Оглавление

Предисловие

Настоящий курс лекций был прочитан в Научно-образовательном центре при Математическом институте им. В. А. Стеклова. Он содержит независимое изложение некоторых разделов теории линейных эллиптических уравнений второго порядка, не входящих в традиционные курсы. Предполагается, что читатели знакомы с основными понятиями и утверждениями функционального анализа. Изложение базируется на вариационном подходе к рассматриваемым вопросам и концепции обобщенного решения.

Курс состоит из двух частей. Первая часть – она содержит лекции, прочитанные В. П. Михайловым, – посвящена разрешимости основных краевых задач и необходимым для этого понятиям и утверждениям из теории пространств Соболева. Большое внимание уделено теоремам вложения и связи обобщенных решений с классическими. Вторая часть лекций, в которых обсуждаются более специальные свойства обобщенных решений, была прочитана А. К. Гущиным. Основной ее целью является доказательство фундаментального результата Е. Де Джорджи и Дж. Нэша о гёльдеровой непрерывности решений уравнения с измеримыми и ограниченными коэффициентами. Потребности этого доказательства во многом определили содержание второй части.

Часть I

Введение

Наш курс посвящен обобщенным решениям простейших краевых задач для линейных эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. В качестве введения рассмотрим классическую задачу о равновесии мембраны. Мы покажем, что функция, задающая уравнение мембраны в состоянии равновесия, является обобщенным решением некоторой краевой задачи для эллиптического уравнения – уравнения Эйлера для квадратичного функционала, представляющего собой потенциальную энергию мембраны.

Напомним, что мембрана – это тонкая пленка, сопротивляющаяся растяжению; будем представлять ее в виде поверхности в $\mathbb{R}^3 : u = u(x)$, $x \in Q$, где Q – некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $u(x) \in C^1(\,\overline{Q}\,)$. Считаем, что точки мембраны, находящейся под действием некоторой системы сил, совершают только вертикальные перемещения, и все силы, приложенные к мембране, имеют только вертикальные составляющие.

Пусть в точках $x \in Q$ на мембрану действует сила с плотностью $f(x) - a(x)u$, $x \in Q$, а в точках $x \in \partial Q$ сила с (линейной) плотностью $f_1(x) - a_1(x)u$, $x \in \partial Q$, т.е. на мембрану действуют внешние силы с плотностью $f(x)$ для $x \in Q$ и $f_1(x)$ для $x \in \partial Q$, и силы сопротивления упругих сред, в которых находится внутренность мембраны ($x \in Q$) и ее граница ($x \in \partial Q$) с плотностями $-a(x)u$ в области Q и $-a_1(x)u$ на границе ∂Q, пропорциональные величине перемещения мембраны и обратные ему по знаку, $a(x) \geqslant 0$, $x \in Q$, $a_1(x) \geqslant 0$, $x \in \partial Q$ – коэффициенты упругости соответствующих сред.

Работа этих сил по перемещению мембраны из какого-то положения $u = u_0(x)$ в положение $u = u(x)$ соответственно равны

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \int_Q \int_{u_0(x)}^{u(x)} \big(f(x) - a(x)u\big)\, du\, dx \\
&= \int_Q \left[f(x)\big(u(x) - u_0(x)\big) - \frac{a(x)}{2}\big(u^2(x) - u_0^2(x)\big)\right] dx, \\
T_2 &= \int_{\partial Q} \left[f_1(x)\big(u(x) - u_0(x)\big) - \frac{a_1(x)}{2}\big(u^2(x) - u_0^2(x)\big)\right] dS
\end{aligned}
$$

Во внутренних точках $x \in Q$ на мембрану действует также внутренняя упругая сила. Будем считать, что ее работа по перемещению мембраны из положения $u_0(x)$ в положение $u(x)$ равна

$$T_3 = -\int_Q k(x)\big(\sqrt{1+|\nabla u|^2} - \sqrt{1+|\nabla u_0|^2}\,\big)\,dx$$

(работа этой силы, отнесенная к площадке $dx = dx_1\,dx_2$ пропорциональна изменению площади мембраны, проектирующейся на эту площадку, с коэффициентом пропорциональности $k(x) > 0$, который называется коэффициентом натяжения мембраны). Для упрощения задачи будем считать, что для всех допустимых положений мембраны функция $|\nabla u|$, $x \in \overline{Q}$, столь мала, что величиной $|\nabla u|^4$, $x \in \overline{Q}$, можно пренебречь. В таком случае можно считать, что работа внутренней упругой силы равна

$$T_3 = -\int_Q \frac{k(x)}{2}\big(|\nabla u|^2 - |\nabla u_0|^2\big)\,dx.$$

Таким образом, потенциальная энергия мембраны $U(u)$ в положении $u(x)$ равна

$$\begin{aligned} U(u) &= U(u_0) - T_1 - T_2 - T_3 \\ &= C_0 + \frac{1}{2}\int_Q \big(k(x)|\nabla u|^2 + a(x)u^2 - 2f(x)u\big)\,dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\partial Q}\big(a_1(x)u^2 - 2f_1(x)u\big)\,dS, \end{aligned}$$

где $U(u_0)$ – потенциальная энергия мембраны в положении $u_0(x)$, а C_0 – не зависящая от $u(x)$ постоянная.

В рассмотренном случае на значения функции $u(x)$ на границе ограничений не налагается; это случай со свободной границей. Наряду с ним важным является также случай, когда граница закреплена, т.е. когда при всех допустимых $u(x)$ выполняется условие

$$u(x)\big|_{\partial Q} = \varphi(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ – заданная на ∂Q функция (граница мембраны проходит через пространственную кривую $u = \varphi(x)$, $x \in \partial Q$). В этом случае потенциальная энергия мембраны в положении $u(x)$ имеет вид

$$U(u) = C_1 + \frac{1}{2}\int_Q \big(k(x)|\nabla u|^2 + a(x)u^2 - 2f(x)u\big)\,dx,$$

где C_1 – не зависящая от $u(x)$ постоянная.

Согласно принципу механики в состоянии равновесия мембраны ее потенциальная энергия минимальна, т.е. *в случае свободной границы* характеризующая состояние равновесия *функция* $u(x) \in C^1(\overline{Q})$ *реализует минимальное значение функционала*

$$J_1(u) = \int_Q \big(k(x)|\nabla u|^2 + a(x)u^2 - 2f(x)u\big)\,dx + \int_{\partial Q} \big(a_1(x)u^2 - 2f_1(x)u\big)\,dS, \tag{2}$$

среди всех функций из $C^1(\overline{Q})$, а *в случае закрепленной границы – минимальное значение функционала*

$$J_2(u) = \int_Q \big(k(x)|\nabla u|^2 + a(x)u^2 - 2f(x)u\big)\,dx, \tag{3}$$

среди всех функций из $C^1(\overline{Q})$, *удовлетворяющих условию* (1).

Здесь мы не будем заниматься вопросом о существовании функции $u(x)$; ниже существование и единственность решений каждой из этих задач будут установлены в значительно более общей ситуации.

Пусть функция $u(x) \in C^1(\overline{Q})$ удовлетворяет условию (1) и реализует минимальное значение функционала (3) на множестве функций из $C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющих условию (1). Тогда при любой функции $v(x) \in C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющей условию

$$v\big|_{\partial Q} = 0, \tag{1_0}$$

для всех $t \in \mathbb{R}^1$ имеет место неравенство

$$P_2(t) = J_2(u+tv) - J_2(u) = 2t\int_Q \big(k(x)(\nabla u, \nabla v) + auv - fv\big)\,dx + t^2\int_Q \big(k(x)|\nabla v|^2 + av^2\big)\,dx \geqslant 0, \tag{4}$$

и следовательно,

$$\int_Q \big(k(x)(\nabla u, \nabla v) + auv - fv\big)\,dx = 0 \tag{5}$$

для всех $v \in C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющих условию (1_0).

Аналогично, если $u(x) \in C^1(\overline{Q})$ и реализует минимум функционала (2) на множестве $C^1(\overline{Q})$, то при любой функции $v \in C^1(\overline{Q})$ при всех $t \in \mathbb{R}^1$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}P_1(t) &= J_1(u+tv) - J_1(u)\\ &= 2t\left[\int_Q \big(k(x)(\nabla u, \nabla v) + auv - fv\big)\,dx + \int_{\partial Q} (a_1 uv - f_1 v)\,dS\right]\\ &\quad + t^2\left[\int_Q \big(k(x)|\nabla v|^2 + av^2\big)\,dx + \int_{\partial Q} a_1 v^2\,dS\right] \geqslant 0,\end{aligned}$$

и следовательно,

$$\int_Q \big(k(x)(\nabla u, \nabla v) + auv - fv\big)\,dx + \int_{\partial Q} (a_1 uv - f_1 v)\,dS = 0 \qquad (6)$$

для всех $v \in C^1(\overline{Q})$.

Верны и обратные утверждения: если подчиненная граничному условию (1) и принадлежащая $C^1(\overline{Q})$ функция $u(x)$, удовлетворяет интегральному тождеству (5) при всех подчиненных граничному условию (1_0) функциях v из $C^1(\overline{Q})$, то она реализует минимальное значение функционала (3) на множестве функций из $C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющих граничному условию (1). И аналогично, если функция $u(x)$ из $C^1(\overline{Q})$ удовлетворяет интегральному тождеству (6) при любой v из $C^1(\overline{Q})$, то она реализует минимальное значение функционала (2) на множестве функций $C^1(\overline{Q})$. Докажем первое из них, второе доказывается аналогично.

Пусть $u(x) \in C^1(\overline{Q})$, $u\big|_{\partial Q} = \varphi$, и выполняется при всех $v \in C^1(\overline{Q})$, $v\big|_{\partial Q} = 0$, интегральное тождество (5), а $w(x)$ – произвольная функция из $C^1(\overline{Q})$, $w\big|_{\partial Q} = \varphi$. Пусть $v(x) = w(x) - u(x)$. Очевидно, $v \in C^1(\overline{Q})$, $v\big|_{\partial Q} = 0$. В силу (4) имеем неравенство

$$\begin{aligned}J_2(w) - J_2(u) &= \big(J_2(u+tv) - J_2(u)\big)\big|_{t=1}\\ &= 2\int_Q \big(k(x)(\nabla u, \nabla v) + auv - fv\big)\,dx + \int_Q \big(k(x)|\nabla v|^2 + av^2\big)\,dx\\ &= \int_Q \big(k(x)|\nabla v|^2 + av^2\big)\,dx \geqslant 0,\end{aligned}$$

из которого вытекает, что $J_2(w) \geqslant J_2(u)$, что и требовалось установить.

Таким образом, задачи нахождения функций, реализующих минимумы функционалов J_1 и J_2 эквивалентны нахождению функций, удовлетворяющим интегральным тождествам (6) и (5).

Можно доказать, что при достаточной гладкости данных задачи (функций $k(x), a(x), \ldots, \varphi(x)$ и границы области) функции $u(x)$, реализующие минимальные значения функционалов J_1 и J_2, принадлежат $C^2(\overline{Q})$. Тогда эти функции удовлетворяют не только интегральным тождествам (6) и (5), но и являются решениями следующих краевых задач: в случае свободной границы – задачи

$$
\begin{gathered}
-\operatorname{div}\big(k(x)\nabla u\big) + a(x)u = f(x), \qquad x \in Q, \\
\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} + a_1(x)u\right)\bigg|_{\partial Q} = f_1(x),
\end{gathered} \tag{7}
$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – единичный вектор нормали к ∂Q, внешней по отношению к области Q, а в случае закрепленной границы – задачи

$$
\begin{gathered}
-\operatorname{div}\big(k(x)\nabla u\big) + a(x)u = f(x), \qquad x \in Q, \\
u\big|_{\partial Q} = \varphi(x).
\end{gathered} \tag{8}
$$

Действительно, если функция $u(x) \in C^2(\overline{Q})$ и удовлетворяет при всех $v \in C^1(\overline{Q})$, $v\big|_{\partial Q} = 0$, равенству (5), то это равенство можно переписать в виде

$$
\int_Q \big(-\operatorname{div}\big(k(x)\nabla u\big) + au - f\big)v\,dx = 0,
$$

поскольку $k(\nabla u, \nabla v) = \operatorname{div}(kv \cdot \nabla u) - v \cdot \operatorname{div}(k\nabla u)$, а по формуле Остроградского

$$
\int_Q \operatorname{div}\big(k(x)v(x) \cdot \nabla u\big)\,dx = \int_{\partial Q} kv\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS = 0.
$$

Следовательно, функция $u(x)$ является решением задачи Дирихле (8).

Аналогично доказывается, что если функция $u(x)$ удовлетворяет при всех $v \in C^1(\overline{Q})$ равенству (6) и принадлежит $C^2(\overline{Q})$, то (при достаточно гладких данных задачи) она является решением краевой задачи (7).

Очевидно, верно и такое утверждение. Если функция $u(x) \in C^2(\overline{Q})$ и является решением задачи (8) или задачи (7), то в первом случае она удовлетворяет интегральному тождеству (5) при всех $v(x)$ из $C^1(\,\overline{Q}\,)$, удовлетворяющих условию (1_0), и интегральному тождеству (6) при всех $v(x) \in C^1(\,\overline{Q}\,)$ во втором случае.

Действительно, пусть, например, $u(x)$ есть решение задачи (7). Умножая первое равенство в (7) на $v(x) \in C^1(\,\overline{Q}\,)$ и интегрируя полученное равенство по Q, получим равенство

$$\begin{aligned}
\int_Q f(x)v(x)\,dx &= \int_Q \big(a(x)uv - \operatorname{div}(k(x)\nabla u)\cdot v\big)\,dx \\
&= \int_Q \big(a(x)uv + k(x)(\nabla u, \nabla v)\big)\,dx - \int_{\partial Q} k(x)v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS \\
&= \int_Q \big(a(x)uv + k(x)(\nabla u, \nabla v)\big)\,dx + \int_{\partial Q} \big(a_1(x)uv - f_1(x)v\big)\,dS,
\end{aligned}$$

совпадающее с тождеством (6).

Интегральное тождество (6) фактически является тождеством, с помощью которого ниже (во второй главе) будет определено обобщенное решение задачи (7), а с помощью интегрального тождества (5) – обобщенное решение задачи (8).

Таким образом, как об этом уже говорилось в начале введения, решение задачи о равновесии мембраны определяется с помощью обобщенного решения соответствующей краевой задачи.

Определение обобщенного решения краевой задачи будет дано во второй главе. Там же получены и результаты, из которых, в частности, вытекают существование и единственность решений обсуждавшихся выше задач, связанных с состоянием равновесия мембраны. При этом, как мы увидим, удобно пользоваться не пространствами типа $C^k(\,\overline{Q}\,)$ непрерывно дифференцируемых функций, а банаховыми пространствами обобщенно дифференцируемых функций – пространствами Соболева. Необходимые для второй главы сведения об этих пространствах изложены в первой главе.

Глава 1

Пространства Соболева и теоремы вложения

Вначале договоримся об обозначениях и терминологии.

Прежде всего области $Q, D, \Omega, \ldots$ n-мерного вещественного пространства $\mathbb{R}^n$, в которых задаются те или иные функции $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q, D, \Omega, \ldots$, *будут*, если противоположное не оговорено особо, *считаться ограниченными.*

Как обычно, множество всех комплекснозначных функций, имеющих в области Q все частные производные до порядка k включительно, непрерывные в Q, где k – некоторое целое неотрицательное число, будем обозначать через $C^k(Q)$, а подмножество этого множества, состоящее из всех функций, все частные производные которых непрерывны в $\overline{Q}$, обозначим через $C^k(\,\overline{Q}\,)$.

$C^k(\,\overline{Q}\,)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{C^k(\,\overline{Q}\,)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \max_{x \in \overline{Q}} |D^\alpha f(x)|,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – вектор с целыми неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, а

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}\,.$$

Множество всех функций, принадлежащих всем $C^k(Q)$, обозначим через $C^\infty(Q)$, т.е. $C^\infty(Q) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(Q)$. Аналогично, $C^\infty(\,\overline{Q}\,) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\,\overline{Q}\,)$.

Множество всех финитных в Q функций из $C^k(Q)$ будем обозначать через $C_0^k(Q)$, а пересечение всех этих множеств $\bigcap_{k=1}^\infty C_0^k(Q)$ – через $C_0^\infty(Q)$.

Множество всех измеримых в области Q функций, p-ые степени модулей которых интегрируемы по любой строго внутренней подобласти Q_1 области Q, $Q_1 \Subset Q$, где $p \geqslant 1$, будем обозначать через $L_{p,\mathrm{loc}}(Q)$, а подмножество этого множества, состоящее из функций, модули p-ых степеней которых интегрируемы по области Q, обозначим через $L_p(Q)$. При этом, как обычно, различающиеся на множестве меры нуль функции будем отождествлять, т.е. считать одним и тем же элементом пространства $L_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ ($L_p(Q)$). Множество $L_p(Q)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_p(Q)} = \left(\int_Q |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

$L_p(Q) \subset L_{p'}(Q)$ при $p > p'$ (напомним, что Q – ограниченная область).

Подмножество пересечения $\bigcap_{p \geqslant 1} L_p(Q)$, состоящее из всех существенно ограниченных функций, т.е. функций $f(x)$, для каждой из которых существует такая постоянная M, что $|f(x)| \leqslant M$ для п.в. $x \in Q$, будем обозначать через $L_\infty(Q)$. $L_\infty(Q)$ – банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(Q)} = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in Q} |f(x)| = \inf_{\operatorname{mes}\{|f(x)|>M\}=0} M.$$

Под $(n-1)$-мерной замкнутой поверхностью S мы будем понимать ограниченную замкнутую $(n-1)$-мерную поверхность без края класса C^k при некотором $k \geqslant 1$, т.е. лежащее в $\mathbb{R}^n$ связное ограниченное замкнутое множество $S = \overline{S}$, обладающее следующим свойством: для любой точки $x^0 \in S$ существует ее (n-мерная) окрестность U_{x^0} и принадлежащая $C^k(U_{x^0})$ функция $F_{x^0}(x)$, для которой $\nabla F_{x^0}(x^0) \neq 0$, такие, что множество $S \cap U_{x^0}$ описывается уравнением $F_{x^0}(x) = 0$ (т.е. все точки множества $S \cap U_{x^0}$ удовлетворяют уравнению $F_{x^0}(x) = 0$ и любая удовлетворяющая уравнению $F_{x^0}(x) = 0$ точка из U_{x^0} принадлежит S).

Граница рассматриваемых областей будет предполагаться состоящей из конечного числа непересекающихся замкнутых $(n-1)$-мерных поверхностей (класса C^1).

Заметим, что если замкнутая $(n-1)$-мерная поверхность S принадлежит классу C^k, то для любой ее точки x^0 существует столь малая ее окрестность U'_{x^0}, что пересечение $S \cap U'_{x^0}$ однозначно проектируется на некоторую $(n-1)$-мерную область D_{x^0} с границей класса C^k, лежащую в одной из координатных плоскостей, т.е. описывается при некотором i, $i = 1, \ldots, n$, уравнением

$$x_i = \varphi_{x^0}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$
$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in D_{x^0}, \qquad \varphi_{x^0} \in C^k(\overline{D}_{x^0}).$$

Пересечение $S \cap U'_{x^0}$ будем называть *простым куском* поверхности S.

Так как S ограничена и замкнута, то из покрытия $\{U'_x,\ x \in S\}$ поверхности S можно выбрать конечное подпокрытие. Совокупность соответствующих такому конечному покрытию простых кусков $S_1, \dots, S_N$ будем называть *покрытием поверхности* S *простыми кусками.*

Под $(n-1)$-мерной поверхностью S класса C^k будем понимать связную поверхность, которую можно так покрыть конечным числом (n-мерных) областей $U_i, i = 1, \dots, N$, что каждое из множеств $S_i = S \cap U_i$, $i = 1, \dots, N$, однозначно проектируется на некоторую $(n-1)$-мерную область D_i с границей класса C^k, лежащую в одной из координатных плоскостей, т.е. при некотором $p = p(i)$, $1 \leqslant p \leqslant n$, описывается уравнением

$$x_p = \varphi_i(x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n),$$
$$(x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n) \in D_i, \qquad \varphi_i \in C^k(\overline{D}_i).$$

Совокупность поверхностей S_i – простых кусков поверхности S будем называть *покрытием поверхности* S *простыми кусками.* В дальнейшем под $(n-1)$-мерной поверхностью мы будем понимать $(n-1)$-мерную поверхность класса C^k при некотором $k \geqslant 1$.

Пусть S – простой кусок некоторой лежащей в $\overline{Q}$ поверхности класса C^k при некотором $k \geqslant 1$ и пусть

$$x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \varphi(x'), \qquad x' \in D, \quad \varphi(x') \in C^k(\overline{D}),$$

– уравнение этого куска.

Заданную на S функцию $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $x \in S$, будем считать принадлежащей множеству $C^k(S)$, $f(x) \in C^k(S)$, если $f(x', \varphi(x')) \in C^k(\overline{D})$.

Пусть теперь S – замкнутая лежащая в $\overline{Q}$ поверхность класса C^k, $k \geqslant 1$, (в частности, $S = \partial Q$), а $S_1, \dots, S_N$ – ее покрытие простыми кусками. Заданную на S функцию $f(x)$, $x \in S$, считаем принадлежащей множеству $C^k(S)$, $f(x) \in C^k(S)$, если $f(x) \in C^k(S_i)$ при всех $i = 1, \dots, N$. Нетрудно убедиться в том, что принадлежность функции $f(x)$ множеству $C^k(S)$ не зависит от покрытия поверхности S простыми кусками.

