{l_2} \cup \mathcal{N}'_{l_2}$, $l_1 \neq l_2$, $1 \in W(f)$, *то* $h = f \circ g$ *удовлетворяют условию* (D8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $Z(h)$ ненумеруемо. Пусть ν есть l-нумерация множества $Z(h)$, где l — некоторое натуральное число. Тогда ограничения $\nu\ |_{\overline{Z}(f)}$ и $\nu\ |_{Z(g)}$ являются l-нумерациями множеств $\overline{Z}(f)$ и $Z(g)$ соответственно. Отсюда по (R2) имеем $l = l_1 = l_2$, что противоречит условию леммы.

5.3. Строение алгебр $\varphi(\Theta)$. Обозначим через Λ' множество всех функций из $\langle \mathcal{M}' \rangle$, удовлетворяющих условию (D8). Заметим, что $\Lambda = \Omega(\mathcal{M}') \cup \Lambda'$. Поскольку Λ' — подалгебра и каждая функция из $\Pi(\mathcal{M}' \cup \mathcal{N}')$ порождает алгебру, содержащую некоторую разбиваемую функцию (например, полученную с помощью отождествления фиктивных переменных), то функции из $\Omega(\mathcal{M}' \cup \mathcal{N}')$ не удовлетворяют условию (D8). Отсюда, а также из лемм 10, 13, 14 и 24—29 вытекает

ЛЕММА 30. *Справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{M}' \rangle = \Omega(\mathcal{M}') \cup \Omega(\mathcal{N}') \cup \Lambda' = \Omega(\mathcal{M}') \cup \Lambda.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для каждой* $\Theta \in \prod_{l \in \mathbf{N}} \mathrm{Sub}_{0,1} P(\{0,1\}^l)$ *справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{M}'_\Theta \cup \Lambda \rangle = \Omega(\mathcal{M}'_\Theta) \cup \Lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно показать, что $\langle \mathcal{M}'_\Theta \cup \Lambda \rangle \subseteq \Omega(\mathcal{M}'_\Theta) \cup \Lambda$. Пусть $f, g \in \Omega(\mathcal{M}'_\Theta) \cup \Lambda$. Тогда применение унарной операции к функции f по леммам 16, 17, 24, 26, 27 не выводит за пределы множества $\Omega(\mathcal{M}'_\Theta) \cup \Lambda$. А по леммам 15, 25, 28, 29 функция $f \circ g$ содержится в $\Omega(\mathcal{M}'_\Theta) \cup \Lambda$. Предложение 2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Отображение φ взаимно однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Theta = (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots)$, $\Upsilon = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots)$, $\Theta \neq \Upsilon$ — элементы множества $\prod_{l \in \mathbf{N}} \mathrm{Sub}_{0,1} P(\{0,1\}^l)$, причем $\mathcal{Q}_l \neq \mathcal{U}_l$ для некоторого $l \in \mathbf{N}$ и $B \in \mathcal{Q}_l \setminus \mathcal{U}_l$. Тогда

$$\varphi(\Theta) = \langle \mathcal{M}'_\Theta \cup \Lambda \rangle = \Omega(\mathcal{M}'_\Theta) \cup \Lambda \neq \Omega(\mathcal{M}'_\Upsilon) \cup \Lambda = \langle \mathcal{M}'_\Upsilon \cup \Lambda \rangle = \varphi(\Upsilon),$$

поскольку $f_B \in \mathcal{M}'_\Theta \backslash \mathcal{M}'_\Upsilon$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Отображение φ — нижний гомоморфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 30 достаточно проверить, что $\mathcal{M}'_\Theta \cap \mathcal{M}'_\Upsilon = \mathcal{M}'_{\Theta\wedge\Upsilon}$ для любых $\Theta, \Upsilon \in \prod_{l\mathbf{N}} \mathrm{Sub}_{0,1} P(\{0,1\}^l)$. Включение $\supseteq$ очевидно. Проверим обратное включение. Для каждой монотонно l-разбиваемой функции $f \in \mathcal{M}'_\Theta \cap \mathcal{M}'_\Upsilon$, $l \in \mathbf{N}$, любого $X \subseteq W(f)$ множество $B(f, X)$ содержится в l-й компоненте Θ и Υ, отсюда $B(f, X)$ содержится в пересечении этих компонент, т.е. $f \in \mathcal{M}_{\Theta\wedge\Upsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует теперь из предложений 1, 3, 4.

Автор выражает свою признательность участникам семинара "Алгебраические системы" под руководством профессора Л. Н. Шеврина за высказанные ими полезные замечания и предложения. Особо автор хотел бы поблагодарить А. А. Крохина, читавшего рукопись, и Е. В. Суханова, внесшего ряд справедливых исправлений и предложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. И. Мальцев*, Итеративные алгебры Поста, Новосибирск, 1976.
2. *E. Post*, Two-valued iterative systems of mathematical logic, Princeton Univ. Press, 1941.
3. *L. Haddad, I. Rosenberg*, Un intervalle Boolean de clones sur un univers fini, Ann. Sci. Math., Quebec, **12**, N 2 (1988), 211—231.
4. *И. С. Негру*, Об алгебраических свойствах структуры классов Поста и их многозначных обобщений, Исследования по неклассическим логикам и формальным системам, М., Наука, 1983, 300—315.
5. *А. А. Булатов*, Тождества в решетках замкнутых классов, Дискретная математика, **4**, N 4 (1992), 140—148.
6. *V. B. Repnitskii*, On sublattices of semigroup lattices, Order (submitted).
7. *V. B. Repnitskii*, On lattices which are embeddable in subsemigroups lattices, Semigroup Forum, **46** (1993), 388—397.

8. *A. Szendrei*, Clones in universal algebra, Montreal, 1986.

9. *X. Hong Dang*, On sublattice varieties, Algebra universalis, **27**, N 3 (1990), 411—412.

Поступило 23 ноября 1993 г.

Адрес автора:

БУЛАТОВ Андрей Арнольдович

РОССИЯ,

620083, Екатеринбург,

ул. Ленина, 51,

Уральский госуниверситет,

ММФ, кафедра алгебры и геометрии