Определим в $\overline{Q}$ функцию $r(x)$, $r(x) = \min_{y\in\partial Q}|x-y|$. Очевидно, $r(x) \in C(\overline{Q})$. Обозначим через Q_δ, $\delta > 0$, множество точек $\{x \in Q : r(x) > \delta\}$, а через Q^δ, $\delta > 0$, множество $\bigcup_{x^0\in Q}\{|x - x^0| < \delta\}$.

Пусть $\omega_1(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$ – бесконечно дифференцируемая четная неотрицательная функция переменного $t \in \mathbb{R}^1$, равная нулю для $|t| \geqslant 1$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_1(|x|)\,dx = \int_{|x|<1} \omega_1(|x|)\,dx = \sigma_n \int_0^1 \omega_1(r) r^{n-1}\,dr = 1,$$

где $\sigma_n = 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ $(\sigma_1 = 2)$. В качестве $\omega_1(t)$ можно взять, например, функцию

$$\omega_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_n}\, e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1, \end{cases}$$

с соответствующим образом подобранной постоянной C_n.

Функция

$$\omega_h(|x|) = \frac{1}{h^n}\,\omega_1\big(|x|/h\big), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

где число $h > 0$, называется *ядром усреднения.*

Очевидны следующие свойства ядра усреднения:

а) $\omega_h(|x|) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\omega_h(|x|) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^n$,

б) $\omega_h(|x|) \equiv 0$ для $|x| \geqslant h$

в) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(|x|)\,dx = 1,$

г) для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, при всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\big|D^\alpha \omega_h(|x|)\big| \leqslant \frac{c_\alpha}{h^{n+|\alpha|}}$$

с постоянной $c_\alpha > 0$, не зависящей от h.

Для любой функции $f \in L_1(Q)$ при всех $h > 0$ определена функция

$$f_h(x) = \int_Q f(y)\omega_h(|x-y|)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

называемая *усредненной функцией для функции* f (*усреднением функции* f). Ясно, что $f_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Усредненные функции будут играть в наших дальнейших рассмотрениях важную роль.

§ 1. Обобщенные производные и усредненные функции

Пусть непрерывная в Q функция $f(x)$ имеет непрерывную в Q производную $f_{x_i}(x)$. Тогда для любой $g(x) \in C_0^1(\,\overline{Q}\,)$ имеет место равенство

$$\int_Q f(x)\overline{g_{x_i}(x)}\,dx = -\int_Q f_{x_i}(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Оказывается этим равенством поизводная $f_{x_i}(x)$ функции $f(x)$ полностью определяется: легко видеть, что если для функции $f(x) \in C^1(Q)$ существует функция $h_i(x) \in C(Q)$ такая, что для любой $g(x) \in C_0^1(\,\overline{Q}\,)$ имеет место равенство

$$\int_Q f(x)\overline{g_{x_i}(x)}\,dx = -\int_Q h_i(x)\overline{g(x)}\,dx, \tag{1}$$

то функция $h_i(x)$, $x \in Q$, является производной $f_{x_i}(x)$ функции $f(x)$.

Если в равенстве (1) отказаться от непрерывности функций f и h_i, а потребовать их интегрируемость, то мы приходим к введенному С. Л. Соболевым понятию обобщенной производной.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – вектор с целыми неотрицательными компонентами. Функция $f^\alpha \in L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$ называется *α-ой обобщенной производной* (*о.п.*) функции $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$, если для всех $g(x) \in C_0^{|\alpha|}(\,\overline{Q}\,)$ имеет место равенство

$$\int_Q f(x)\overline{D^\alpha g(x)}\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_Q f^\alpha(x)\overline{g(x)}\,dx, \tag{2}$$

Этим равенством о.п. определяется (как элемент пространства $L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$) однозначно: если существует еще одна функция $f_1^\alpha(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$, для которой выполняется тождество (2), то функция $f^\alpha(x) - f_1^\alpha(x)$, принадлежащая при любой $Q_1 \Subset Q$ пространству $L_1(Q_1)$, удовлетворяет равенству

$$\int_Q \bigl(f^\alpha(x) - f_1^\alpha(x)\bigr)\overline{g(x)}\,dx = 0$$

для всех $g(x) \in C_0^{|\alpha|}(\,\overline{Q}_1)$. Поэтому $f^\alpha(x) = f_1^\alpha(x)$ в Q_1, а значит, и в Q.

Приведенное определение обобщенной производной по существу такое же как и определение производной обобщенной функции. Функцию $f(x)$ из $L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$ также можно рассматривать как обобщенную функцию (регулярную обобщенную функцию). При этом у нее существуют все производные любых порядков, являющиеся обобщенными функциями. В нашей ситуации производная $D^\alpha f$ является не просто обобщенной функцией, а регулярной обобщенной функцией, принадлежащей $L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$.

Поскольку для функции $f(x) \in C^{|\alpha|}(Q)$ равенство (2) выполняется с функцией $f^\alpha = D^\alpha f(x)$, где $D^\alpha f(x)$ обычная производная функции f, то эта производная является и соответствующей обобщенной производной функции f. Поэтому в дальнейшем о.п. f^α функции f будем обозначать через $D^\alpha f$, для о.п. первого, второго и т.д. порядков будем также пользоваться обозначениями $f_{x_i}, f_{x_i,x_j}, \dots$.

Отметим несколько просто доказываемых утверждений.

Поскольку для гладких функций $g(x)$ производная $D^\alpha g$ не зависит от поряка дифференцирования, то и о.п. $D^\alpha f$ не зависит от порядка дифференцирования.

Если функции f_i, $i = 1, 2$, имеют о.п. $D^\alpha f_i$, $i = 1, 2$, то функция $f = C_1 f_1 + C_2 f_2$ при любых постоянных C_1, C_2 имеет о.п. $D^\alpha f = C_1 D^\alpha f_1 + C_2 D^\alpha f_2$.

Если $D^\alpha f$ – о.п. функции f в области Q, а область $Q_1 \subset Q$, то $D^\alpha f$, $x \in Q_1$, является о.п. функции f в Q_1.

Если для функции $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$ существует о.п. $D^\alpha f = F$, а у функции F существует о.п. $D^\beta F$, то функция $D^\beta F$ является о.п. $D^{\alpha+\beta} f$ функции f.

Функция $f(x) = |x_1|$ в n-мерном шаре $\{|x| < 1\}$ имеет о.п. $f_{x_1} = \operatorname{sgn} x_1$, и $f_{x_i} = 0$, $i = 2, \dots, n$.

Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x_1$ в шаре $\{|x| < 1\}$ обобщенной производной f_{x_1} не имеет, а обобщенные производные по остальным переменным существуют и $f_{x_i} = 0$, $i = 2, \dots, n$.

О.п. $D^\alpha f$ функции f, в отличие от обычной производной, определяется сразу для порядка $|\alpha|$ без предположения о существовании соответствующих младших производных. Для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x_1 + \operatorname{sgn} x_2$ в n-мерном шаре $\{|x| < 1\}$ существует о.п. $f_{x_1 x_2} = 0$, но о.п. f_{x_1} и f_{x_2} не существует.

Несколько сложнее доказывается следующее утверждение: если функция f имеет о.п. $D^\alpha f$ в областях Q_1 и Q_2 и $Q = Q_1 \cup Q_2$

тоже область, то $D^\alpha f$ существует и в Q (доказательство см., например, в [1], [2]).

В нашем курсе основную роль будут играть пространства, связанные с квадратичной интегрируемостью. Поэтому мы, как правило, будем формулировать те или иные результаты и доказывать их лишь для случая, когда степень интегрируемости $p = 2$, хотя зачастую они справедливы и для других p.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $f(x) \in L_2(Q)$, то $f_h(x) \to f(x)$ в $L_2(Q)$ при $h \to 0$.*

Наряду с теоремой 1 имеют место и аналогичные утверждения, отличающиеся от теоремы 1 тем, что в их формулировках пространство $L_2(Q)$ заменено на $L_p(Q)$ при $p \geqslant 1$ или на $C(\overline{Q}\,)$.

Доказательство теоремы 1. Считая функцию $f(x)$ продолженной нулем вне Q, имеем

$$\begin{aligned}|f(x) - f_h(x)|^2 &= \left|\int_{|x-y|<h} \big(f(x) - f(y)\big)\omega_h(|x-y|)\,dy\right|^2 \\ &\leqslant \int_{|x-y|<h} |f(x) - f(y)|^2\,dy \cdot \frac{\mathrm{const}}{h^n} \\ &= \frac{\mathrm{const}}{h^n}\int_{|z|<h} |f(x) - f(x+z)|^2\,dz\end{aligned}$$

и, тем самым,

$$\|f - f_h\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{h^n}\int_{|z|<h} dz \int_Q |f(x) - f(x+z)|^2\,dx. \qquad (3)$$

Как известно, принадлежащая $L_2(Q)$ функция $f(x)$ *непрерывна в метрике* $L_2(Q)$, т.е. по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $h_0 > 0$, что

$$\int_Q |f(x) - f(x+z)|^2\,dx \leqslant \varepsilon$$

для всех z, $|z| \leqslant h_0$ $(f(y) = 0$ для $y \in \mathbb{R}^n\backslash Q)$. Поэтому из неравенства (3) вытекает, что при всех $h \in (0, h_0]$

$$\|f - f_h\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\varepsilon.$$

Что и требовалось установить.

Следствие. *Множество* $C_0^\infty(Q)$ *всюду плотно в* $L_2(Q)$.

Действительно, для функции $f \in L_2(Q)$ по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|f - f^\delta\| \leqslant \varepsilon$, где финитная в Q_δ функция $f^\delta(x) = f(x)$ для $x \in Q_\delta$ и $f^\delta(x) = 0$ для $x \in Q \setminus Q_\delta$. В силу теоремы 1 существует столь малое h, $h < \delta/2$, что финитная в Q усредненная функция $(f^\delta)_h(x)$ обладает свойством $\|(f^\delta)_h(x) - f^\delta\|_{L_2(Q)} \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $\|(f^\delta)_h(x) - f\|_{L_2(Q)} \leqslant 2\varepsilon$ для выбранных δ и h.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_2(Q)$ *и существует о.п.* $D^\alpha f \in L_2(Q)$. *Тогда для любой подобласти* $Q_1 \Subset Q$

$$\|D_x^\alpha f_h(x) - D_x^\alpha f(x)\|_{L_2(Q_1)} \to 0 \quad \textit{при } h \to 0.$$

Действительно, по теореме 1

$$\|D^\alpha f - (D^\alpha f)_h\|_{L_2(Q)} \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

С другой стороны, для $x \in Q_{2h}$

$$\begin{aligned}(D^\alpha f)_h(x) &= \int_Q D^\alpha f(y)\omega_h(|x-y|)\,dy \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_Q f(y) D_y^\alpha \omega_h(|x-y|)\,dy\end{aligned}$$

поскольку при таких x функция (переменного y) $\omega_h(|x-y|) \in C_0^\infty(Q)$. Поэтому для $x \in Q_{2h}$

$$(D^\alpha f)_h(x) = \int_Q f(y) D_x^\alpha \omega_h(|x-y|)\,dy = D_x^\alpha\big(f_h(x)\big).$$

Следовательно, для любой области $Q_1 \Subset Q$ имеет место доказываемое соотношение.

Из теоремы 2 немедленно вытекает

Следствие 1. *Если финитная в* Q *функция* $f \in L_2(Q)$ *и у нее существует о.п.* $D^\alpha f \in L_2(Q)$, *то*

$$\|D^\alpha f_h(x) - D^\alpha f(x)\|_{L_2(Q)} \to 0 \quad \textit{при } h \to 0.$$

Следствие 2. *Если у функции* $f(x) \in L_2(Q)$ *все первые обобщенные производные* $f_{x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, *то* $f = \mathrm{const}$.

Действительно, в любой подобласти $Q_1 \Subset Q$ при достаточно малых h имеем равенства $(f_h)_{x_i} = (f_{x_i})_h = 0$, $i = 1, \ldots, n$, из которых вытекает, что $f_h = \mathrm{const} = c(h)$ в Q_1 для таких h. Так как $\|f_h - f\|_{L_2(Q_1)} = \|c(h) - f\|_{L_2(Q_1)} \to 0$ при $h \to 0$, то

$$\|c(h_1) - c(h_2)\|_{L_2(Q_1)} = |c(h_1) - c(h_2)|\sqrt{\operatorname{mes} Q_1} \to 0$$

при h_1, $h_2 \to 0$. Следовательно, $c(h) = f_h$ при $h \to 0$ сходится равномерно в Q_1 (и тем более в $L_2(Q_1)$) к некоторой постоянной, т.е. $f = \mathrm{const}$ в Q_1, и тем самым, в Q.

С помощью теорем 1 и 2 нетрудно получить следующее необходимое и достаточное условие существования обобщенной производной.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $f \in L_2(Q)$ имела о.п. $D^\alpha f$ необходимо и достаточно, чтобы для любой подобласти $Q_1 \Subset Q$ существовали такие постоянные $C(Q_1) > 0$ и $h(Q_1) > 0$, что $\|D^\alpha f_h\|_{L_2(Q_1)} \leqslant C(Q_1)$ для всех $h \leqslant h(Q_1)$.*

Доказательства этой теоремы мы проводить не будем, поскольку она не будет использована в дальнейших построениях. С ее доказательством можно познакомиться в [2]. В [2] есть и еще один критерий существования о.п., связанный со свойствами соответствующего конечноразностного отношения.

§ 2. Пространства Соболева

Множество функций $f(x)$, принадлежащих $L_{p,\mathrm{loc}}(Q)$, $p \geqslant 1$, и имеющих все принадлежащие $L_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ о.п. до k-го порядка включительно образуют пространство Соболева $W^k_{p,\mathrm{loc}}(Q)$; в случае, когда функция f и все ее о.п. принадлежат $L_p(Q)$, это множество обозначается через $W^k_p(Q)$. При этом, как и в случае пространства $L_p(Q)$, функции из $W^k_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ и $W^k_p(Q)$, различающиеся на множестве меры нуль, отождествляются; при $p = 2$ (этим случаем мы, в основном, и будем интересоваться) наряду с приведенными обозначениями $W^k_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и $W^k_2(Q)$ пользуются также обозначениями $H^k_{\mathrm{loc}}(Q)$ и $H^k(Q)$.

Из определения обобщенной производной вытекает, что множество $W^k_p(Q)$, $p \geqslant 1$, $k \geqslant 0$ (при $k = 0$ $W^0_p(Q) = L_p(Q)$) является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{W_p^{(k)}(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|^p_{L_p(Q)} \right)^{1/p},$$

а множество $H^k(Q)$ – гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g)_{H^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L_2(Q)}$$

и порождаемой им нормой

$$\|f\|_{H^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|^2_{L_2(Q)} \right)^{1/2},$$

Отметим некоторые очевидные свойства пространств $H^k(Q)$.

1. Если область $Q_1 \subset Q$ и $f \in H^k(Q)$, то $f \in H^k(Q_1)$.
2. Если $f \in H^k(Q)$ и $a(x) \in C^k(\overline{Q}\,)$, то $af \in H^k(Q)$. При этом любая о.п. вычисляется по обычным правилам дифференцирования, например, $(af)_{x_1} = a_{x_1} f + a f_{x_1}$.

Свойства 1 и 2 немедленно вытекают из соответствующих свойств обобщенных производных. Следующее свойство есть теорема о возможности продолжения функции с сохранением гладкости в более широкую область.

Теорема 1. *Пусть граница области Q $\partial Q \in C^k$ при некотором целом $k \geqslant 1$. Тогда в любой области $Q_1 \Supset Q$ для любой* *функции* $f(x) \in H^k(Q)$ $(f(x) \in C^k(\overline{Q}\,))$ *существует финитная в* Q_1 *функция* $F(x) \in H^k(Q_1)$ $(F(x) \in C^k(\overline{Q}_1))$, *совпадающая с* f *на* Q. *При этом существует такая постоянная* $C > 0$, *не зависящая от* f, *что*

$$\|F\|_{H^k(Q_1)} \leqslant C\|f\|_{H^k(Q)} \qquad \bigl(\|F\|_{C^k(\overline{Q}_1)} \leqslant C\|f\|_{C^k(\overline{Q}\,)}\bigr).$$

Эта теорема для случая пространства $C^k(\overline{Q}\,)$ есть классическая теорема Уитни–Хестинса (см. [3]). Доказательство ее для случая пространства $H^k(Q)$, почти полностью совпадающее с доказательством в [3], проведено в [2].

Полезным является также утверждение о возможности продолжить функцию с границы.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x) \in C^1(\partial Q)$. *Тогда существует функция* $f(x) \in C^1(\overline{Q}\,) \subset H^1(Q)$ *такая, что* $f\big|_{\partial Q} = \varphi$. *При этом имеет место неравенство*

$$\|f\|_{C^1(\overline{Q}\,)} \leqslant C\|\varphi\|_{C^1(\partial Q)},$$

в котором постоянная $C > 0$ *не зависит от* φ.

С доказательством этой теоремы также можно познакомиться в [3] и [2].

Из следствия 1 теоремы 2 предыдущего параграфа вытекает

Теорема 3.

1. *Пусть* $f \in H^k(Q)$ *при некотором целом* $k \geqslant 1$, *а* $Q_1 \Subset Q$. *Тогда* $\|f_h - f\|_{H^k(Q_1)} \to 0$ *при* $h \to 0$.
2. *Для любой финитной функции* $f \in H^k(Q)$, $k \geqslant 1$, *имеет место соотношение* $\|f_h - f\|_{H^k(Q)} \to 0$ *при* $h \to 0$.

В качестве следствия из теоремы 3 и теоремы 1 отметим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\partial Q \in C^k$ *при некотором* $k \geqslant 1$. *Тогда множество* $C^\infty(\overline{Q}\,)$ *всюду плотно в* $H^k(Q)$.

Для доказательства возьмем произвольную (ограниченную) область $Q_1 \Supset Q$. По теореме 1 для любой функции $f(x) \in H^k(Q)$ существует финитная в Q_1 функция $F(x) \in H^k(Q_1)$, совпадающая с функцией $f(x)$ при $x \in Q$. Согласно п. 2 теоремы 3 $\|F_h - F\|_{H^k(Q_1)} \to 0$ при $h \to 0$ и тем более, $\|F_h - F\|_{H^k(Q)} =$

$\|F_h - f\|_{H^k(Q)} \to 0$ при $h \to 0$, что и требовалось установить, поскольку при любом $h > 0$ функция $F_h(x) \in C^\infty(\overline{Q})$.

Функции из пространства $W_p^k(Q)$ при любых p и k (напомним, что $H^k(Q) = W_2^k(Q)$) определены в Q с точностью до произвольного множества меры нуль. Это означает, что каждую функцию из $W_p^k(Q)$ можно произвольно изменить на любом множестве меры нуль, оставляя ее тем же элементом этого пространства. Т.е. каждой функции из $W_p^k(Q)$ можно произвольно приписать любые значения на каком угодно множестве меры нуль, в частности, на граничной поверхности или, тем более, на поверхностях меньшей размерности, например, в отдельных точках.

Поскольку в $W_p^k(Q)$ наряду с "не очень хорошими" функциями есть и гладкие в классическом смысле функции, "испорченные", быть может, на каком-то множестве меры нуль, то возникает естественный вопрос, как отобрать их из числа всех остальных. Оказывается, гарантией возможности такого отбора является наличие у функции достаточного числа обобщенных производных, интегрируемых в достаточно высокой степени. В частности, принадлежность функции пространству $W_p^k(Q)$ при достаточно больших p и k (пространству $H^k(Q)$ при достаточно большом k) позволяет, изменив эту функцию на надлежащем множестве меры нуль, сделать ее достаточно гладкой в классическом смысле слова: например, обладающей граничными значениями на поверхностях той или иной размерности, непрерывно переходящими друг в друга при непрерывном перемещении этих поверхностей и, в частности, непрерывной и даже непрерывно дифференцируемой достаточное число раз в каждой точке рассматриваемой области. Такого сорта результаты составляют основное содержание так называемых теорем вложения. Метод доказательства этих теорем, принятый в наших лекциях, следующий. Для произвольной функции $f(x)$ из $H^k(Q)$ ($W_p^k(Q)$) берется последовательность гладких функций, сходящаяся к $f(x)$ в норме этого пространства. Затем доказывается, что при соответствующих предположениях о k (k и p) эта последовательность сходится еще и, скажем, в норме пространства $C^l(\overline{Q})$ при некотором l. Это и означает, что взятая функция допускает такое ее изменение на некотором множестве меры нуль, в результате которого она становится функцией из $C^l(\overline{Q})$. Формулировке и доказательству некоторых из теорем вложения, используемых далее в нашем курсе, посвящены последующие параграфы этой главы.

§ 3. След функций из $H^k(Q)$

За счет перенесения начала координат область Q в силу ее ограниченности можно считать расположенной вместе с некоторой ее объемлющей областью Q_1, $Q \Subset Q_1$, в первом координатном углу: $Q \Subset Q_1 \subset \{0 < x_i,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Рассмотрим сначала случай, когда размерность пространства $n > 1$; более простой случай $n = 1$ будет рассмотрен в § 5. Пусть S некоторая $n-1$-мерная поверхность класса C^1, лежащая в $\overline{Q}$ (в частности, $S = \partial Q$), а $S_1, \ldots, S_N$, – ее покрытие простыми кусками, $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$. Пусть простой кусок S_1 однозначно проектируется на $n-1$-мерную область D_1 координатной плоскости $\{x_n = 0\}$, а

$$x_n = \varphi(x'), \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D_1, \quad \varphi(x') \in C^1(\overline{D}_1),$$

– уравнение этого куска.

Возьмем произвольную функцию $f(x) \in C^1(\overline{Q})$, продолжим ее согласно теореме 1 из § 2 в область Q_1, а затем продолжим полученную функцию нулем в $\mathbb{R}^n \backslash \overline{Q}_1$; эту функцию, принадлежащую $C^1(\mathbb{R}^n)$, по-прежнему будем обозначать через $f(x)$. По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$f\bigl(x', \varphi(x')\bigr) = \int_0^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\, d\xi_n,$$

откуда

$$\bigl|f\bigl(x', \varphi(x')\bigr)\bigr|^2 \leqslant \varphi(x') \int_0^{\varphi(x')} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n.$$

Проинтегрируем это неравенство по D_1, предварительно умножив его на $\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}$. В результате, снова используя теорему о продолжении функций (теорему 1 предыдущего параграфа), получим неравенство

$$\begin{aligned}\int_{S_1} |f(x)|^2\, dS \leqslant \int_{D_1} \varphi(x')\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2} \int_0^{\varphi(x')} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n\, dx' \\ \leqslant C\|f\|^2_{H^1(Q_1)} \leqslant C_1\|f\|^2_{H^1(Q)},\end{aligned}$$

в котором постоянная C_1 не зависит от f. Аналогичное неравенство имеет место и для любого другого простого куска S_k,

$k = 2, \ldots, N$, поверхности S и, тем самым, существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что для любой $f \in C^1(\overline{Q})$ имеет место неравенство

$$\int_S |f(x)|^2\, dS = \|f\|^2_{L_2(S)} \leqslant C_2 \|f\|^2_{H^1(Q)}. \tag{1}$$

Возьмем теперь функцию $f(x) \in H^1(Q)$. В силу плотности множества $C^1(\overline{Q})$ в $H^1(Q)$ (теорема 4 предыдущего параграфа) найдется последовательность $f_1(x), \ldots, f_k(x), \ldots$, функций из $C^1(\overline{Q})$, сходящаяся к $f(x)$ в норме $H^1(Q)$. Для функции $f_p - f_q$ неравенство (1) имеет вид

$$\|f_p - f_q\|^2_{L_2(S)} \leqslant C_2 \|f_p - f_q\|^2_{H^1(Q)}. \tag{2}$$

Так как $\|f_p - f_q\|_{H^1(Q)} \to 0$ при p, $q \to \infty$, то и $\|f_p - f_q\|_{L_2(S)} \to 0$ при p, $q \to \infty$. Это означает, что последовательность значений $f_p\big|_S$, $p = 1, \ldots$, функций $f_p(x)$ на поверхности S является фундаментальной в норме $L_2(S)$, и, следовательно, существует функция $f\big|_S \in L_2(S)$, к которой она сходится в норме $L_2(S)$. Переходя в (2) к пределу при $q \to \infty$, получим

$$\|f_p - f\big|_S\|^2_{L_2(S)} \leqslant C_2 \|f_p - f\|^2_{H^1(Q)}. \tag{3}$$

Покажем, что функция $f\big|_S$ не зависит от выбора последовательности $f_1(x), \ldots$, аппроксимирующей функцию $f(x)$. Действительно, пусть $f_1'(x), \ldots$ другая последовательность функций из $C^1(\overline{Q})$, $\|f_p' - f\|_{H^1(Q)} \to 0$, $p \to \infty$, а $f'\big|_S$ – предел в норме $L_2(S)$ последовательности $f_p'\big|_S$, $p = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\big\|f\big|_S - f'\big|_S\big\|_{L_2(S)} \\
&\qquad \leqslant \big\|f\big|_S - f_p\big\|_{L_2(S)} + \|f_p - f_p'\|_{L_2(S)} + \big\|f_p' - f'\big|_S\big\|_{L_2(S)} \\
&\qquad \leqslant C_2\big(\|f - f_p\|_{H^1(Q)} + \|f_p - f_p'\|_{H^1(Q)} + \|f_p' - f\|_{H^1(Q)}\big) \to 0
\end{aligned}$$

при $p \to \infty$, т.е. $f\big|_S = f'\big|_S$.

Функцию $f\big|_S$ (как элемент $L_2(S)$) будем называть *следом на S функции $f \in H^1(Q)$*; $L_2(S)$-норму следа $f\big|_S$ будем обозначать $\|f\|_{L_2(S)}$.

В силу плотности множества $C^1(\overline{Q})$ в $H^1(Q)$ неравенство (1), установленное для любой функции f из $C^1(\overline{Q})$, справедливо и для любой функции $f \in H^1(Q)$, причем в левой части этого неравенства стоит квадрат $L_2(S)$-нормы следа функции f. Таким образом, установлена

Теорема 1. *Каждая функция* $f(x) \in H^1(Q)$ *на любой поверхности* S *(класса* C^1*) имеет след* $f\big|_S \in L_2(S)$*. При этом справедливо неравенство*

$$\int_S |f(x)|^2\,dS = \|f\|^2_{L_2(S)} \leqslant C_2\|f\|^2_{H^1(Q)}, \tag{1}$$

в котором постоянная $C_2 > 0$ *не зависит от* f.

На доказанное утверждение можно смотреть и следующим образом. Каждой функции $f(x) \in H^1(Q)$ поставлена в соответствие функция $f\big|_{\partial Q} \in L_2(\partial Q)$ – след функции f на граничной поверхности (аналогично, ее след $f\big|_S$ на некоторой принадлежащей классу C^1 поверхности $S \subset \overline{Q}$). Это означает, что на $H^1(Q)$ задан оператор $\mathbb{J}$, переводящий $H^1(Q)$ в $L_2(\partial Q)$, оператор вложения $H^1(Q)$ в $L_2(\partial Q)$: для каждой $f \in H^1(Q)$ $\mathbb{J}f = f\big|_{\partial Q}$. Этот оператор, очевидно, линейный и в силу теоремы 1 ограниченный:

$$\|\mathbb{J}f\|_{L_2(\partial Q)} = \big\|f\big|_{\partial Q}\big\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant C_2\|f\|_{H^1(Q)}$$

причем $\|\mathbb{J}\| \leqslant C_2$. Ниже, в § 8, будет доказано, что оператор $\mathbb{J}$ вполне непрерывный.

Вернемся к началу нашего рассмотрения в этом параграфе, при этом будем считать, что поверхность S_k из покрытия поверхности S простыми кусками имеет вид $\{|x - x_k| < r\} \cap S$, где x_k – некоторая точка поверхности S, а r – достаточно малое число (т.е. считаем, что поверхность S покрыта достаточно мелкими простыми кусками).

Пусть S_1 – некоторый простой кусок поверхности S, временно нам его удобно переобозначить через Γ_0, $\Gamma_0 = S_1 = \{x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n),\ x_n = \varphi(x'),\ x' \in D_1\}$, $\varphi(x') \in C^1(\overline{D}_1)$, и пусть $\delta_0 > 0$ столь мало, что область $\Omega^1_{\delta_0} = \{\varphi(x') - \delta_0 < x_n < \varphi(x'),\ x' \in D_1\} \subset Q$ (аналогично рассматривается случай, когда область $\Omega^1_{\delta_0} = \{\varphi(x') < x_n < \varphi(x') + \delta_0,\ x' \in D_1\} \subset Q$). Для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ "параллельная" Γ_0 поверхность $\Gamma_\delta = \{x_n = \varphi(x') - \delta,\ x' \in D_1\}$ лежит в Q и пусть $x^\delta = (x', \varphi(x') - \delta)$ – точка этой поверхности, а $x^0 = (x', \varphi(x'))$ – лежащая над ней точка поверхности Γ_0.

Для любой функции $f(x) \in C^1(\overline{Q})$ имеем равенство

$$f(x^0) - f(x^\delta) = \int_{\varphi(x')-\delta}^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\,d\xi_n, \tag{4}$$

из которого, как и прежде, получаем неравенство

$$\|f(x^0) - f(x^\delta)\|^2_{L_2(\Gamma_0)} \leqslant C\delta \|f\|^2_{H^1(\Omega^1_\delta)}, \tag{5}$$

и неравенство

$$\|f(x^0) - f(x^\delta)\|^2_{L_2(\Gamma_\delta)} \leqslant C\delta \|f\|^2_{H^1(\Omega^1_\delta)}, \tag{5$'$}$$

в которых постоянная C не зависит ни от f, ни от δ. Следовательно, неравенства (5) и (5′) имеют место и для любой функции $f \in H^1(Q)$ (в левых частях этих неравенств стоят следы функции f на поверхностях Γ_0 и Γ_δ). Эти неравенства выражают определенную *непрерывность следов функции* $f \in H^1(Q)$ *на семействе поверхностей* Γ_δ *относительно сдвигов этих поверхностей.*

Из равенства (4) для $f(x) \in C^1(\overline{Q})$ вытекает также и неравенство

$$\|f\|^2_{L_2(\Gamma_\delta)} \leqslant 2\|f\|^2_{L_2(\Gamma_0)} + 2C\delta \|f\|^2_{H^1(\Omega^1_\delta)},$$

интегрируя которое по δ в пределах от 0 до δ, получим неравенство

$$\|f\|^2_{L_2(\Omega^1_\delta)} \leqslant 2\delta \|f\|^2_{L_2(\Gamma_0)} + 2C\delta^2 \|f\|^2_{H^1(\Omega^1_\delta)}, \tag{6}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей ни от f, ни от δ.

Пусть теперь поверхность S есть граница ∂Q области Q, а $\{S_1, \ldots, S_N\}$ – множество простых кусков, покрывающее границу ∂Q. Для простого куска S_1 мы получили неравенство (6); аналогичные неравенства есть и для любого другого куска S_k, $k = 2, \ldots, N$:

$$\|f\|^2_{L_2(\Omega^k_\delta)} \leqslant 2\delta \|f\|^2_{L_2(S_k)} + C\delta^2 \|f\|^2_{H^1(\Omega^k_\delta)},$$

где Ω^k_δ, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, – подобласть области Q, построенная по поверхности S_k, $k = 2, \ldots, N$, аналогично тому, как область Ω^1_δ, $0 < \delta \leqslant \delta_0$ построена по поверхности $S_1 = \Gamma_0$.

Суммируя эти неравенства по k, $k = 1, \ldots, N$, и пользуясь тем, что при достаточно малом $\delta_0 > 0$ для всех δ, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, справедливы включения $Q \setminus Q_{\delta/2} \subset \bigcup_{k=1}^N \Omega^k_\delta \subset Q \setminus Q_{2\delta}$, получим, что для любой $f \in C^1(\overline{Q})$ имеет место неравенство

$$\|f\|^2_{L_2(Q \setminus Q_{\delta/2})} \leqslant C\bigl(\delta \|f\|^2_{L_2(\partial Q)} + \delta^2 \|f\|_{H^1(Q \setminus Q_{2\delta})}\bigr), \tag{7}$$

в котором постоянная C не зависит ни от f, ни от δ. Следовательно, последнее неравенство справедливо и для любой функции $f(x) \in H^1(Q)$.

Поскольку в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для любой функции $f(x) \in H^1(Q)$ $\|f\|_{H^1(Q\setminus Q_{2\delta})} \to 0$ при $\delta \to 0$, то из неравенства (7) вытекает следующее утверждение, которым мы воспользуемся в следующем параграфе.

Лемма. *Для функции $f(x) \in H^1(Q)$, след которой на границе равен нулю, $f\big|_{\partial Q} = 0$, справедливо соотношение*

$$\|f\|_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} = o(\delta) \quad \text{\textit{при} } \delta \to 0.$$

Если функция $f(x) \in H^k(Q)$, $k > 1$, то любая ее обобщенная производная $D^\alpha f$, $|\alpha| < k$, принадлежит $H^1(Q)$ и, следовательно, имеет след на поверхности S, о которой идет речь в теореме 1, при этом имеет место неравенство

$$\|D^\alpha f\|_{L_2(S)} \leqslant C\|f\|_{H^{|\alpha|+1}(Q)} \leqslant C\|f\|_{H^k(Q)}.$$

Отметим еще *формулу интегрирования по частям*: для любых f и g из $H^1(Q)$ справедливы равенства

$$\int_Q f_{x_i}\overline{g}\,dx = \int_{\partial Q} f\overline{g}\nu_i\,dS - \int_Q f\overline{g}_{x_i}\,dx, \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{8}$$

в которых f и g, стоящие под знаком интеграла по ∂Q являются следами на ∂Q соответствующих функций, $\nu_i = \nu_i(x)$ – i-ая компонента вектора внешней по отношению к области Q единичной нормали $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ к поверхности ∂Q. Для получения этой формулы аппроксимируем f и g в норме $H^1(Q)$ последовательностями $f_1(x),\ldots,f_k(x),\ldots,$ и $g_1(x),\ldots,g_s(x),\ldots,$ функций из $C^1(\overline{Q}\,)$ и перейдем к пределу при $s \to \infty$ и $k \to \infty$ в равенствах

$$\int_Q f_{kx_i}\overline{g}_s\,dx = \int_{\partial Q} f_k\overline{g}_s\nu_i\,dS - \int_Q f_k\overline{g}_{sx_i}\,dx, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Из формул (8) вытекает формула Остроградского: *для любого вектора $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$, компоненты которого $f_i(x)$, $i = 1,\ldots,n$, принадлежат $H^1(Q)$ имеет место равенство*

$$\int_Q \operatorname{div} f(x)\,dx = \int_{\partial Q} \big(f(x),\nu(x)\big)\,dS.$$

§ 4. Пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$

Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ множество функций из $H^1(Q)$, след которых на границе ∂Q равен нулю. $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ – очевидно, линейное подмножество пространства $H^1(Q)$ и, тем самым, является предгильбертовым пространством в скалярном произведении пространства $H^1(Q)$. Имеет место

Теорема 1. $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ *– подпространство пространства* $H^1(Q)$.

Для доказательства теоремы достаточно установить замкнутость множества $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$.

Пусть $f_1(x), \dots, f_k(x), \dots$, где $f_k(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ для всех $k \geqslant 1$, – последовательность функций, сходящаяся в норме $H^1(Q)$: $\|f_k - f_s\|_{H^1(Q)} \to 0$ при k, $s \to \infty$. Предельная функция $f(x)$ принадлежит $H^1(Q)$. Для того чтобы доказать, что ее след на ∂Q равен нулю, воспользуемся теоремой 1 предыдущего параграфа: для любого $k \geqslant 1$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{L_2(\partial Q)} = \|f - f_k\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant C_2 \|f - f_k\|_{H^1(Q)},$$

в котором постоянная C_2 не зависит от k. Но правая часть этого неравенства может быть сделана при достаточно больших k сколь угодно малой. Следовательно, $\|f\|_{L_2(\partial Q)} = 0$.

Поскольку функция $f(x) = 1 \in H^1(Q)$, но не содержится в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, то $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ – истиное подпространство пространства $H^1(Q)$, т.е. подпространство, не совпадающее с самим $H^1(Q)$.

Важное значение имеет следующее утверждение.

Теорема 2. *Множество* $C_0^\infty(Q)$ *всюду плотно в* $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$.

Легко проверить, что при любом $\delta > 0$ функция

$$\zeta_\delta(x) = \int_{Q_{\frac{3\delta}{4}}} \omega_{\delta/4}(|x-y|)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

обладает следующими свойствами:

а) $0 \leqslant \zeta_\delta(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$,
б) $\zeta_\delta(x) = 1$ для $x \in Q_\delta$,
в) $\zeta_\delta(x) = 0$ вне $Q_{\delta/2}$,
г) $\left|\dfrac{\partial \zeta_\delta(x)}{\partial x_i}\right| \leqslant \dfrac{C}{\delta}$ $x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, где C – некоторая положительная не зависящая от δ постоянная.

Пусть функция $f(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$. Тогда функция $f(x)\,\zeta_\delta(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ и равна нулю вне $Q_{\delta/2}$. Кроме того, в силу леммы предыдущего параграфа

$$
\begin{aligned}
\|f - f\zeta_\delta\|^2_{H^1(Q)} &= \int_Q |f(1-\zeta_\delta)|^2\,dx \\
&\qquad + \sum_{i=1}^n \int_Q |f_{x_i}(1-\zeta_\delta) - f\zeta_{\delta x_i}|^2\,dx \\
&\leqslant \int_{Q\setminus Q_\delta} |f|^2\,dx + 2\sum_{i=1}^n \int_{Q\setminus Q_\delta} |f_{x_i}|^2\,dx \\
&\qquad + 2\sum_{i=1}^n \int_{Q\setminus Q_\delta} |f|^2 |\zeta_{\delta x_i}|^2\,dx \\
&\leqslant \int_{Q\setminus Q_\delta} |f|^2\,dx + 2\sum_{i=1}^n \int_{Q\setminus Q_\delta} |f_{x_i}|^2\,dx \\
&\qquad + \frac{nC^2}{\delta^2} \int_{Q\setminus Q_\delta} |f|^2\,dx = o(1) \quad \text{при } \delta \to 0.
\end{aligned}
$$

Т.е. по любому $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что принадлежащая $H^1(Q)$, равная нулю вне $Q_{\delta/2}$ функция $f\zeta_\delta$ отличается от функции f по норме $H^1(Q)$ меньше, чем на ε: $\|f - f\zeta_\delta\|_{H^1(Q)} \leqslant \varepsilon$. По теореме 3 из § 2 $\|(f\zeta_\delta)_h - f\zeta_\delta\|_{H^1(Q)} \to 0$ при $h \to 0$, причем при $h < \delta/2$ функция $(f\zeta_\delta)_h$ – финитная в Q, т.е. можно найти столь малое $h > 0$, что $\|(f\zeta_\delta)_h - f\zeta_\delta\|_{H^1(Q)} < \varepsilon$, откуда $\|f - (f\zeta_\delta)_h\|_{H^1(Q)} \leqslant 2\varepsilon$. Теорема доказана.

§ 5. Вложение $H^1(a,b)$ в $C([a,b])$

В § 3 рассматривался вопрос о следах функций из $H^1(Q)$ для областей $Q \subset \mathbb{R}^n$ при $n > 1$. Обратимся теперь к случаю $n = 1$. Пусть область $Q = (a,b)$, где $-\infty < a < b < \infty$. Легко проверить, что для любой функции $f(x) \in C_0^1([a,b])$ имеет место равенство

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_a^b f'(y)\,\mathrm{sgn}(x-y)\,dy, \qquad x \in [a,b],$$

из которого вытекает справедливое для всех $x \in [a,b]$ неравенство

$$|f(x)| \leqslant \frac{\sqrt{b-a}}{2}\,\|f'\|_{L_2(a,b)},$$

т.е. неравенство

$$\|f\|_{C([a,b])} \leqslant \frac{\sqrt{b-a}}{2}\,\|f\|_{H^1(a,b)}.$$

С помощью этого неравенства получим аналогичное неравенство

$$\|f\|_{C([a,b])} \leqslant C_0\|f\|_{H^1(a,b)}, \tag{1}$$

с не зависящей от f постоянной C_0 и справедливое для любой функции $f(x) \in C^1([a,b])$: для этого продолжим согласно теореме 1 из § 2 функцию $f(x) \in C^1([a,b])$ на больший отрезок $[a',b']$, $-\infty < a' < a < b < b' < \infty$, функцией $F(x) \in C_0^1[a',b']$ и воспользуемся неравенством $\|F\|_{H^1(a',b')} \leqslant C_1\|f\|_{H^1(a,b)}$, в котором постоянная C_1 не зависит от f.

Поскольку множество $C^1([a,b])$ по теореме 4 из § 2 всюду плотно в $H^1(a,b)$, то для произвольной функции $f(x) \in H^1(a,b)$ найдется последовательность функций $f_1(x),\dots,f_k(x),\dots$, где $f_k(x) \in C^1([a,b])$ для всех $k \geqslant 1$, сходящаяся к функции $f(x)$ в норме пространства $H^1(a,b)$. Из неравенства (1) для функции $f_k(x) - f_s(x)$ получаем, что взятая последовательность фундаментальна в норме пространства $C([a,b])$, и следовательно, она равномерно сходится на $[a,b]$ к функции из $C([a,b])$, п.в. совпадающей с функцией $f(x)$. Это означает, что функцию $f(x)$ можно изменить на множестве меры нуль так, что в результате она станет непрерывной на $[a,b]$, и, тем самым, любая функция $f(x)$ из $H^1(a,b)$ принадлежит $C([a,b])$ и для нее имеет место неравенство (1), в котором постоянная C_0 не зависит от f. Для получения этого неравенства воспользуемся неравенством (1) для функции $f_n(x)$ из взятой выше последовательности и перейдем в нем к пределу при $n \to \infty$.

Таким образом, имеет место *вложение* пространства $H^1(a,b)$ в пространство $C([a,b])$: $H^1(a,b) \subset C([a,b])$, при этом оператор вложения $\mathbb{J}$, действующий из $H^1(a,b)$ в $C([a,b])$ по формуле $\mathbb{J}f = f$, очевидно, линейный, является в силу (1) ограниченным:

$$\|f\|_{C([a,b])} = \|\mathbb{J}f\|_{C([a,b])} \leqslant C_0\|f\|_{H^1(a,b)},$$

и $\|\mathbb{J}\| \leqslant C_0$.

Докажем, что этот оператор вполне непрерывен, т.е. что он переводит любое ограниченное в $H^1(a,b)$ множество M во множество, компактное в $C([a,b])$. Действительно, для любой $f(x) \in C^1([a,b])$ и любых двух точек x_1 и x_2 из $[a,b]$ имеем

$$f(x_1) - f(x_2) = \int_{x_2}^{x_1} f'(y)\,dy,$$

откуда

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \sqrt{|x_1 - x_2|}\,\|f'\|_{L_2(a,b)}.$$

Повторяя далее предыдущие рассуждения, получим, что для любой функции $f(x) \in H^1(a,b)$ (она, как было выше установлено, непрерывна на $[a,b]$) при любых x_1, $x_2 \in [a,b]$ имеет место неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C_1\sqrt{|x_1 - x_2|}\,\|f\|_{H^1(a,b)}$$

с постоянной, не зависящей от f. Это означает, что каждая функция из $H^1(a,b)$ не только непрерывна, но и удовлетворяет условию Гёльдера порядка $1/2$.

Поскольку множество M ограничено в $H^1(a,b)$, т.е. при некоторой постоянной $C_2 > 0$ для всех $f \in M$

$$\|f\|_{H^1(a,b)} \leqslant C_2,$$

то для всех $f \in M$ и всех x_1, $x_2 \in [a,b]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C_1C_2\sqrt{|x_1 - x_2|}\,.$$

Из этого неравенства вытекает, что множество функций M равностепенно непрерывно: при произвольном $\varepsilon > 0$ для всех $f \in M$ и всех x_1, $x_2 \in [a,b]$ таких, что $|x_1 - x_2| \leqslant \varepsilon^2/(C_1C_2)^2$ имеем неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon$. Поскольку равномерная ограниченность в $C([a,b])$ этого множества вытекает из неравенства (1), то по теореме Арцела множество M компактно в $C([a,b])$. Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пространство $H^1(a,b)$ вкладывается в пространство $C([a,b])$ и соответствующий оператор вложения вполне непрерывен.*

§ 6. Вложение $H^1(Q)$ в $L_2(Q)$

Из определения пространства $H^1(Q)$ вытекает, что каждая функция, принадлежащая $H^1(Q)$, принадлежит и $L_2(Q)$. Это означает, что пространство $H^1(Q)$ *вложено* в пространство $L_2(Q)$, и соответствующий *оператор вложения* $\mathbb{J}$, оператор из $H^1(Q)$ в $L_2(Q)$, ставящий каждой функции $f(x) \in H^1(Q)$ в соответствие ее же, как функцию из $L_2(Q)$, очевидно, линейный и ограниченный; его норма $\|\mathbb{J}\| \leqslant 1$ (при введенной нами нормировке пространств $H^1(Q)$ и $L_2(Q)$). Имеет место также следующая

Теорема 1. *Оператор вложения $\mathbb{J}$ пространства $H^1(Q)$ в $L_2(Q)$ вполне непрерывен.*

Другими словами, любое ограниченное множество функций в пространстве $H^1(Q)$ является компактным множеством в $L_2(Q)$.

Доказательство. Пусть $M = \{f(x)\}$ ограниченное в $H^1(Q)$ множество функций, т.е. множество, для которого существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что

$$\|f\|_{H^1(Q)} \leqslant C_0 \quad \text{для всех } f \in M. \tag{1}$$

Предположим вначале, что $M \subset \mathring{H}^1(Q)$. Продолжим все функции из M нулем вне Q и пусть $f_h(x)$ – усреднененная функция для $f(x) \in M$. Тогда

$$\begin{aligned}\|f_h - f\|^2_{L_2(Q)} &= \int_Q \left| \int_{|x-y|<h} \big(f(y) - f(x)\big)\omega_h(|x-y|)\,dy \right|^2 dx \\ &\leqslant \frac{C_1}{h^n} \int_{|z|<h} dz \int_Q |f(x+z) - f(x)|^2\,dx \end{aligned} \tag{2}$$

Для функции $f(x) \in C_0^1(\overline{Q}\,)$, также продолженной нулем вне Q, при любом векторе $z \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$f(x+z) - f(x) = \int_0^1 \frac{df(x+tz)}{dt}\,dt = \int_0^1 \big(\nabla f(x+tz), z\big)\,dt.$$

Значит,

$$|f(x+z) - f(x)|^2 \leqslant |z|^2 \int_0^1 |\nabla f(x+tz)|^2\,dt$$

и, тем самым,

$$\int_Q |f(x+z)-f(x)|^2\,dx \leqslant |z|^2\|f\|^2_{H^1(Q)}. \tag{3}$$

Неравенство (3) справедливо и для любой функции $f \in \mathring{H}^1(Q)$, поскольку множество $C^1_0(\overline{Q})$ функций $f(x)$, для которых выполнено неравенство (2), всюду плотно в $\mathring{H}^1(Q)$. Для $f \in M$ из (2) и (3) в силу (1) имеем

$$\|f_h - f\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{C_1}{h^n}\,\|f\|^2_{H^1(Q)}h^2\int_{|z|<h} dz \leqslant C_2^2h^2, \tag{4}$$

где постоянная C_2 ни от h, ни от $f \in M \subset \mathring{H}^1(Q)$ не зависит.

Множество функций

$$M_h = \left\{ f_h(x) = \int_Q f(y)\omega_h(|x-y|)\,dy,\;\; x\in\overline{Q};\;\; f\in M \right\}$$

при любом фиксированном $h > 0$ в силу теоремы Арцела компактно в $C(\overline{Q})$, поскольку для всех $f \in M$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |f_h(x)| &= \left|\int_Q f(y)\omega_h(|x-y|)\,dy\right| \leqslant \frac{C_0}{h^n}\int_Q |f(y)|\,dy \\ &\leqslant \frac{C_3}{h^n}\,\|f\|_{L_2(Q)} \leqslant \frac{C_4}{h^n}\,\|f\|_{H^1(Q)} \leqslant \frac{C_5}{h^n}\,, \\ |f_{hx_i}(x)| &\leqslant \frac{C_6}{h^{n+1}}\int_Q |f(y)|\,dy \leqslant \frac{C_7}{h^{n+1}}\,, \qquad i=1,\ldots,n, \end{aligned}$$

в которых постоянные C_i, $i \leqslant 7$, не зависят от $f_h \in M_h$. Тем более, каждое множество M_h, $h > 0$, компактно в $L_2(Q)$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу $L_2(Q)$-компактности множества $M_\varepsilon = M_h\big|_{h=\varepsilon}$ по теореме Хаусдорфа в M_ε существует конечная ε-сеть, т.е. в M_ε существует конечное число $N = N(\varepsilon)$ таких функций $f^1_\varepsilon(x), \ldots, f^N_\varepsilon(x)$, что для любой функции $f_\varepsilon(x)$ из M_ε найдется функция $f^k_\varepsilon(x)$, удовлетворяющая неравенству $\|f_\varepsilon(x) - f^k_\varepsilon(x)\|_{L_2(Q)} \leqslant C_2\varepsilon$. Покажем, что множество $f^1(x), \ldots, f^N(x)$ функций из M, обладающих свойством: $\|f^k(x) - f^k_\varepsilon(x)\|_{L_2(Q)} \leqslant C_2\varepsilon$ для всех $k = 1, \ldots, N$, ($f^k(x)$ – функция из M, для которой $f^k_\varepsilon(x)$ есть ε-усредненная функция) является $(2C_2+1)\varepsilon$-сетью для множества M, и, тем самым, по теореме

Хаусдорфа множество M $L_2(Q)$-компактно. Действительно, для любой $f \in M$ имеем $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_{L_2(Q)} \leqslant C_2\varepsilon$, а для $f_\varepsilon(x)$ найдется функция $f_\varepsilon^k(x)$ такая, что $\|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^k(x)\|_{L_2(Q)} \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $\|f - f^k\|_{L_2(Q)} \leqslant \|f - f_\varepsilon\|_{L_2(Q)} + \|f_\varepsilon - f_\varepsilon^k\|_{L_2(Q)} + \|f_\varepsilon^k - f^k\|_{L_2(Q)} \leqslant (2C_2 + 1)\varepsilon$.

Пусть теперь $M \in H^1(Q)$. Обозначим через M' множество функций $F(x)$ из $\mathring{H}^1(Q')$, полученных в результате продолжения функций $f(x)$ из M в некоторую область $Q' \Supset Q$. Поскольку $\|F\|_{H^1(Q')} \leqslant \mathrm{const}\|f\|_{H^1(Q)}$ с постоянной, не зависящей от f, то множество M' ограничено в $\mathring{H}^1(Q')$. По только что доказанному, оно компактно в $L_2(Q')$. Значит множество M компактно в $L_2(Q)$. Теорема доказана.

§ 7. Компактность вложения $H^1(Q)$ в $L_2(\partial Q)$

В § 3 доказано, что любая функция $f(x) \in H^1(Q)$ имеет на граничной поверхности ∂Q (так же как и на любой лежащей в $\overline{Q}$ $(n-1)$-мерной поверхности S класса C^1) след $f\big|_{\partial Q} \in L_2(\partial Q)$, и что, тем самым, на $H^1(Q)$ определен линейный оператор $\mathbb{J}$, оператор вложения $H^1(Q)$ в $L_2(\partial Q)$, ставящий в соответствие функции f ее след на ∂Q: $\mathbb{J}f = f\big|_{\partial Q}$. Там же доказано, что оператор $\mathbb{J}$ ограничен. Докажем его компактность. Имеет место

Теорема 1. *Оператор вложения $\mathbb{J}$ пространства $H^1(Q)$ в пространство $L_2(\partial Q)$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $M = \{f(x)\}$ ограниченное в $H^1(Q)$ множество функций, т.е. пусть существует постоянная $C > 0$ такая, что неравенство

$$\|f\|_{H^1(Q)} \leqslant C \tag{1}$$

имеет место для всех $f \in M$. Нам нужно доказать, что множество следов этих функций на ∂Q компактно в $L_2(\partial Q)$.

Пусть S_1 – простой кусок поверхности ∂Q, и пусть

$$x_n = \varphi(x'), \qquad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D, \quad \varphi(x') \in C^1(\overline{D}\,),$$

– уравнение этого куска.

Существует такое $\delta_0 > 0$, что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ область $\Omega_\delta = \{\varphi(x') - \delta < x_n < \varphi(x'),\ x' \in D\} \subset Q$ (или область $\Omega'_\delta = \{\varphi(x') + \delta > x_n > \varphi(x'),\ x' \in D\} \subset Q$). Для любой функции $f(x) \in C^1(\overline{Q}\,)$ при любом $t \in (0, \delta]$, $\delta \in (0, \delta_0]$ имеет место равенство

$$f\big(x', \varphi(x')\big) - f\big(x', \varphi(x') - t\big) = \int_{\varphi(x')-t}^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\, d\xi_n,$$

из которого вытекает неравенство

$$\begin{aligned} &\big|f\big(x', \varphi(x')\big)\big|^2 \\ &\qquad \leqslant 2\left(\big|f\big(x', \varphi(x') - t\big)\big|^2 + \left|\int_{\varphi(x')-t}^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\, d\xi_n\right|^2\right) \end{aligned}$$

$$\leqslant 2\left(\left|f\big(x',\varphi(x')-t\big)\right|^2 + t\int_{\varphi(x')-t}^{\varphi(x')}\left|\frac{\partial f(x',\xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n\right)$$
$$\leqslant 2\left(\left|f\big(x',\varphi(x')-t\big)\right|^2 + \delta\int_{\varphi(x')-\delta}^{\varphi(x')}\left|\frac{\partial f(x',\xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n\right),$$

проинтегрировав которое по $t \in (0,\delta)$, получим

$$\delta\left|f\big(x',\varphi(x')\big)\right|^2 \leqslant 2\int_0^{\delta}\left|f\big(x',\varphi(x')-t\big)\right|^2 dt + 2\delta^2\int_{\varphi(x')-\delta}^{\varphi(x')}\left|\frac{\partial f(x',\xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n.$$

Умножим последнее неравенство на $\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2+\dots+\varphi_{x_{n-1}}^2}$ и проинтегрируем его по D:

$$\delta\int_{S_1}|f(x)|^2\,dS \leqslant 2\int_{\Omega_\delta}|f(x)|^2\,dx + 2\delta^2\|f\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} \leqslant 2\|f\|^2_{L_2(Q)} + 2\delta^2\|f\|^2_{H^1(Q)}. \tag{2}$$

Поскольку $\partial Q \subset \bigcup_{i=1}^N S_i$, где S_i, $i=1,\dots,N$, – совокупность простых кусков, покрывающих поверхность ∂Q, для каждого из которых имеет место неравенство, аналогичное неравенству (2), то для любой функции $f(x) \in C^1(\,\overline{Q}\,)$ получаем справедливое для всех $\delta \in (0,\delta_0]$ неравенство

$$\|f\|^2_{L_2(\partial Q)} \leqslant \frac{C_1}{\delta}\,\|f\|^2_{L_2(Q)} + C_1\delta\|f\|^2_{H^1(Q)}, \tag{3}$$

в котором постоянная C_1 не зависит от f и δ. В силу плотности в $H^1(Q)$ множества $C^1(\,\overline{Q}\,)$ это неравенство имеет место и для любой функции $f(x) \in H^1(Q)$.

Из теоремы 1 §6 следует, что множество M компактно в $L_2(Q)$. Поэтому из произвольной последовательности $f_1(x),\dots,$ $f_n(x),\dots,$ функций из M можно выбрать подпоследовательность (будем считать, что это сама взятая последовательность), которая фундаментальна в $L_2(Q)$. Это означает, что по любому ε, $0<\varepsilon\leqslant\delta_0$, найдется такое N_0, что $\|f_k-f_s\|_{L_2(Q)}\leqslant\varepsilon$ для всех k, $s \geqslant N_0$. Но тогда в силу (3) и (1) при любом δ, $0 < \delta < \delta_0$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|f_k - f_s\|^2_{L_2(\partial Q)} &\leqslant \frac{C_1}{\delta}\,\varepsilon^2 + C_1\delta\|f_k - f_s\|^2_{H^1(Q)} \\ &\leqslant \frac{C_1}{\delta}\,\varepsilon^2 + C_1\delta\bigl(\|f_k\|_{H^1(Q)} + \|f_s\|_{H^1(Q)}\bigr)^2 \\ &\leqslant \frac{C_1}{\delta}\,\varepsilon^2 + 4C^2C_1\delta, \end{aligned}$$

из которого при $\delta = \varepsilon$ получим, что

$$\|f_k - f_s\|^2_{L_2(\partial Q)} \leqslant C_2\varepsilon$$

для всех k, $s \geqslant N_0$. Что и требовалось доказать.

§ 8. Вложение $H^k(Q)$ в $C^l(\overline{Q})$

В этом параграфе будет изучаться взаимоотношение пространств $H^k(Q)$ и $C^l(\overline{Q})$. Будет показано, что если функция принадлежит пространству $H^k(Q)$ при достаточно большом k, то она принадлежит и пространству $C^l(\overline{Q})$, т.е. ее можно так изменить на множестве меры нуль, что она будет непрерывна вместе со всеми производными до порядка l в $\overline{Q}$.

Пусть функция $f(x) \in C_0^2(\overline{Q})$. Тогда для любой точки $x \in Q$ имеет место равенство

$$f(x) = \int_Q U(x-y)\Delta f(y)\,dy, \qquad x \in Q, \tag{1}$$

где $U(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$U(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n |x|^{n-2}} & \text{при } n > 2, \\ \dfrac{\ln|x|}{2\pi} & \text{при } n = 2, \end{cases}$$

а $\sigma_n = 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)$ – площадь поверхности $(n-1)$-мерной единичной сферы.

Это равенство вытекает из хорошо известной (см., например, [2], [4] или [5]) формулы Грина: для $f(x) \in C^2(\overline{Q})$ в любой точке $x \in Q$ имеет место равенство

$$f(x) = \int_Q U(x-y)\Delta f(y)\,dy \\ + \int_{\partial Q} \left(f(y)\frac{\partial U(x-y)}{\partial \nu_y} - \frac{\partial f(y)}{\partial \nu} U(x-y) \right) dS_y,$$

в котором ν – единичный вектор внешней по отношению к области Q нормали к поверхности ∂Q (напомним, что $\partial Q \in C^1$).

Если функция f более гладкая, $f \in C_0^k(\overline{Q})$, то наряду с (1) для нее имеют место и представления через производные k-го порядка. Для получения этих представлений нам потребуется следующее простое утверждение.

Лемма. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда при любом (вещественном) μ функция*

$$u_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\mu+2}}{(\mu+2)(\mu+n)} & \text{при } \mu \neq -2,\ \mu \neq -n, \\ \dfrac{\ln|x|}{n-2} & \text{при } \mu = -2, \\ -\dfrac{\ln|x|}{|x|^{n-2}(n-2)} & \text{при } \mu = -n \end{cases}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, удовлетворяет уравнению $\Delta u_\mu = |x|^\mu$.

В справедливости леммы легко убедиться непосредственной проверкой.

Пусть функция $f \in C_0^2(\overline{Q})$. В силу формулы (1) для $x \in Q$ при $n = 2$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_Q \Delta f(y) \ln|x-y|\, dy, \tag{2}$$

при $n = 3$

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_Q \frac{\Delta f(y)}{|x-y|}\, dy, \tag{3}$$

при $n > 3$

$$f(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_Q \frac{\Delta f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy, \tag{4}$$

Пусть $n = 4$, а функция $f \in C_0^3(\overline{Q})$. С помощью равенства $\frac{1}{|x-y|^2} = \frac{1}{2}\Delta_y \ln|x-y|$ (см. лемму) интегрированием по частям получим из (4)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4\sigma_4} \int_Q \Delta f(y) \cdot \Delta_y \ln|x-y|\, dy \\ &= -\frac{1}{4\sigma_4} \int_Q \nabla\big(\Delta f(y)\big) \cdot \nabla_y \ln|x-y|\, dy. \end{aligned} \tag{5}$$

Если $n = 5$, то из (4) и равенства $|x-y|^{-3} = -\frac{1}{2}\Delta_y \frac{1}{|x-y|}$ (см. лемму) для функции $f(x) \in C_0^3(\overline{Q})$ получим представление

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\cdot 3\sigma_5} \int_Q \Delta f(y) \cdot \Delta_y \frac{1}{|x-y|}\, dy \\ &= -\frac{1}{2\cdot 3\sigma_5} \int_Q \nabla\big(\Delta f(y)\big) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x-y|}\, dy. \end{aligned} \tag{6}$$

и т.д. Пусть $f \in C_0^{2p}(\,\overline{Q}\,)$, $p \geqslant 2$. Тогда из справедливых при $n > 4p-3$ равенств

$$\frac{1}{|x-y|^{4p-4}} = C'_{4p-2} {\Delta_y}^{p-1} \frac{1}{|x-y|^{2p-2}}\,,$$
$$\frac{1}{|x-y|^{4p-3}} = C'_{4p-1} {\Delta_y}^{p-1} \frac{1}{|x-y|^{2p-1}}\,,$$

вытекающих из леммы, в силу (4) имеем

$$f(x) = C''_{4p-2} \int_Q \frac{\Delta^p f(y)}{|x-y|^{2p-2}}\,dy \quad \text{при } n = 4p-2 \qquad (7_{4p-2})$$

и

$$f(x) = C''_{4p-1} \int_Q \frac{\Delta^p f(y)}{|x-y|^{2p-1}}\,dy \quad \text{при } n = 4p-1 \qquad (7_{4p-1})$$

где C'_i и C''_i – некоторые абсолютные постоянные. Так как при $n > 4p-1$, $p \geqslant 2$,

$$\frac{1}{|x-y|^{4p-2}} = C'_{4p} {\Delta_y}^{p} \frac{1}{|x-y|^{2p-2}}$$

и

$$\frac{1}{|x-y|^{4p-1}} = C'_{4p+1} {\Delta_y}^{p} \frac{1}{|x-y|^{2p-1}}\,,$$

то для $f \in C_0^{2p+1}(\,\overline{Q}\,)$, $p \geqslant 2$, из (4) имеем

$$f(x) = C''{}_{4p} \int_Q \nabla\big(\Delta^p f(y)\big) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x-y|^{2p-2}}\,dy \quad \text{при } n = 4p \quad (7_{4p})$$

и

$$f(x) = C''{}_{4p+1} \int_Q \nabla\big(\Delta^p f(y)\big) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x-y|^{2p-1}}\,dy \quad \text{при } n = 4p+1, \qquad (7_{4p+1})$$

где C'_i, C''_i – абсолютные постоянные.

Поскольку $\left|\nabla_y \frac{1}{|x-y|^s}\right| = \frac{s}{|x-y|^{s+1}}$ при $s \geqslant 1$, то из (3), (5), (6), (7_{4p-2})–(7_{4p+1}) получаем неравенства

$$|f(x)| \leqslant C_{4p-2} \int_Q \frac{|\Delta^p f(y)|}{|x-y|^{2p-2}}\,dy \quad \text{при } n = 4p-2,\;\; p > 1,\;\; x \in Q, \qquad (8_{4p-2})$$

$$|f(x)| \leqslant C_{4p-1} \int_Q \frac{|\Delta^p f(y)|}{|x-y|^{2p-1}}\,dy \quad \text{при } n = 4p-1,\;\; p \geqslant 1,\;\; x \in Q, \qquad (8_{4p-1})$$

для всех $f \in C_0^{2p}(\overline{Q})$, и неравенства

$$|f(x)| \leqslant C_{4p} \int_Q \frac{|\nabla \Delta^p f(y)|}{|x-y|^{2p-1}}\, dy \quad \text{при } n = 4p, \;\; p \geqslant 1, \;\; x \in Q, \qquad (8_{4p})$$

$$|f(x)| \leqslant C_{4p+1} \int_Q \frac{|\nabla \Delta^p f(y)|}{|x-y|^{2p}}\, dy \quad \text{при } n = 4p+1, \;\; p \geqslant 1, \;\; x \in Q, \qquad (8_{4p+1})$$

для всех $f \in C_0^{2p+1}(\overline{Q})$, C_i – абсолютные постоянные.

При $n = 2$ с помощью неравенства Буняковского для функции $f(x)$ из $C_0^2(\overline{Q})$ из (2) получаем неравенство

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\int_Q |\Delta f(y)|^2\, dy \right)^{1/2} \left(\int_Q \big|\ln|x-y|\big|^2\, dy \right)^{1/2} \leqslant C\|f\|_{H^2(Q)}, \qquad x \in Q,$$

в котором не зависящая от $f(x)$ постоянная

$$C > \max_{x \in \overline{Q}} \int_Q \big|\ln|x-y|\big|^2\, dy.$$

При $n = 4p-2$, $p > 1$, для $f(x) \in C_0^{2p}(\overline{Q})$ из (8_{4p-2}) аналогично получаем неравенство

$$|f(x)| \leqslant C_{4p-2} \left(\int_Q |\Delta^p f(y)|^2\, dy \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{dy}{|x-y|^{4p-4}} \right)^{1/2} \leqslant C\|f\|_{H^{2p}(Q)}, \qquad x \in Q,$$

в котором не зависящая от $f(x)$ постоянная

$$C > \max_{x \in \overline{Q}} \int_Q \frac{dy}{|x-y|^{4p-4}}\,,$$

а из (8_{4p-1})–(8_{4p+1}) – соответственно неравенства

$$|f(x)| \leqslant C\|f\|_{H^{2p}(Q)}, \qquad n = 4p-1 \geqslant 3, \quad x \in Q,$$
$$|f(x)| \leqslant C\|f\|_{H^{2p+1}(Q)}, \qquad n = 4p \geqslant 4, \quad x \in Q,$$
$$|f(x)| \leqslant C\|f\|_{H^{2p+1}(Q)}, \qquad n = 4p+1 \geqslant 5, \quad x \in Q,$$

в которых постоянная C не зависит от f.

Таким образом, неравенство

$$\|f\|_{C(\overline{Q})} \leqslant C\|f\|_{H^{[n/2]+1}(Q)} \tag{9}$$

имеет место для всех $f \in C_0^{[n/2]+1}(\overline{Q})$, $n \geqslant 1$, с не зависящей от f постоянной. Справедливость этого неравенства при $n = 1$ немедленно следует из представления

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_a^b \operatorname{sgn}(x-y)\cdot f'(y)\,dy, \qquad x \in [a,b],$$

любой функции $f(x) \in C_0^1([a,b])$, которым мы уже пользовались в § 5.

Если функция $f(x) \in C_0^{[n/2]+1+l}(\overline{Q})$ при некотором $l > 0$, то наряду с неравенством (9) она удовлетворяет и неравенству

$$\|f\|_{C^l(\overline{Q})} \leqslant C_l\|f\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)} \tag{10}$$

в котором постоянная C_l не зависит от f.

Действительно, для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами, $|\alpha| \leqslant l$, в силу (9) имеем

$$\|D^\alpha f\|_{C(\overline{Q})} \leqslant C\|D^\alpha f\|_{H^{[\frac{n}{2}]+1}(Q)} \leqslant C\|f\|_{H^{[n/2]+1+|\alpha|}(Q)}.$$

Суммируя эти неравенства по всем α, $|\alpha| \leqslant l$, получим неравенство (10).

Пусть финитная в Q функция $f(x) \in H^{[n/2]+1+l}(Q)$, а $\{f_m(x), m = 1, 2, \dots\}$ – последовательность функций из $C_0^{[n/2]+1+l}(\overline{Q})$, сходящаяся в норме $H^{[n/2]+1+l}(Q)$ к $f(x)$ (теорема 3 из § 2). В силу (10)

$$\|f_m - f_s\|_{C^l(\overline{Q})} \leqslant C\|f_m - f_s\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)} \to 0$$

при $m, s \to \infty$, т.е. последовательность $\{f_m(x), m = 1, 2, \dots\}$ оказывается фундаментальной, а, значит, и сходящейся и в норме $C^l(\overline{Q})$. Это означает, что предельная для этой последовательности функция $f(x)$ принадлежит не только $H^{[n/2]+1+l}(Q)$, но и $C^l(\overline{Q})$, т.е. функция $f(x)$ допускает возможность такого ее изменения на множестве меры нуль, в результате которого она становится функцией из $C^l(\overline{Q})$. Переходя в неравенстве $\|f_m\|_{C^l(\overline{Q})} \leqslant C\|f_m\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)}$ к пределу при $m \to \infty$, получим справедливость неравенства (10) для любой финитной функции $f(x)$ из $H^{[n/2]+1+l}(Q)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *$H^{[n/2]+1+l}_{\mathrm{loc}}(Q) \subset C^l(Q)$, т.е. любая функция из пространства $H^{[n/2]+1+l}_{\mathrm{loc}}(Q)$ после ее изменения на множестве меры нуль принадлежит пространству $C^l(Q)$.*

Действительно, пусть функция $f(x) \in H^{[n/2]+1+l}_{\mathrm{loc}}(Q)$. Возьмем любую подобласть Q', $Q' \Subset Q$, и построим функцию $\zeta(x) \in C_0^\infty(\overline{Q})$, равную 1 в Q'. Функция $f(x)\,\zeta(x) \in H^{[n/2]+1+l}(Q)$ и является финитной в Q, поэтому она принадлежит $C_0^l(\overline{Q})$ и, значит, функция $f(x)$ принадлежит $C^l(\overline{Q'})$. В силу произвольности Q' функция $f(x)$ принадлежит $C^l(Q)$.

Пусть теперь $f(x)$ – произвольная функция из $H^{[n/2]+1+l}(Q)$. Предположим, что $\partial Q \in C^{[n/2]+1+l}$. Тогда в силу теоремы о продолжении (теорема 1 из § 2) для (любой ограниченной) области Q', $Q' \Supset Q$, существует финитная в Q' функция $F(x) \in H^{[n/2]+1+l}(Q')$, совпадающая с $f(x)$ в Q, причем $\|F\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q')} \leqslant C'\|f\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)}$, где постоянная C' не зависит от $f(x)$.

По доказанному функция $F(x) \in C^l(\overline{Q'})$ и для нее имеет место неравенство $\|F\|_{C^l(\overline{Q'})} \leqslant C''\|F\|_{H^{[n/2]+1+l}}(Q')$ (неравенство (10) для функции $F(x)$ в области Q'). Следовательно, $f(x) \in C^l(\overline{Q})$ и справедливо неравенство

$$\|f\|_{C^l(\overline{Q})} \leqslant C'C''\|f\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если $\partial Q \in C^{[n/2]+1+l}$, то $H^{[n/2]+1+l}(Q) \subset C^l(\overline{Q})$, т.е. каждая функция из $H^{[n/2]+1+l}(Q)$ допускает такое ее изменение на множестве меры нуль, в результате которого она становится функцией из $C^l(\overline{Q})$. При этом для любой функции $f(x) \in H^{[n/2]+1+l}(Q)$ имеет место неравенство*

$$\|f\|_{C^l(\overline{Q})} \leqslant C_l\|f\|_{H^{[n/2]+1+l}(Q)} \tag{10}$$

в котором постоянная $C_l > 0$ не зависит от $f(x)$.

Иначе говоря, *если $\partial Q \in C^{[n/2]+1+l}$, то на $H^{[n/2]+1+l}(Q)$ определен линейный ограниченный оператор $\mathbb{J}$ из $H^{[n/2]+1+l}(Q)$ в $C^l(\overline{Q})$, ставящий в соответствие каждой функции, принадлежащей $H^{[n/2]+1+l}(Q)$, ее же, как функцию из $C^l(\overline{Q})$, оператор вложения $H^{[n/2]+1+l}(Q)$ в $C^l(\overline{Q})$, при этом $\|\mathbb{J}\| \leqslant C_l$.*

Можно доказать, что оператор $\mathbb{J}$ вполне непрерывен (доказательство см. в [1]).

§ 9. Эквивалентные нормировки пространств $H^1(Q)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$

Пусть в области Q задана вещественная симметрическая матрица $\mathbb{A}(x) = \|a_{ij}(x)\|_{i,j=1,\dots,n}$, элементы которой принадлежат $L_\infty(Q)$, функция $a(x) \in L_\infty(Q)$ и функция $\sigma(x) \in L_\infty(\partial Q)$. Определим на $H^1(Q)$ эрмитову билинейную форму

$$W(f,g) = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_i} \overline{g}_{x_j} + a(x) f\overline{g} \right) dx + \int_{\partial Q} \sigma(x) f\overline{g}\, dS \quad (1)$$

(в последнем интеграле, конечно, $f = f\big|_{\partial Q}$, $g = g\big|_{\partial Q}$ – следы на ∂Q соответствующих функций).

Теорема 1. *Если матрица $\mathbb{A}(x)$ положительно определена, т.е. для любого вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ и для п.в. $x \in Q$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi}_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad (2)$$

с постоянной $\gamma > 0$, функции $a(x) \geqslant 0$ п.в. на Q, $\sigma(x) \geqslant 0$ п.в. на ∂Q, и $\operatorname{mes}\{a(x) > 0\} + \operatorname{mes}\{\sigma(x) > 0\} > 0$, *то билинейная форма* (1) *определяет на $H^1(Q)$ скалярное произведение*

$$(f,g)'_{H^1(Q)} = W(f,g),$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f,g)_{H^1(Q)} = \int_Q (\nabla f \nabla \overline{g} + f\overline{g})\, dx. \quad (3)$$

Напомним, что скалярное произведение $(f,g)'_{H^1(Q)}$ эквивалентно скалярному произведению $(f,g)_{H^1(Q)}$, если существуют постоянные $A > 0$ и $B > 0$ такие, что для всех $f \in H^1(Q)$

$$A(f,f)_{H^1(Q)} \leqslant (f,f)'_{H^1(Q)} \leqslant B(f,f)_{H^1(Q)}. \quad (4)$$

Билинейная форма (1), очевидно, удовлетворяет правому неравенству в (4) причем постоянная B зависит лишь от $\|a_{ij}\|_{L_\infty(Q)}$, $i,\, j = 1, \dots, n$, $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|\sigma\|_{L_\infty(\partial Q)}$ и постоянной C_2 из теоремы 1 § 3.

Докажем справедливость левого неравенства в (4). Предположим, что нужной постоянной не существует. Тогда для любого целого $m \geqslant 1$ найдется такая функция $f_m(x) \in H^1(Q)$, что $\|f_m\|^2_{H^1(Q)} > mW(f_m, f_m)$ (напомним, что в силу условий теоремы число $W(f_m, f_m)$ неотрицательно) или, что то же самое, найдется функция $g_m(x) \in H^1(Q)$, для которой

$$\|g_m\|_{H^1(Q)} = 1 \tag{5}$$

и

$$W(g_m, g_m) = \int_Q \biggl(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) g_{mx_i} \overline{g}_{mx_j} + a(x)|g_m|^2 \biggr)\, dx \\ + \int_{\partial Q} \sigma(x)|g_m|^2\, dS < \frac{1}{m}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что каждое из трех слагаемых в $W(g_m, g_m)$ меньше $\frac{1}{m}$, поэтому в силу (2)

$$\int_Q |\nabla g_m|^2\, dx < \frac{1}{\gamma m}, \qquad \int_Q a(x)|g_m|^2\, dx < \frac{1}{m}, \\ \int_{\partial Q} \sigma(x)|g_m|^2\, dS < \frac{1}{m}. \tag{6}$$

Из равенства (5) вытекает, что последовательность $\{g_m(x), m = 1, 2, \ldots\}$ ограничена в $H^1(Q)$, следовательно, по теореме 1 из § 6 из этой последовательности можно выбрать фундаментальную в $L_2(Q)$ подпоследовательность. Не умаляя общности, будем считать, что сама последовательность $\{g_m(x), m = 1, 2, \ldots\}$ фундаментальна в $L_2(Q)$, т.е. $\|g_m - g_p\|_{L_2(Q)} \to 0$ при $m, p \to \infty$. Так как в силу первого из неравенств в (6)

$$\begin{aligned} \|g_m - g_p\|^2_{H^1(Q)} &= \|g_m - g_p\|^2_{L_2(Q)} + \|\,|\nabla(g_m - g_p)|\,\|^2_{L_2(Q)} \\ &\leqslant \|g_m - g_p\|^2_{L_2(Q)} + 2\|\,|\nabla g_m|\,\|^2_{L_2(Q)} + 2\|\,|\nabla g_p|\,\|^2_{L_2(Q)} \\ &\leqslant \|g_m - g_p\|^2_{L_2(Q)} + \frac{2}{m\gamma} + \frac{2}{p\gamma}, \end{aligned}$$

то $\|g_m - g_p\|^2_{H^1(Q)} \to 0$ при $m, p \to \infty$, т.е. последовательность $\{g_m(x), m = 1, 2, \ldots\}$ фундаментальна в $H^1(Q)$. Следовательно, она сходится в $H^1(Q)$ к некоторой функции $g(x) \in H^1(Q)$. Переходя в (5) и (6) к пределу при $m \to \infty$, получим соотношения:

а) $\|g\|_{H^1(Q)} = 1$,

б) $\displaystyle\int_Q |\nabla g|^2\, dx = 0$,

в) $\displaystyle\int_Q a(x)|g|^2\, dx = 0$,

г) $\displaystyle\int_{\partial Q} \sigma(x)|g|^2\, dS = 0$.

Из равенств б) и а) вытекает, что $g(x) = \mathrm{const} = 1/\sqrt{\operatorname{mes} Q}$ в Q и $g\big|_{\partial Q} = 1/\sqrt{\operatorname{mes} Q}$. Но это противоречит, если $\operatorname{mes}\{a(x) > 0\} > 0$, равенству в) или, если $\operatorname{mes}\{\sigma(x) > 0\} > 0$, равенству г). Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Если матрица $\mathbb{A}(x)$ положительно определена и $a(x) \geqslant 0$ п.в. в Q,то билинейная форма*

$$W_1(f, g) = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) f_{x_i} \overline{g}_{x_j} + a(x) f \overline{g} \right) dx$$

задает в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению (3).

Так как $\overset{\circ}{H}{}^1(Q) \subset H^1(Q)$, то из теоремы 1 вытекает, что в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ можно ввести скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению (3), с помощью билинейной формы (1) при $\sigma(x) = 1$ и $a(x) \geqslant 0$ п.в. в Q. Но для $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащих $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ значения билинейных форм W и W_1 совпадают. Теорема доказана.

Следствие 1. *В частности, эквивалентным (3) скалярным произведением в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ является скалярное произведение*

$$(f, g)'_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} = \int_Q (\nabla f, \nabla \overline{g})\, dx.$$

Из теоремы 2 вытекает также

Следствие 2. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ имеет место неравенство Стеклова*

$$\int_Q |f|^2\, dx \leqslant C \int_Q |\nabla f|^2\, dx.$$

Рассмотрим заданные на $H^1(Q)$ эрмитовы билинейные формы

$$W_2(f,g) = \int_Q f\,dx \cdot \int_Q \overline{g}\,dx + \int_Q \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_i} \overline{g}_{x_j} + a(x) f \overline{g} \Big)\,dx$$

и

$$W_3(f,g) = \int_{\partial Q} f\,dS \cdot \int_{\partial Q} \overline{g}\,dS + \int_Q (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_i} \overline{g}_{x_j} + a(x) f \overline{g})\,dx$$

в которых, как и выше, $\mathbb{A}(x) = \|a_{ij}(x)\|_{i,\ldots,n}$ – вещественная симметрическая матрица, элементы которой принадлежат $L_\infty(Q)$, $a(x) \in L_\infty(Q)$.

Теорема 3. *Если матрица $\mathbb{A}(x)$ положительно определена, и $a(x) \geqslant 0$ п.в. на Q, то билинейные формы $W_2(f,g)$ и $W_3(f,g)$ порождают в $H^1(Q)$ скалярные произведения, эквивалентные скалярному произведению (3).*

Эта теорема легко доказывается по тому же плану, что и теорема 1.

Так же как из теоремы 2 были получены следствия 1 и 2, из теоремы 3 немедленно вытекают следствия 3 и 4.

Следствие 3. *В условиях теоремы 3 на подпространствах*

$$H^1_1(Q) = \Big\{ f(x) \in H^1(Q),\ \int_Q f(x)\,dx = 0 \Big\}$$

и

$$H^1_2(Q) = \Big\{ f(x) \in H^1(Q),\ \int_{\partial Q} f(x)\,dS = 0 \Big\}$$

пространства $H^1(Q)$ билинейная форма

$$W_4(f,g) = \int_Q \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) f_{x_i} \overline{g}_{x_j} + a(x) f \overline{g} \Big)\,dx$$

определяет скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению (3).

Следствие 4. *Существуют постоянные* $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$ *такие, что для всех функций* $f \in H^1(Q)$ *имеют место неравенства*

$$\int_Q |f|^2\,dx \leqslant C_1\biggl(\biggl|\int_Q f\,dx\biggr|^2 + \int_Q |\nabla f|^2\,dx\biggr),$$

$$\int_Q |f|^2\,dx \leqslant C_2\biggl(\biggl|\int_{\partial Q} f\,dS\biggr|^2 + \int_Q |\nabla f|^2\,dx\biggr)$$

(*неравенства Пуанкаре и Фридрихса*).

Глава 2

Краевые задачи для эллиптических уравнений

§ 1. Вторая и третья краевые задачи для уравнения второго порядка

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\big(a_{ij}(x)u_{x_i}\big)_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)u_{x_i}+a(x)u=f(x),\qquad x\in Q,\ \ (1)$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}\nu_j(x)+\sigma(x)u\right)\Bigg|_{\partial Q}=\varphi(x),\qquad (2')$$

где $\mathbb{A}(x)=\|a_{ij}(x)\|_{i,j=1,\dots,n}$ – вещественная симметрическая квадратная $n\times n$-матрица, элементы которой $a_{ij}(x)\in C^1(\overline{Q})$, $i,\ j=1,\dots,n$; эту матрицу для всех $x\in\overline{Q}$ считаем положительно определенной (условие эллиптичности уравнения (1)): т.е. существует постоянная $\gamma>0$ такая, что при всех $x\in\overline{Q}$ и при любом векторе $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi}_j\geqslant\gamma\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2.\qquad (3)$$

Функция $a(x)\in C(\overline{Q})$, функции $a_i(x)\in C^1(\overline{Q})$, $i=1,\dots,n$, $\sigma(x)\in C(\partial Q)$, $\nu=\nu(x)=(\nu_1(x),\dots,\nu_n(x))$ – вектор единичной нормали к ∂Q, внешней по отношению к области Q. На граничной поверхности ∂Q

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}\nu_j(x)=\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\nu_j(x)=A(x)\frac{\partial u}{\partial\nu'}\,,$$

где ν' – единичный вектор *внешней конормали*, связанной с оператором в (1), к поверхности ∂Q:

$$\nu' = \nu'(x) = \big(\nu'_1(x), \dots, \nu'_n(x)\big),$$
$$\nu'_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_j(x)}{A(x)}, \qquad i = 1, \dots, n,$$
$$A(x) = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_j(x)\right)^2\right)^{1/2}$$

(легко проверить, что $A(x) > 0$ для всех $x \in \partial Q$, а векторы ν и ν' составляют острый угол).

В связи со сказанным граничное условие ($2'$) можно переписать в виде

$$\left(A(x)\frac{\partial u}{\partial \nu'} + \sigma(x)u\right)\bigg|_{\partial Q} = \varphi(x). \tag{2}$$

Под *классическим решением* задачи (1), (2) (при $\sigma(x) \equiv 0$ задача (1), (2) называется второй краевой задачей, а в противном случае – третьей краевой задачей для уравнения (1)) понимается функция $u(x) \in C^2(Q) \bigcap C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющая условиям (1) и (2); для существования такого решения, очевидно, необходимо, чтобы $f(x) \in C(Q)$, $\varphi(x) \in C(\partial Q)$.

Пусть $u(x)$ – классическое решение задачи (1), (2), принадлежащее $C^2(\overline{Q})$; в этом случае $f \in C(\overline{Q})$. Умножим (1) на произвольную функцию $\overline{v(x)} \in C^1(\overline{Q})$ и проинтегрируем полученное равенство по Q. С помощью формулы Остроградского получим равенство

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\overline{v}_{x_j} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u\right)\overline{v}\right)dx$$
$$+ \int_{\partial Q} \sigma u\overline{v}\,dS = \int_Q f(x)\overline{v}\,dx + \int_{\partial Q} \varphi(x)\overline{v}\,dS, \tag{$4'$}$$

или эквивалентное ему (но более удобное для нас в дальнейшем) равенство

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{v}_{x_j} + u \left(-\sum_{i=1}^n \bigl(a_i(x)\overline{v} \bigr)_{x_i} + a(x)\overline{v} \right) \right) dx \\ + \int_{\partial Q} \left(\sigma + \sum_{i=1}^n a_i(x)\nu_i(x) \right) u\overline{v}\, dS = \int_Q f(x)\overline{v}\, dx + \int_{\partial Q} \varphi(x)\overline{v}\, dS, \tag{4}$$

которые в силу плотности множества $C^1(\,\overline{Q}\,)$ в $H^1(Q)$ справедливы и для любой функции $v(x) \in H^1(Q)$.

Верно также и следующее утверждение: если принадлежащая $C^2(\,\overline{Q}\,)$ функция $u(x)$ удовлетворяет при всех $v(x) \in H^1(Q)$ равенству (4) (или (4′)), то она является классическим решением задачи (1), (2).

Действительно, равенство (4′), которому функция $u(x)$ удовлетворяет, при $v \in C_0^1(\,\overline{Q}\,)$ имеет вид

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{v}_{x_j} + \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + au \right) \overline{v} \right) dx \\ = \int_Q f(x)\overline{v}\, dx, \qquad v \in C_0^1(\,\overline{Q}\,),$$

или после интегрирования по частям в первом члене левой части

$$\int_Q \left(-\sum_{i,j=1}^n \bigl(a_{ij}(x) u_{x_i} \bigr)_{x_j} \\ + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + a(x)u - f(x) \right) \overline{v}\, dx = 0, \qquad v \in C_0^1(\,\overline{Q}\,),$$

откуда вытекает, что функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1). После этого равенство (4) при любой функции $v \in C^1(\,\overline{Q}\,)$ можно переписать следующим образом

$$\int_Q \left(-\sum_{i,j=1}^n \bigl(a_{ij}(x) u_{x_i} \bigr)_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + a(x)u - f(x) \right) \overline{v}\, dx \\ + \int_{\partial Q} \left(A(x) \frac{\partial u}{\partial \nu'} + \sigma(x)u - \varphi(x) \right) \overline{v}\, dS = 0, \qquad v \in C^1(\,\overline{Q}\,),$$

и, тем самым,

$$\int_{\partial Q}\left(A(x)\frac{\partial u}{\partial \nu'}+\sigma(x)u-\varphi(x)\right)\overline{v}\,dS=0,\qquad v\in C^1(\,\overline{Q}\,),$$

откуда в силу произвольности функции $v(x)\in C^1(\,\overline{Q}\,)$ следует выполнение граничного условия (2).

Из сказанного следует, что равенством (4) ((4′)) естественно воспользоваться для определения обобщенного решения задачи (1), (2).

При определении обобщенного решения и при работе с ним нет необходимости в тех требованиях на данные задачи (1), (2), которые были на них наложены при определении классического решения.

В дальнейшем будем считать, что матрица $\mathbb{A}(x)\in L_\infty(Q)$, *т.е.* $a_{ij}(x)\in L_\infty(Q)$ *для всех* $i,j=1,\dots,n$, $a(x)\in L_\infty(Q)$, $\sigma(x)\in L_\infty(\partial Q)$, *и при этом, естественно, считаем, что неравенство* (3) *выполняется лишь для почти всех* $x\in Q$; *функции* $a_i(x)$, $i=1,\dots,n$, *будем по-прежнему считать принадлежащими* $C^1(\,\overline{Q}\,)$, *хотя и на них можно было бы ослабить требования*; *функции* $f(x)$, $x\in Q$, *и* $\varphi(x)$, $x\in\partial Q$, *будут считаться такими, чтобы линейный функционал*

$$l_{f,\varphi}(v)=\int_Q f(x)\overline{v}\,dx+\int_{\partial Q}\varphi(x)\overline{v}\,dS,\qquad v\in H^1(Q),\tag{5}$$

был ограничен на $H^1(Q)$.

Функция $u(x)\in H^1(Q)$ называется *обобщенным решением* задачи (1), (2), если она при всех $v(x)\in H^1(Q)$ удовлетворяет равенству

$$\int_Q\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}\overline{v}_{x_j}+u\left(-\sum_{i=1}^n\big(a_i(x)\overline{v}\big)_{x_i}+a(x)\overline{v}\right)\right)dx$$
$$+\int_{\partial Q}\left(\sigma+\sum_{i=1}^n a_i(x)\nu_i(x)\right)u\overline{v}\,dS=l_{f,\varphi}(v),\qquad v(x)\in H^1(Q),\tag{6}$$

Рассмотрим сначала частный случай задачи (1), (2) – задачу

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j}+a(x)u=f(x),\qquad x\in Q,\tag{7}$$

$$\left(A(x)\frac{\partial u}{\partial\nu'}+\sigma(x)u\right)\Big|_{\partial Q}=\varphi(x).\tag{2}$$

Обобщенное решение этой задачи – функция $u(x)\in H^1(Q)$, удовлетворяющая равенству

$$\int_Q\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}\overline{v}_{x_j}+a(x)u\overline{v}\right)dx+\int_{\partial Q}\sigma u\overline{v}\,dS$$
$$=\int_Q f(x)\overline{v}\,dx+\int_{\partial Q}\varphi(x)\overline{v}\,dS,\tag{8}$$

при любой функции $v\in H^1(Q)$.

Предположим дополнительно, что $a(x)\geqslant 0$ п.в. в Q и $\sigma(x)\geqslant 0$ п.в. на ∂Q, причем $\operatorname{mes}\{a(x)>0\}+\operatorname{mes}\{\sigma(x)>0\}>0$. Тогда левую часть равенства (8) можно согласно теореме 1 параграфа § 9 предыдущей главы принять за скалярное произведение в $H^1(Q)$

$$(u,v)_{H^1(Q)}=\int_Q\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}\overline{v}_{x_j}+a(x)u\overline{v}\right)dx+\int_{\partial Q}\sigma u\overline{v}\,dS,$$

а само равенство (8) переписать в виде

$$(u,v)_{H^1(Q)}=l_{f,\varphi}(v),\tag{9}$$

где $l_{f,\varphi}(v)$ – линейный функционал над $H^1(Q)$, определенный равенством (5).

Поскольку функционал $l_{f,\varphi}(v)$ ограничен в $H^1(Q)$, то по теореме Рисса в $H^1(Q)$ существует единственная функция $F(x)$, для которой при всех $v\in H^1(Q)$ имеет место равенство

$$l_{f,\varphi}(v)=(F,v)_{H^1(Q)},\tag{10}$$

при этом

$$\|F\|_{H^1(Q)}=\|l_{f,\varphi}\|.$$

В частности, если $f\in L_2(Q)$, $\varphi\in L_2(\partial Q)$, то

$$|l_{f,\varphi}(v)|\leqslant\|f\|_{L_2(Q)}\,\|v\|_{L_2(Q)}+\|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}\,\|v\|_{L_2(\partial Q)}$$
$$\leqslant(C_1\|f\|_{L_2(Q)}+C_2\|\varphi\|_{L_2(\partial Q)})\|v\|_{H^1(Q)},$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ – постоянные из соответствующих теорем вложения, т.е. в этом случае

$$\|F\|_{H^1(Q)} = \|l_{f,\varphi}\| \leqslant C_1\|f\|_{L_2(Q)} + C_2\|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}.$$

Из (9) и (10) следует, что единственным обобщенным решением $u(x)$ задачи (7), (2) является функция $F(x), u(x) = F(x)$, и это решение удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant \|l_{f,\varphi}\|, \tag{11}$$

(на самом деле, $\|u\|_{H^1(Q)} = \|l_{f,\varphi}\|$), а в частном случае, когда $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_1\|f\|_{L_2(Q)} + C_2\|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}. \tag{11$'$}$$

Неравенства (11) и (11′) выражают непрерывную зависимость решения от данных задачи (функций f и φ). Таким образом, доказано следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть $a(x) \geqslant 0$ п.в. в Q, $\sigma(x) \geqslant 0$ п.в. на ∂Q и $\mathrm{mes}\{a(x) > 0\} + \mathrm{mes}\{\sigma(x) > 0\} > 0$. Тогда существует и единственно обобщенное решение $u(x)$ задачи* (7), (2). *Это решение удовлетворяет неравенству* (11)

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant \|l_{f,\varphi}\|, \tag{11}$$

где $l_{f,\varphi}(v)$ – линейный ограниченный на $H^1(Q)$ функционал, заданный формулой (5), *и, в частности, если $f \in L_2(Q)$, $\varphi \in L_2(\partial Q)$, то обобщенное решение $u(x)$ удовлетворяет неравенству неравенству* (11′)

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_1\|f\|_{L_2(Q)} + C_2\|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}, \tag{11$'$}$$

положительные постоянные C_1 и C_2 в котором не зависят от f и φ.

Рассмотрим теперь более общий случай – граничную задачу (1), (2). Интегральное равенство (6), определяющее обобщенное решение этой задачи представим в виде

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{v}_{x_j} + u\overline{v} \right) dx - l_1(v) + l_2(v) = l_{f,\varphi}(v), \tag{12}$$

в котором линейные по $v \in H^1(Q)$ функционалы $l_1(v)$ и $l_2(v)$ имеют вид

$$l_1(v) = \int_Q u\Big[(1-a)\overline{v} + \sum_{i=1}^n (a_i\overline{v})_{x_i}\Big]\,dx,$$

$$l_2(v) = \int_{\partial Q} u\Big(\sigma + \sum_{i=1}^n a_i\nu_i(x)\Big)\overline{v}\,dS,$$

а функционал $l_{f,\varphi}(v)$ определен равенством (5).

Первое слагаемое левой части равенства (12) примем, используя теорему 2 § 9 предыдущей главы, за скалярное произведение в $H^1(Q)$

$$\int_Q \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}\overline{v}_{x_j} + u\overline{v}\Big)\,dx = (u,v)_{H^1(Q)}. \tag{13}$$

При каждом $u \in L_2(Q)$ функционал $l_1(v)$, $v \in H^1(Q)$, ограничен:

$$|l_1(v)| \leqslant C_0\|u\|_{L_2(Q)}\,\|v\|_{H^1(Q)}.$$

Следовательно, по теореме Рисса для каждого $u \in L_2(Q)$ существует функция $U_1(x) \in H^1(Q)$, для которой

$$l_1(v) = (U_1, v)_{H^1(Q)}, \tag{14}$$

причем

$$\|U_1\|_{H^1(Q)} = \|l_1\| \leqslant C_0\|u\|_{L_2(Q)}.$$

Это означает, что на $L_2(Q)$ определен линейный оператор A_1 из $L_2(Q)$ в $H^1(Q)$, действующий по формуле

$$A_1 u = U_1, \tag{15}$$

причем оператор A_1 ограничен: $\|A_1\| \leqslant C_0$.

Сужение оператора A_1 на $H^1(Q)$ (мы его по-прежнему будем обозначать через A_1) является вполне непрерывным оператором: любое ограниченное в $H^1(Q)$ множество является по теореме 1 § 6 главы 1 компактным в $L_2(Q)$ и, следовательно, переводится ограниченным из $L_2(Q)$ в $H^1(Q)$ оператором A_1 в компактное в $H^1(Q)$ множество. Окончательно, из (14) и (15) имеем равенство

$$l_1(v) = (A_1 u, v)_{H^1(Q)}. \tag{16}$$

Совершенно аналогично получаем равенство

$$l_2(v) = (A_2 u, v)_{H^1(Q)}, \tag{17}$$

в котором A_2 – линейный ограниченный оператор из $L_2(\partial Q)$ в $H^1(Q)$, являющийся согласно теореме 1 из § 8 предыдущей главы вполне непрерывным оператором из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$ (сужение на $H^1(Q)$ оператора A_2 мы обозначаем той же буквой).

Как и прежде, обозначим через $F(x)$ единственную функцию из $H^1(Q)$, с помощью которой согласно теореме Рисса реализуется в скалярном произведении пространства $H^1(Q)$ значение ограниченного на $H^1(Q)$ функционала $l_{f,\varphi}(v)$

$$l_{f,\varphi}(v) = (F, v)_{H^1(Q)}, \tag{10}$$

при этом

$$\|F\|_{H^1(Q)} = \|l_{f,\varphi}\|.$$

Из равенств (12), (16), (17) и (10) получаем, что обобщенное решение задачи (1), (2) есть решение в $H^1(Q)$ операторного уравнения

$$u - Au = F, \qquad u \in H^1(Q), \tag{18}$$

где линейный вполне непрерывный оператор A из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$ определяется равенством

$$A = A_1 - A_2.$$

Из теорем Фредгольма следует, что для существования решения уравнения (18) при любой функции $F \in H^1(Q)$ необходимо и достаточно, чтобы число 1 не было характеристическим числом оператора A; при этом решение уравнения единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|F\|_{H^1(Q)} = C\|l_{f,\varphi}\| \tag{19}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от f и φ,и, в частности, при $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_1\|f\|_{L_2(Q)} + C_2\|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}. \tag{20}$$

Если 1 является характеристическим числом оператора A, то размерности линейных подпространств $N = \ker(E - A)$ и $N^* =$

$\ker(E - A^*)$ пространства $H^1(Q)$, состоящих, соответственно, из решений однородного уравнения

$$u - Au = 0, \qquad u \in H^1(Q), \tag{18_0}$$

и однородного уравнения

$$u^* - A^*u^* = 0, \qquad u^* \in H^1(Q), \tag{18_0^*}$$

где A^* – оператор, сопряженный оператору A, одинаковы и конечны; эта размерность называется, напомним, кратностью характеристического числа. При этом для существования решения уравнения (18) необходимо и достаточно выполнения условия

$$F \perp N^*.$$

При выполнении этого условия в подпространстве $N^\perp$ пространства $H^1(Q)$, состоящем из всех функций пространства $H^1(Q)$, ортогональных подпространству N, $N^\perp$ – ортогональное дополнение подпространства N, существует единственное решение уравнения (18); это решение удовлетворяет при некоторой постоянной $C > 0$ неравенству (19) или, в частности, неравенству (20), если $f \in L_2(Q)$, $\varphi \in L_2(\partial Q)$. Общее же решение уравнения (18) в этом случае отличается от найденного решения из $N^\perp$ добавлением к нему произвольного элемента из N.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Задача нахождения обобщенного решения задачи* (1), (2) *есть задача решения в пространстве* $H^1(Q)$ *операторного уравнения*

$$u - Au = F,$$

в котором A – линейный вполне непрерывный оператор из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$, а $F(x)$ – функция из $H^1(Q)$, определенная равенством (10).

Если число 1 не является характеристическим числом оператора A, то обобщенное решение задачи (1), (2) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|l_{f,\varphi}\|, \tag{19}$$

и, в частности, если $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$ – неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_1\|f\|_{L_2(Q)} + C_2\|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}, \tag{20}$$

в которых $C > 0$, $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ – не зависящие от f и φ постоянные.

Пусть число 1 *– характеристическое число оператора* A, *а* $N = \ker(E - A)$ *и* $N^* = \ker(E - A^*)$ *– собственные подпространства пространства* $H^1(Q)$ *для операторов* A *и* A^* *соответственно, отвечающие характеристческому числу* 1. *Для существования обобщенного решения задачи* (1), (2) *в этом случае необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$F \perp N^*;$$

при выполнении этого условия обобщенное решение задачи (1), (2) *существует и единственно в подпространстве* $N^{\perp}$, *состоящем из всех функций из* $H^1(Q)$, *ортогональных (в скалярном произведении* (13) *пространства* $H^1(Q)$) *подпространству* N. *Это решение удовлетворяет неравенству* (19) *и, в частности, при* $f \in L_2(Q)$ *и* $\varphi \in L_2(\partial Q)$ *– неравенству* (20). *Общее обобщенное решение задачи* (1), (2) *есть сумма этого решения и произвольной функции из* N.

Рассмотрим важный пример. Пусть $a(x) \equiv 0$, $a_i(x) \equiv 0$, $i = 1, \dots, n$, для $x \in Q$, и $\sigma(x) \equiv 0$ для $x \in \partial Q$, т.е. речь пойдет о второй краевой задаче

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) u_{x_i}\right)_{x_j} = f(x), \qquad x \in Q, \tag{7$'$}$$

$$\left.\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} \nu_j(x)\right)\right|_{\partial Q} = \varphi(x). \tag{2$''$}$$

В этом случае

$$l_1(v) = (u, v)_{L_2(Q)}, \qquad l_2(v) = 0,$$

и, следовательно, линейный вполне непрерывный оператор A из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$ в уравнении (18) удовлетворяет равенству

$$(Au, v)_{H^1(Q)} = (u, v)_{L_2(Q)},$$

скалярное произведение в $H^1(Q)$ в котором определено формулой (13). Таким образом, для всех u и v из $H^1(Q)$

$$\begin{aligned}(Au, v)_{H^1(Q)} = (u, v)_{L_2(Q)} &= \overline{(v, u)}_{L_2(Q)} \\ &= \overline{(Av, u)}_{H^1(Q)} = (u, Av)_{H^1(Q)},\end{aligned}$$

т.е. оператор A в рассматриваемом случае самосопряженный – $A = A^*$.

Пусть $u \in H^1(Q)$ – решение уравнения (18_0) (совпадающего с (18_0^*). Тогда

$$(u, u)_{H^1(Q)} = (u, u)_{L_2(Q)},$$

т.е. в силу (13)

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{u}_{x_j}\, dx = 0,$$

а это согласно (3) означает, что $u_{x_i} = 0$ в Q для всех $i = 1, \ldots, n$, т.е. $u = \text{const}$. Таким образом, в рассматриваемом случае 1 является характеристическим числом оператора A (и A^*); это характеристическое число однократное и подпространства собственных функций $N = N^*$ состоят из постоянных. Поэтому необходимое и достаточное условие существования обобщенного решения

$$l_{f,\varphi}(1) = (F, 1)_{H^1(Q)} = 0,$$

в этом случае в силу (10) и (5) имеет вид

$$\int_Q f(x)\, dx + \int_{\partial Q} \varphi(x)\, dS = 0,$$

При выполнении этого условия существует единственное решение, подчиненное равенству

$$(u, 1)_{H^1(Q)} = (u, 1)_{L_2(Q)} = \int_Q u(x)\, dx = 0.$$

Это решение удовлетворяет неравенству (19) и, в частности, неравенству (20), если $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$. Общее обобщенное решение задачи есть сумма этого решения и произвольной постоянной.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Обобщенное решение задачи* ($7'$), ($2''$) *существует тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$l_{f,\varphi}(1) = \int_Q f(x)\, dx + \int_{\partial Q} \varphi(x)\, dS = 0,$$

где $l_{f,\varphi}(v)$ *– линейный ограниченный функционал, определенный равенством* (5).

При выполнении этого условия обобщенное решение существует и единственно в подпространстве функций из $H^1(Q)$, *подчиненных условию*

$$\int_Q u(x)\,dx = 0,$$

это решение удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|l_{f,\varphi}\|, \tag{19}$$

и, в частности, если $f \in L_2(Q)$ *и* $\varphi \in L_2(\partial Q)$ – *неравенству*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_1\big(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}\big), \tag{20}$$

в которых постоянные $C > 0$ *и* $C_1 > 0$ *не зависят от* f *и* φ. *Общее обобщенное решение есть сумма этого обобщенного решения и произвольной постоянной.*

§ 2. Первая краевая задача для уравнения второго порядка

Рассмотрим теперь первую краевую задачу для уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\bigl(a_{ij}(x)u_{x_i}\bigr)_{x_j}+a(x)u=f(x),\qquad x\in Q,\tag{1}$$

т.е. задачу нахождения решения этого уравнения, удовлетворяющего граничному условию

$$u\big|_{\partial Q}=\varphi(x);\tag{2}$$

при этом будем считать, что $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in C^1(\,\overline{Q}\,)$, $i,j=1,\dots,n$, $a(x)\in C(\,\overline{Q}\,)$, и для всех $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$ и всех $x\in\overline{Q}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi}_j\geqslant\gamma\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2,\tag{3}$$

в котором постоянная $\gamma>0$. Случай более общего уравнения можно рассмотреть по аналогии с тем, как это сделано в предыдущем параграфе для третьей (и второй) краевой задачи.

Под классическим решением задачи (1), (2), как обычно, понимаем функцию $u(x)\in C^2(Q)\cap C(\,\overline{Q}\,)$, удовлетворяющую условиям (1) и (2); таким образом, необходимыми условиями для существования классического решения являются условия: $f\in C(Q)$, $\varphi\in C(\partial Q)$.

Предположим, что $u(x)$ является классическим решением задачи (1), (2) и пусть *дополнительно* $u\in H^1(Q)$, т.е. мы *дополнительно предполагаем*, что первые производные решения принадлежат $L_2(Q)$. Считая, что $f(x)\in L_2(Q)$, проинтегрируем по Q умноженное на $\overline{v}\in C_0^1(\,\overline{Q}\,)$ равенство (1). В результате получим равенство

$$\int_Q\Biggl(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}\overline{v}_{x_j}+a(x)u\overline{v}\Biggr)dx=\int_Q f(x)\overline{v}\,dx,\tag{4}$$

которое в силу плотности множества $C_0^1(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ (теорема 2 § 4 главы 1) остается справедливым и для всех функций $v\in\mathring{H}^1(Q)$.

Обобщенным решением задачи (1), (2) *называется функция* $u(x) \in H^1(Q)$, *удовлетворяющая равенству* (4) *при любой* $v \in \mathring{H}^1(Q)$ *и след которой на* ∂Q *равен* $\varphi(x)$.

В случае первой краевой задачи, как и в предыдущем параграфе в случае третьей (и второй) краевой задачи, при определении обобщенного решения естественно избавиться от излишних условий, наложенных на данные задачи при определении классического решения.

Будем считать, что коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, $i,\ j = 1, \dots, n$, $a(x) \in L_\infty(Q)$; *условие* (3) *считаем выполненным лишь для п.в.* $x \in Q$. *Граничную функцию* $\varphi(x)$ *естественно считать следом на* ∂Q *некоторой функции из* $H^1(Q)$, *а функцию* $f(x)$ *будем предполагать такой, чтобы линейный функционал*

$$l_f(v) = \int_Q f(x)\overline{v}\,dx, \qquad v \in \mathring{H}^1(Q), \tag{5}$$

был ограниченным на $\mathring{H}^1(Q)$.

Кроме того, поскольку здесь мы желаем ограничиться лишь самым простым случаем, *будем считать, что* $a(x) \geqslant 0$ *п.в. в* Q.

В связи со сказанным равенство (4), с помощью которого определено обобщенное решение задачи (1), (2), перепишем в виде

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{v}_{x_j} + a(x) u\overline{v} \right) dx = l_f(v), \qquad v \in \mathring{H}^1(Q). \tag{6}$$

Прежде всего докажем единственность обобщенного решения. Пусть u_1 и u_2 – два решения. Их разность $u = u_1 - u_2 \in \mathring{H}^1(Q)$ и удовлетворяет при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ равенству

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{v}_{x_j} + a(x) u\overline{v} \right) dx = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = 0 \quad \text{для всех } v \in \mathring{H}^1(Q),$$

если скалярное произведение в $\mathring{H}^1(Q)$ определить на основании теоремы 2 § 9 главы 1 формулой

$$(u', v')_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u'_{x_i} \overline{v'_{x_j}} + a(x) u' \overline{v'} \right) dx, \tag{7}$$

где u', $v' \in \mathring{H}^1(Q)$. Следовательно, $u = 0$, т.е. $u_1 = u_2$, что и требовалось установить.

Перейдем теперь к вопросу о существовании обобщенного решения. Согласно сделанному предположению существует функция $\Phi(x) \in H^1(Q)$, для которой граничная функция $\varphi(x)$, $x \in \partial Q$, является следом на ∂Q: $\Phi\big|_{\partial Q} = \varphi(x)$. Сделаем в равенстве (6) замену $u = \Phi + w$ искомой функции $u \in H^1(Q)$ на функцию $w \in \mathring{H}^1(Q)$. В результате, для функции $w(x)$ получаем равенство

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) w_{x_i} \overline{v}_{x_j} + a(x) w \overline{v} \right) dx$$
$$= l_f(v) - \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \Phi_{x_i} \overline{v}_{x_j} + a(x) \Phi \overline{v} \right) dx,$$

которое должно выполняться для всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Это равенство можно переписать в виде

$$(w, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = l_{f,\Phi}(v),$$

где линейный по $v \in \mathring{H}^1(Q)$ функционал

$$l_{f,\Phi}(v) = l_f(v) - \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \Phi_{x_i} \overline{v}_{x_j} + a(x) \Phi \overline{v} \right) dx, \quad v \in \mathring{H}^1(Q),$$

ограничен в $\mathring{H}^1(Q)$, поскольку имеет место неравенство

$$|l_{f,\Phi}(v)| \leqslant \|l_f\| \, \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)} + C \|\Phi\|_{H^1(Q)} \, \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)}$$
$$= \big(\|l_f\| + C \|\Phi\|_{H^1(Q)} \big) \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)},$$

постоянная $C > 0$ в котором не зависит ни от v, ни от Φ, и, тем самым,

$$\|l_{f,\Phi}\| \leqslant \|l_f\| + C \|\Phi\|_{H^1(Q)}.$$

Следовательно, по теореме Рисса существует единственная функция $F(x) \in \mathring{H}^1(Q)$, для которой при всех $v(x) \in \mathring{H}^1(Q)$ имеет место равенство

$$l_{f,\Phi}(v) = (F, v)_{\mathring{H}^1(Q)},$$

при этом

$$\|F\|_{\mathring{H}^1(Q)} = \|l_{f,\Phi}\|,$$

где норма в $\mathring{H}^1(Q)$ порождена скалярным произведением (7).

Это означает, что функция

$$u(x) = \Phi(x) + F(x)$$

является обобщенным решением задачи (1), (2), и это решение непрерывно зависит от f и Φ (а, тем самым, и от f и φ):

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1(Q)} &= \|\Phi + F\|_{H^1(Q)} \\ &\leqslant \|\Phi\|_{H^1(Q)} + \|l_{f,\Phi}\| \leqslant \|l_f\| + C_1\|\Phi\|_{H^1(Q)}.\end{aligned} \tag{8}$$

В частности, если $f \in L_2(Q)$, то в силу (5) и неравенства Стеклова (следствие 2 из теоремы 2 § 9 главы 1)

$$|l_f(v)| = |(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)}\, \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C_2\|f\|_{L_2(Q)}\, \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)}$$

т.е.

$$\|l_f\| \leqslant C_2\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Следовательно, в этом случае неравенству (8) можно придать вид

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_3\big(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)}\big), \tag{8$'$}$$

в котором постоянная $C_3 > 0$ не зависит от f и φ.

Поскольку постоянные C_1 и C_3 в (8) и (8$'$) не зависят от Φ, то наряду с этими неравенствами имеют место и неравенства

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant \|l_f\| + C_1 \inf_{\Phi \in H^1(Q), \Phi|_{\partial Q} = \varphi} \|\Phi\|_{H^1(Q)}, \tag{8$''$}$$

и, в частности, когда $f \in L_2(Q)$,

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_3\big(\|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\Phi \in H^1(Q), \Phi|_{\partial Q} = \varphi} \|\Phi\|_{H^1(Q)}\big), \tag{8$'''$}$$

выражающее непрерывную зависимость решения от функций f и φ в "явном" виде.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x) \in L_\infty(Q)$, $a(x) \geqslant 0$ п.в. в Q, и для всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ и п.в. $x \in \overline{Q}$ выполняется неравенство (3). Тогда при любой функции $\varphi(x)$, которая является следом на ∂Q некоторой функции из $H^1(Q)$, и любой функции f, для которой определенный равенством (5) функционал $l_f(v)$, $v \in \mathring{H}^1(Q)$, ограничен, существует и единственно обобщенное решение $u(x)$ задачи (1), (2); это решение удовлетворяет неравенству (8$''$) и, в частности, если $f \in L_2(Q)$, – неравенству (8$'''$).*

Замечание 1. Нетрудно проверить, что множество заданных на ∂Q функций $\varphi(x)$, являющихся следами некоторых функций из $H^1(Q)$, образует банахово пространство $B(\partial Q)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{B(\partial Q)} = \inf_{\Phi \in H^1(Q), \Phi|_{\partial Q} = \varphi} \|\Phi\|_{H^1(Q)}.$$

Сказанное позволяет неравенства ($8''$) и ($8'''$) переписать соответственно в виде

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant \|l_f\| + C_1 \|\varphi\|_{B(\partial Q)}$$

и

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_3(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{B(\partial Q)}).$$

Из полученных в этом и предыдущем параграфах результатов вытекает, в частности, существование и единственность решения рассмотренной во введении задачи о равновесии мембраны. Напомним, что функция $u(x)$, $x \in Q \subset \mathbb{R}^2$, задающая уравнение $u = u(x)$, $x \in Q$, мембраны в состоянии равновесия, является экстремалью того или иного в зависимости от способа закрепления границы квадратичного функционала, характеризующего потенциальную энергию мембраны, и тем самым, представляет собой обобщенное решение соответствующей краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка. Аналогичная ситуация имеет место не только в задаче о равновесии мембраны, но и в ряде других механических задач. В связи с этим рассматриваемые нами обобщенные решения иногда называют энергетическими обобщенными решениями. Важным свойством таких решений является не только их связь с соответствующими физическими задачами, но и достаточная простота работы с ними, в чем мы уже частично убедились.

Вернемся к установленному в этом параграфе результату.

Из определения обобщенного решения и доказанной теоремы вытекает, что при наложенных на коэффициенты уравнения и на функцию $f(x)$ условиях для существования обобщенного решения задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x) \in B(\partial Q)$. В связи с этим возникает естественная потребность дать конструктивное описание элементов пространства $B(\partial Q)$.

Из теоремы 2 § 2 главы 1 вытекает, что любая функция $\varphi(x) \in C^1(\partial Q)$ является следом на ∂Q некоторой функции из $C^1(\overline{Q})$ и, тем самым, функции из $H^1(Q)$, т.е. $C^1(\partial Q) \subset B(\partial Q)$. Можно доказать, что $B(\partial Q)$ – гильбертово пространство $H^{1/2}(\partial Q)$

функций с половинным порядком гладкости. Поскольку изучение пространств H^α с нецелыми α, да еще в случае более или менее произвольных областей находятся вне рамок нашего курса, то мы ограничимся в этом направлении лишь изучением пространства $B(\partial Q)$ для случая, когда область Q есть круг в $\mathbb{R}^2$. На этом примере, в частности, будет продемонстрировано, что множество $B(\partial Q)$ не достаточно богато: оно не содержит в себе, например, все непрерывные на границе функции, $C(\partial Q) \not\subseteq B(\partial Q)$, и что, тем самым, возможна ситуация, когда классическое решение задачи Дирихле с некоторой непрерывной граничной функцией существует (для уравнения Лапласа в круге), но обобщенного решения эта задача не имеет.

В связи с этим было введено более общее понятие обобщенного решения задачи (1), (2), обобщающее не только введенное выше, но и понятие классического решения. Это решение $u(x)$ из $H^1_{\text{loc}}(Q)$; уравнению (1) функция $u(x)$ удовлетворяет в том смысле, что для нее выполняется равенство (4) при всех финитных функциях $v(x)$ из $H^1(Q)$, а граничное условие (2) можно, например, в случае гладкой границы понимать как предел в определенной норме множества следов функции $u(x)$ на аппроксимирующей границу изнутри области системе "параллельных" границе поверхностей. При рассмотрении обобщенных решений из $H^1_{\text{loc}}(Q)$ от граничной функции можно предполагать лишь принадлежность $L_2(\partial Q)$. Мы в нашем курсе будем рассматривать лишь энергетические обобщенные решения. С обобщенными решениями из $H^1_{\text{loc}}(Q)$ можно познакомиться в [2] и в работах авторов этих лекций.

Приведем теперь в случае, когда область Q есть круг в $\mathbb{R}^2$, пример классического решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа, которое не принадлежит $H^1(Q)$.

Пусть Q – круг $\{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, где r и θ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$, $0 \leqslant r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Классическим решением задачи

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \qquad |x| < 1, \\ u\big|_{r=1} = \varphi_0(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k^3\theta}{k^2}\,, \end{gathered} \tag{9}$$

(с непрерывной граничной функцией $\varphi_0(\theta)$) является функция

$$u_0(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{k^3} \frac{\cos k^3\theta}{k^2}\,.$$

Покажем, что $u_0(x) \notin H^1(|x|<1)$. Действительно, для любого $R \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\int_{|x|<R} |\nabla u_0|^2\,dx &= \int_{|x|<R} \left((u_{0r})^2 + \frac{1}{r^2}(u_{0\theta})^2\right) dx \\ &= 2\int_{|x|<R} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k^3-1} \sin k^3\theta\right)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^1 r\left[\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{2k^3-2}\right] dr = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^{2k^3}}{k}\,,\end{aligned}$$

т.е.

$$\int_{|x|<R} |\nabla u_0|^2 \to \infty \quad \text{при } R \to 1-0.$$

Следовательно, $u_0 \notin H^1(|x|<1)$.

На самом деле, справедливо более сильное утверждение: в $H^1(|x|<1)$ не существует функции, след которой на границе совпадает с непрерывной функцией φ_0 из (9), и, тем самым, задача (9) вообще не имеет обобщенного решения. Это утверждение есть следствие каждого из следующих двух критериев, в формулировках и доказательствах которых, как и в только что приведенном примере, область Q есть круг $\{|x|<1\} \subset \mathbb{R}^2$, $x=(x_1,x_2)$, $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, где r и θ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$, $0 \leqslant r < 1$, $\theta \in [0,2\pi]$.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(\theta) \in L_2(0,2\pi)$, и*

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \tag{10}$$

– ее разложение в ряд Фурье. Для того чтобы функция $\varphi(\theta)$ была следом на $\{|x|=1\}$ некоторой функции из $H^1(|x|<1)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2+b_k^2). \tag{11}$$

Для функции $\varphi_0(\theta)$ из (9) коэффициенты $b_s = 0$, $s = 1, 2, \ldots$, а коэффициенты $a_s = 1/k^2$, если $s = k^3$ при некотором целом $k > 0$, и $a_s = 0$ в противном случае. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \infty,$$

и, тем самым, функция $\varphi_0(\theta)$ из (9) не является следом на окружности $\{|x| = 1\}$ какой-либо функции из $H^1(|x| < 1)$.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим в круге $\{|x| < 1\}$ функцию

$$w(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \tag{12}$$

Поскольку в силу равенства Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{2}\, \|\varphi\|_{L_2}(0, 2\pi) < \infty \tag{13}$$

множество коэффициентов Фурье функции φ ограничено, то ряд в (12) и ряды, полученные из него дифференцированием любого порядка, равномерно сходятся на любом замкнутом подмножестве круга $\{|x| < 1\}$. Следовательно, $w(x) \in C^\infty(|x| < 1)$ и является гармонической функцией (каждый член ряда в (12) есть гармонический многочлен). Имеет место следующее утверждение.

Лемма. *Для того чтобы определенная рядом* (12) *функция $w(x)$ принадлежала пространству $H^1(|x| < 1)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* (11).

Обозначим через $w_m(x)$ частичную сумму ряда (12):

$$w_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Так как все функции системы $\{1,\ r^k \cos k\vartheta,\ r^k \sin k\vartheta,\ k = 1, 2, \ldots\}$ попарно ортогональны в $L_2(|x| < 1)$ и

$$\|r^k \cos k\vartheta\|^2_{L_2(|x|<1)} = \|r^k \sin k\vartheta\|^2_{L_2(|x|<1)} = \frac{\pi}{2(k+1)}$$

при $k = 1, 2, \ldots$, то для любых p и q, $q > p \geqslant 0$,

$$\|w_q - w_p\|^2_{L_2(|x|<1)} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=p+1}^{q} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1}\,.$$

Поэтому из сходимости ряда (13) вытекает сходимость в $L_2(|x|<1)$ последовательности $w_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$. Следовательно, функция $w(x) \in L_2(|x| < 1)$ и ряд (12) сходится к ней в $L_2(|x| < 1)$.

Пусть сходится ряд (11). Тогда (при $q > p \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}\|w_q - w_p\|^2_{H^1(|x|<1)} &= \int_{|x|<1} [(w_q - w_p)^2 + |\nabla(w_q - w_p)|^2]\,dx \\ &= \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} \left[(w_q - w_p)^2 + (w_{qr} - w_{pr})^2 + \frac{1}{r^2}(w_{q\theta} - w_{p\theta})^2\right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=p+1}^{q} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1} + \pi \sum_{k=p+1}^{q} k(a_k^2 + b_k^2) \to 0\end{aligned}$$

при p, $q \to \infty$. Т.е. последовательность $w_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, сходится в $H^1(|x| < 1)$. Следовательно, $w(x) \in H^1(|x| < 1)$.

Пусть теперь $w(x) \in H^1(|x| < 1)$. Так как для любого $R < 1$ последовательность норм

$$\begin{aligned}\|w_m\|^2_{H^1(|x|<R)} = \frac{\pi R^2}{2} \Bigg(\frac{a_0^2}{2} &+ \sum_{k=1}^{m} R^{2k} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1} \\ &+ 2\sum_{k=1}^{m} R^{2k-2} k(a_k^2 + b_k^2) \Bigg), \qquad m = 1, 2, \ldots,\end{aligned}$$

монотонно не убывая, стремится при $m \to \infty$ к $\|w\|^2_{H^1(|x|<R)}$, то при всех $R < 1$ и всех m имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} R^{2k} k(a_k^2 + b_k^2) &\leqslant \frac{1}{\pi}\, \|w_m\|^2_{H^1(|x|<R)} \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\, \|w\|^2_{H^1(|x|<R)} \leqslant \frac{1}{\pi}\, \|w\|^2_{H^1(|x|<1)}.\end{aligned}$$

Следовательно, частичные суммы ряда (11) ограничены:

$$\sum_{k=1}^{m} k(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\, \|w\|^2_{H^1(|x|<1)}.$$

т.е. ряд (11) сходится. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Достаточность немедленно вытекает из леммы, поскольку в случае сходимости ряда (11) функция $w(x)$ из (12) принадлежит $H^1(|x|<1)$ и ее след на окружности $\{|x|=1\}$ равен $\varphi(\theta)$ (функция $\varphi(\theta)$ является пределом в $L_2(0,2\pi)$ последовательности частичных сумм ряда (10), которые являются значениями на границе соответствующих принадлежащих $C^1(|x|\leqslant 1)$ частичных сумм сходящегося в $H^1(Q)$ ряда (12).

Докажем необходимость. Пусть существует функция $\Phi(x)\in H^1(|x|<1)$, для которой $\Phi\big|_{|x|=1}=\varphi$. Тогда в силу теоремы 1 существует обобщенное решение краевой задачи

$$
\begin{gathered}
\Delta u = 0, \qquad |x|<1,\\
u\big|_{|x|=1}=\varphi.
\end{gathered}
$$

(она является частным случаем задачи (1), (2)). Известно (см., например, [6], [7]), что обобщенное решение этой задачи $u(x)\in C^\infty(|x|<1)$ и является гармонической функцией в $\{|x|<1\}$. Разложим $u(x)=u(r,\theta)$ при фиксированном $r<1$ в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье:

$$
u(r,\theta)=\frac{U_0(r)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(U_k(r)\cos k\theta+V_k(r)\sin k\theta\bigr),
$$

где

$$
\begin{aligned}
U_k(r)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\vartheta)\cos k\theta\,d\theta, \qquad k=0,1,2,\dots,\\
V_k(r)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)\sin k\theta\,d\theta, \qquad k=1,2,\dots\,.
\end{aligned}
$$

Функции $U_k(r)$ (и $V_k(r)$), $k=0,1,\dots$, бесконечно дифференцируемы при $0<r<1$ и ограничены при $r\to+0$. Поскольку $u\in H^1(|x|<1)$, то в силу непрерывности следа функций из $H^1(|x|<1)$, установленного в § 3 главы 1,

$$
\int_0^{2\pi}\bigl(u(r,\theta)-\varphi(\theta)\bigr)^2\,d\theta\to 0 \quad \text{при } r\to 1-0
$$

для всех $k = 0, 1, \dots$. Следовательно, имеем

$$\int_0^{2\pi} \bigl(u(r,\theta) - \varphi(\theta)\bigr) \cos k\theta \, d\theta \to 0$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \bigl(u(r,\theta) - \varphi(\theta)\bigr) \sin k\theta \, d\vartheta \to 0\right)$$

при $r \to 1 - 0$.

Таким образом, все функции $U_k(r)$ $(V_k(r))$ непрерывны слева в точке $r = 1$ и $U_k(1) = a_k$ $(V_k(1) = b_k)$, $k = 0, 1, \dots$.

Так как для $r \in (0, 1)$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\vartheta\vartheta} = 0,$$

то для таких r

$$U_k''(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_{rr}(r,\theta) \cos k\theta \, d\theta = -\frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} u_r(r,\theta) \cos k\theta \, d\theta$$
$$- \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} u_{\theta\theta}(r,\theta) \cos k\theta \, d\theta = -\frac{1}{r}\, U_k' + \frac{k^2}{r^2}\, U_k$$

при $k = 0, 1, \dots$.

Это означает, что для любых $k = 0, 1, \dots$ функция $U_k(r)$ удовлетворяет при $0 < r < 1$ обыкновенному дифференциальному уравнению (Эйлера)

$$y'' + \frac{1}{r}\, y' - \frac{k^2}{r^2}\, y = 0.$$

Поскольку общее решение этого уравнения имеет вид $Br^k + Cr^{-k}$ при $k \neq 0$ и $B + C \ln r$ при $k = 0$, то $U_k(r) = a_k r^k$, $k = 0, 1, \dots$. Аналогично показывается, что $V_k(r) = b_k r^k$, $k = 1, 2 \dots$.

Таким образом, функция u, принадлежащая $H^1(|x| < 1)$, совпадает с функцией w из (12). А тогда в силу леммы сходится ряд (11). Теорема доказана.

Приведем еще один критерий того, чтобы функция $\varphi = \varphi(\theta)$ была следом на границе круга $\{|x| < 1\}$ функции из $H^1(|x| < 1)$.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $\varphi(\vartheta)$ была следом на границе круга $\{|x| < 1\}$ функции из $H^1(|x| < 1)$ необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{t^2} \int_0^{2\pi} \bigl(\varphi(\theta + t) - \varphi(\theta)\bigr)^2 \, d\theta < \infty.$$

Для функции $\varphi(\theta)$, разложенной в ряд Фурье (10) имеем

$$\begin{aligned}\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}&a_k\bigl(\cos k\theta(\cos kt-1)-\sin k\theta\sin kt\bigr)\\&+b_k\bigl(\sin k\theta(\cos kt-1)+\cos k\theta\sin kt\bigr)\\=\sum_{k=1}^{\infty}&\bigl(\cos k\theta[a_k(\cos kt-1)+b_k\sin kt]\\&+\sin k\theta[b_k(\cos kt-1)-a_k\sin kt]\bigr).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\bigl(\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)\bigr)^2\,d\vartheta\\&\quad=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\bigl[\bigl(a_k(\cos kt-1)+b_k\sin kt\bigr)^2\\&\qquad+\bigl(b_k(\cos kt-1)-a_k\sin kt\bigr)^2\bigr]\\&\quad=\pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)[(\cos kt-1)^2+\sin^2 kt]\\&\quad=2\pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)(1-\cos kt)=4\pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\sin^2\frac{kt}{2}\,.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t^2}\int_0^{2\pi}\bigl(\varphi(\vartheta+t)-\varphi(\vartheta)\bigr)^2\,d\vartheta&=4\pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\frac{kt}{2}}{t^2}\,dt\\=2\pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)k\int_0^{k\pi}\frac{\sin^2\tau}{\tau^2}\,d\tau.\end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^{k\pi}\frac{\sin^2\tau}{\tau^2}\,d\tau\to\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\tau}{\tau^2}\,d\tau>0\quad\text{при } k\to\infty,$$

то сходимость ряда (10) и сходимость интеграла в формулировке теоремы 3 эквивалентны. Теорема доказана.

§ 3. Задача о собственных значениях и собственных функциях

В этом параграфе сначала мы рассмотрим третью (вторую) краевую задачу:

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j}+a(x)u=\lambda u,\qquad x\in Q,\tag{1}$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)\nu_j(x)+\sigma(x)u\right)\Big|_{\partial Q}=0,\tag{2}$$

в которой все коэффициенты – вещественнозначные функции, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in C^1(\overline{Q})$, $i,\ j=1,\dots,n$, при всех $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$ и всех $x\in\overline{Q}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi}_j\geqslant\gamma\sum_{i}|\xi_i|^2\tag{3}$$

с постоянной $\gamma>0$, $a(x)\in C(\overline{Q})$, $\sigma(x)\in C(\partial Q)$, через $\nu(x)=(\nu_1(x),\dots,\nu_n(x))$ обозначен единичный вектор внешней по отношению к области Q нормали к границе ∂Q, λ – числовой параметр.

Поскольку нас будут интересовать обобщенные решения этой задачи, то как и в § 1 разумно снизить требования на коэффициенты в (1) и (2).

Будем считать, что вещественнозначные функции $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in L_\infty(Q)$, $i,\ j=1,\dots,n$, *неравенство* (3) *выполняется для всех* $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$ *и п.в.* $x\in Q$, $a(x)\in L_\infty(Q)$, $\sigma(x)\in L_\infty(\partial Q)$.

Кроме того, для простоты *будем считать, что* $\sigma(x)\geqslant 0$ *п.в. на* ∂Q.

В рассматриваемом случае определение обобщенного решения задачи (1), (2) выглядит следующим образом – это функция $u(x)\in H^1(Q)$, удовлетворяющая при всех $v(x)\in H^1(Q)$ равенству

$$\int_Q\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}\overline{v}_{x_j}+a(x)u\overline{v}\right)dx+\int_{\partial Q}\sigma(x)u\overline{v}\,dS=\lambda\int_Q u\overline{v}\,dx.\tag{4}$$

Число λ называется *собственным значением задачи* (1), (2), если при этом значении λ существует функция $u(x)\in H^1(Q)$,

$\operatorname{mes}\{u(x) \neq 0\} > 0$, удовлетворяющая равенству (4) при любой $v(x) \in H^1(Q)$; функция $u(x)$ называется *обобщенной собственной функцией задачи* (1), (2), *отвечающей собственному значению* λ.

Возьмем произвольное число $m > -\operatorname{vrai}\min_{x\in Q} a(x)$. Тогда $a(x) + m > 0$ п.в. в Q. Представим равенство (4) в виде

$$\int_Q \Bigl(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{v}_{x_j} + \bigl(a(x) + m\bigr) u\overline{v} \Bigr)\, dx + \int_{\partial Q} \sigma(x) u\overline{v}\, dS$$
$$= (\lambda + m) \int_Q u\overline{v}\, dx, \qquad v \in H^1(Q),$$

или, что то же самое, в виде

$$(u, v)_{H^1(Q)} = (\lambda + m)(u, v)_{L_2(Q)} \qquad \text{для всех } v \in H^1(Q), \tag{5}$$

если скалярное произведение в $H^1(Q)$ согласно теореме 1 § 9 главы 1 определить формулой

$$(u, v)_{H^1(Q)}$$
$$= \int_Q \Bigl(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{v}_{x_j} + \bigl(a(x) + m\bigr) u\overline{v} \Bigr)\, dx + \int_{\partial Q} \sigma(x) u\overline{v}\, dS. \tag{6}$$

Поскольку при любом $u \in L_2(Q)$ линейный функционал $l_u(v) = (u, v)_{L_2(Q)}$ ограничен:

$$|l_u(v)| = |(u, v)_{L_2(Q)}| \leqslant C\|u\|_{L_2(Q)}\, \|v\|_{H^1(Q)},$$
$$\|l_u\| \leqslant C\|u\|_{L_2(Q)},$$

то по теореме Рисса при любом $u \in L_2(Q)$ существует единственная функция $U(x) \in H^1(Q)$, для которой

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (U, v)_{H^1(Q)} \quad \text{при всех } v \in H^1(Q),$$
$$\|U\|_{H^1(Q)} = \|l_u\|.$$

Следовательно, на $L_2(Q)$ задан линейный ограниченный оператор A из $L_2(Q)$ в $H^1(Q)$:

$$Au = U,$$
$$\|Au\|_{H^1(Q)} = \|U\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|u\|_{L_2(Q)}, \qquad u \in L_2(Q),$$

откуда

$$\|A\| \leqslant C,$$

при этом для всех $u \in L_2(Q)$ и $v \in H^1(Q)$ имеет место равенство

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{H^1(Q)}.$$

Поскольку уравнение $Au = 0$, $u \in L_2(Q)$, в силу этого равенства имеет решение только $u = 0$, то оператор A имеет обратный A^{-1}.

Сужение оператора A на $H^1(Q)$ (мы обозначаем это сужение той же буквой A) в силу теоремы 1 § 6 главы 1 является вполне непрерывным оператором из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$. Так как при всех v, $u \in H^1(Q)$

$$\begin{aligned}(Au, v)_{H^1(Q)} &= (u, v)_{L_2(Q)} \\ &= \overline{(v, u)}_{L_2(Q)} = \overline{(Av, u)}_{H^1(Q)} = (u, Av)_{H^1(Q)},\end{aligned}$$

то оператор A из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$ самосопряженный, $A = A^*$, и поскольку

$$(Au, u)_{H^1(Q)} = (u, u)_{L_2(Q)} > 0$$

для всех $u \neq 0$, то оператор A положительный.

Равенство (5) с помощью оператора A можно записать в виде

$$(u, v)_{H^1(Q)} = (\lambda + m)(Au, v)_{H^1(Q)} \quad \text{при } v \in H^1(Q). \tag{7}$$

Следовательно, задача разыскания собственных значений и собственных функций эквивалентна задаче отыскания характеристических чисел и собственных элементов оператора A:

$$u = (\lambda + m)Au, \qquad u \in H^1(Q).$$

Число λ является собственным значением нашей задачи тогда и только тогда, когда число $\mu = \lambda + m$ является характеристическим числом оператора A, а обобщенные собственные функции являются соответствующими собственными элементами этого оператора.

Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны (в скалярном произведении (6) пространства $H^1(Q)$).

Поскольку функция $Cu(x)$ вместе с собственной функцией $u(x)$, где постоянная $C \neq 0$, тоже является собственной функцией, отвечающей тому же собственному значению, то собственные функции можно считать нормированными в $H^1(Q)$ (в норме, порождаемой скалярным произведением (6)): $\|u\|_{H^1(Q)} = 1$. Множество собственных функций, отвечающих собственному значению λ образует линейное подпространство M_λ пространства $H^1(Q)$; по второй теореме Фредгольма его размерность, называемая кратностью $k(\lambda)$ собственного значения, конечна: $\dim M_\lambda = k(\lambda) < \infty$. В M_λ можно выбрать ортонормированный (в скалярном произведении (6)) базис, состоящий из $k(\lambda)$ собственных функций, отвечающих собственному значению λ.

Из теорем Фредгольма и теоремы Гильберта–Шмидта следует, что множество собственных значений является непустым счетным множеством вещественных чисел $\{\lambda_i,\ i = 1, 2, \dots\}$, которое можно расположить в порядке невозрастания:

$$-m < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_k \leqslant \dots, \qquad \lambda_k \to \infty \quad \text{при } k \to \infty, \tag{8}$$

причем каждое собственное значение в этой последовательности повторяется столько раз, какова его кратность. Соответствующая последовательность собственных функций

$$u_1(x), \dots, u_k(x), \dots \tag{9}$$

образует ортонормированный в скалярном произведении (6) базис пространства $H^1(Q)$:

$$(u_1, u_2)_{H^1(Q)} = \delta_{i,j}, \qquad i,\ j = 1, 2, \dots .$$

В силу (7) для всех $i,\ j = 1, 2, \dots$, имеем равенство

$$(u_i, u_j)_{H^1(Q)} = (\lambda_i + m)(u_i, u_j)_{L_2(Q)},$$

из которого вытекает, что

$$(u_i, u_j)_{L_2(Q)} = \frac{1}{\lambda_i + m}\,\delta_{ij}, \qquad i,\ j = 1, 2, \dots,$$

т.е. последовательность (9) ортогональна в $L_2(Q)$, а последовательность

$$\frac{u_1(x)}{\sqrt{\lambda_1 + m}}, \dots, \frac{u_k(x)}{\sqrt{\lambda_k + m}}, \dots, \tag{10}$$

является ортонормированной системой в $L_2(Q)$.

Поскольку $H^1(Q)$ является всюду плотным в $L_2(Q)$ множеством, то последовательность (10) является ортонормированным базисом пространства $L_2(Q)$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x)$, $\sigma(x)$ в (1) и (2) вещественнозначные функции, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x) \in L_\infty(Q)$, $\sigma(x) \in L_\infty(\partial Q)$ и $\sigma(x) \geqslant 0$ п.в. на ∂Q. Тогда множество всех собственных значений задачи (1), (2) есть счетное множество вещественных чисел*

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots,$$

при этом $\lambda_1 \geqslant \operatorname{vrai\,min}_{x\in Q} a(x)$ и $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

В этой последовательности каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Соответствующая последовательность обобщенных собственных функций

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

образует ортонормированный в скалярном произведении (6) базис пространства $H^1(Q)$. Система

$$\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{L_2(Q)}}, \frac{u_2(x)}{\|u_2\|_{L_2(Q)}}, \ldots, \frac{u_n(x)}{\|u_n\|_{L_2(Q)}}, \ldots$$

является ортонормированным базисом пространства $L_2(Q)$.

Совершенно аналогично рассматривается и задача на собственные значения в случае граничного условия первого рода:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \bigl(a_{ij}(x)u_{x_i}\bigr)_{x_j} + a(x)u = \lambda u, \qquad x \in Q, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial Q} = 0, \tag{11}$$

в которой все коэффициенты – вещественнозначные функции, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\overline{Q})$, $i, j = 1, \ldots, n$, при всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ и всех $x \in \overline{Q}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi_j} \geqslant \gamma \sum_i |\xi_i|^2 \tag{3}$$

с постоянной $\gamma > 0$, $a(x) \in C(\overline{Q})$, λ – числовой параметр.

Поскольку нас будут интересовать обобщенные решения этой задачи, то как и в § 2 разумно снизить требования на коэффициенты в (1) и (2).

Будем считать, что вещественнозначные функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, $i, j = 1, \dots, n$, *неравенство* (3) *выполняется для всех* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ *и п.в.* $x \in Q$, $a(x) \in L_\infty(Q)$.

В рассматриваемом случае определение обобщенного решения задачи (1), (11) выглядит, напомним, следующим образом: это функция $u(x) \in \mathring{H}^1(Q)$, удовлетворяющая при всех $v(x) \in \mathring{H}^1(Q)$ равенству

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{v}_{x_j} + a(x) u \overline{v} \right) dx = \lambda \int_Q u \overline{v}\, dx. \tag{12}$$

Число λ называется *собственным значением задачи* (1), (11), если при этом значении λ существует функция $u(x) \in \mathring{H}^1(Q)$, $\operatorname{mes}\{u(x) \neq 0\} > 0$, удовлетворяющая равенству (12) при любой $v(x) \in \mathring{H}^1(Q)$; функция $u(x)$ называется *обобщенной собственной функцией задачи* (1), (11), *отвечающей собственному значению* λ.

Введем обозначение $m = -\operatorname{vrai\,min}_{x\in Q} a(x)$ (тогда $a(x) + m \geqslant 0$ п.в. в Q) и перепишем (12) в виде

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{v}_{x_j} + \big(a(x) + m\big) u \overline{v} \right) dx$$
$$= (\lambda + m) \int_Q u \overline{v}\, dx, \qquad v \in \mathring{H}^1(Q),$$

или, что то же самое, в виде

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = (\lambda + m)(u, v)_{L_2(Q)}, \qquad v \in \mathring{H}^1(Q), \tag{13}$$

если скалярное произведение в $\mathring{H}^1(Q)$ согласно теореме 2 § 9 главы 1 определить по формуле

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \overline{v}_{x_j} + \big(a(x) + m\big) u \overline{v} \right) dx. \tag{14}$$

Интегральное равенство (13) аналогично интегральному равенству (5), которое получено при рассмотрении задачи (1), (2), в нем лишь роль пространства $H^1(Q)$ играет его подпространство $\mathring{H}^1(Q)$. Проводя на основании равенства (13) те же рассуждения, что выше были проведены на основании равенства (5), конечно, с естественной заменой $H^1(Q)$ на $\mathring{H}^1(Q)$, убедимся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты* $a_{ij}(x)$, i, $j = 1, \ldots, n$, $a(x)$ *в* (1) *вещественнозначные функции,* $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in L_\infty(Q)$, i, $j = 1, \ldots, n$, $a(x) \in L_\infty(Q)$. *Тогда множество всех собственных значений задачи* (1), (11) *есть счетное множество вещественных чисел*

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots,$$

при этом $\lambda_1 > -\operatorname{vrai\,min}_{x \in Q} a(x)$ *и* $\lambda_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

В этой последовательности каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Соответствующая последовательность обобщенных собственных функций

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

образует ортонормированный в скалярном произведении (14) *базис пространства* $\mathring{H}^1(Q)$. *Система*

$$\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{L_2(Q)}}, \frac{u_2(x)}{\|u_2\|_{L_2(Q)}}, \ldots, \frac{u_n(x)}{\|u_n\|_{L_2(Q)}}, \ldots$$

является ортонормированным базисом пространства $L_2(Q)$.

Список литературы

Цитированная литература

[1] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988.

[2] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1983.

[3] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1, ГИТТЛ, М., 1951.

[4] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1988.

[5] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физико-математическая литература, М., 2000.

[6] С. Л. Соболев, *Уравнения математической физики*, ГИТТЛ, М., 1954.

[7] В. П. Михайлов, *Лекции по уравнениям математической физики*, Физматлит, М., 2001.

Рекомендуемые учебники по общим вопросам теории функций и функционального анализа

[8] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1972.

[9] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Наука, М., 1965.

[10] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ в нормированных пространствах*, ГИТТЛ, М., 1959.

[11] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.

[12] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Введение в теорию обобщенных функций*, Лекционные курсы НОЦ, **5**, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, М., 2006.

[13] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.

[14] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, ИЛ, М., 1954.

[15] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, ГИТТЛ, М., 1957.

Часть II

В первой части курса были установлены основные свойства пространств Соболева и изучена разрешимость краевых задач для линейных эллиптических уравнений второго порядка. Вторая часть посвящена доказательству более тонких свойств обобщенных решений этих уравнений. В частности, в ней доказывается, что обобщенное решение однородного уравнения с измеримыми и ограниченными коэффициентами, принадлежащее по определению пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, на самом деле непрерывно внутри рассматриваемой области Q, а для решений задачи Дирихле справедлив принцип максимума. Более того, решение непрерывно по Гёльдеру внутри Q. Доказательство этого фундаментального результата Е. Де Джорджи и Дж. Нэша (см. [1], [2]) является основной целью данной части и его потребности во многом о пределили выбор материала. О роли этого результата в развитии теории квазилинейных уравнений, а также в решении 19-ой и 20-ой проблем Гильберта, см., например, [3], [4].

Теорема о гёльдеровой непрерывности справедлива и для решений общего (в том числе и неоднородного) эллиптического уравнения второго порядка. Однако мы ограничимся простейшим случаем уравнения в самосопряженной форме без младших членов, в котором легче увидеть основные идеи доказательства. С возможными обобщениями этого результата можно ознакомиться, например, в книгах [3], [4]. В основе изложения лежит доказательство, предложенное Мозером (см. [5]). Оно потребует знания некоторых дополнительных свойств пространств Соболева; их изложению посвящена глава 3. Доказательству принципа максимума и вытекающего из него утверждения об однозначной разрешимости задачи Дирихле посвящена глава 4. Там же рассмотрены пространства с отрицательным показателем гладкости и доказана теорема об изоморфизме. Последняя глава содержит слабое неравенство Гарнака и доказательство теоремы о гёльдеровой непрерывности решений.

Глава 3

Некоторые дополнительные сведения из теории пространств Соболева

В этой главе будут приведены некоторые свойства пространств Соболева, которые нам понадобятся при изучении свойств решений эллиптических уравнений. Будет доказан критерий принадлежности измеримой функции пространству $L_\infty(Q)$, установлена теорема вложения $W_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$ и получена специальная оценка нормы в $L_p(Q)$ через интеграл Дирихле и норму в L_2 по множеству заданной меры. Кроме того, мы рассмотрим не изучавшийся в первой части вопрос об обобщенных производных сложной функции.

§ 1. Пространства L_p и L_∞

Пусть $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – измеримое (относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^n$) множество, $\operatorname{mes} \mathscr{E} > 0$, mes – мера Лебега. Всюду в этой части мы будем рассматривать только вещественнозначные функции. Напомним, что пространство $L_p(\mathscr{E})$, $p \geqslant 1$, состоит из определенных в $\mathscr{E}$ измеримых функций, p-ая степень модуля которых суммируема (по $\mathscr{E}$); при этом функции из $L_p(\mathscr{E})$ считаются равными (образуют один элемент этого пространства), если их значения совпадают почти всюду. Норму в $L_p(\mathscr{E})$ будем далее обозначать через $\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E})}$ или через $\|\cdot\|_p$,

$$\|f\|_{L_p(\mathscr{E})} = \|f\|_p = \left(\int_{\mathscr{E}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Известно, что $L_p(\mathscr{E})$ является сепарабельным банаховым пространством. Напомним, что метрическое пространство называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество, т.е. замыкание этого счетного множества совпадает со всем пространством (см., например, [6], [7]).

Для любых функций $f \in L_p(\mathscr{E})$ и $g \in L_q(\mathscr{E})$, где $1/p+1/q=1$, их произведение fg принадлежит $L_1(\mathscr{E})$ и справедливо *неравенство Гёльдера*

$$\int_{\mathscr{E}} |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Если мера множества $\mathscr{E}$ конечна ($\operatorname{mes}\mathscr{E} < +\infty$), то из неравенства Гёльдера немедленно следует, что семейство пространств $L_p(\mathscr{E})$, $p \geqslant 1$, монотонно убывает по вложению: если $p_1 < p_2$, то $L_{p_2}(Q) \subset L_{p_1}(Q)$, при этом для всех $f \in L_{p_2}(\mathscr{E})$ справедлива оценка

$$\|f\|_{p_1} \leqslant (\operatorname{mes}\mathscr{E})^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}} \|f\|_{p_2}.$$

Далее нам потребуется следующее *обобщенное неравенство Гёльдера.*

Лемма 1. *Пусть* $f_1 \in L_{p_1}(\mathscr{E}), f_2 \in L_{p_2}(\mathscr{E}), \ldots, f_m \in L_{p_m}(\mathscr{E})$, *где* $1/p_1 + 1/p_2 + \cdots + 1/p_m = 1$. *Тогда произведение* $f_1 f_2 \ldots f_m \in L_1(\mathscr{E})$ *и*

$$\int_{\mathscr{E}} |f_1(x) f_2(x) \ldots f_m(x)|\,dx \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \ldots \|f_m\|_{p_m}. \tag{1}$$

Доказательство естественно провести индукцией по числу функций в системе. При $m=2$ утверждение верно (оно совпадает с неравенством Гёльдера). Предположим, что оно справедливо при $m=k-1$, и докажем его при $m=k$. В силу неравенства Гёльдера

$$\int_{\mathscr{E}} |f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x)|\,dx \\ \leqslant \left(\int_{\mathscr{E}} |f_1(x)|^{p_1}\,dx\right)^{1/p_1} \left(\int_{\mathscr{E}} |f_2(x) \ldots f_k(x)|^{q_1}\,dx\right)^{1/q_1}, \tag{2}$$

где $1/p_1 + 1/q_1 = 1$. Возьмем $r_i = p_i/q_1$, $i = 2, \ldots, k$. Так как $1/r_2 + \cdots + 1/r_k = q_1(1/p_2 + \cdots + 1/p_k) = 1$, то по индукционному предположению

$$\int_{\mathscr{E}} |f_2(x)|^{q_1} \ldots |f_k(x)|^{q_1}\,dx \leqslant \|\,|f_2|^{q_1}\|_{r_2} \ldots \|\,|f_m|^{q_1}\|_{r_m}.$$

Подставляя полученное неравенство в (2), получаем (1).

Перейдем теперь к изучению пространства существенно ограниченных функций $L_\infty(\mathscr{E})$. Напомним, что это пространство состоит из всех измеримых функций f, каждая из которых удовлетворяет условию: существует такая постоянная $M = M(f)$, что $\operatorname{mes}\{x \in \mathscr{E} : |f(x)| > M\} = 0$. Легко видеть, что это условие эквивалентно условию ограниченности множества чисел K, для которых $\operatorname{mes}\{x \in \mathscr{E} : |f(x)| > K\} > 0$. Наименьшая из постоянных M (равная, очевидно, точной верхней грани чисел K) называется нормой f в $L_\infty(\mathscr{E})$; будем обозначать ее через $\|f\|_{L_\infty(\mathscr{E})}$ или через $\|f\|_\infty$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_\infty(\mathscr{E})} &= \|f\|_\infty \\ &= \min\bigl\{M : \operatorname{mes}\{x \in \mathscr{E} : |f(x)| > M\} = 0\bigr\} \\ &= \sup\bigl\{K : \operatorname{mes}\{x \in \mathscr{E} : |f(x)| > K\} > 0\bigr\} = \operatorname{vrai\,sup}_{\mathscr{E}}|f|.\end{aligned}$$

Конечно, как и для пространств $L_p(\mathscr{E})$, функции из $L_\infty(\mathscr{E})$ считаем равными, если их значения совпадают почти всюду в $\mathscr{E}$.

Будем предполагать, что $\operatorname{mes}\mathscr{E} < +\infty$. Тогда пространство $L_\infty(\mathscr{E})$ вложено во все пространства $L_p(\mathscr{E})$. Нетрудно убедиться, что $L_\infty(\mathscr{E})$ не совпадает с пересечением $L_p(Q)$, $p \geqslant 1$. Далее нам понадобится следующий критерий принадлежности функции пространству $L_\infty(\mathscr{E})$.

Теорема 1. *Функция f принадлежит пространству $L_\infty(\mathscr{E})$ тогда и только тогда, когда она принадлежит всем пространствам $L_p(\mathscr{E})$, $p \geqslant 1$, и существует такая постоянная C, что для всех $p \geqslant 1$ $\|f\|_p \leqslant C$. При этом*

$$\|f\|_p \to \|f\|_\infty \quad \text{при } p \to \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что выражение

$$\left(\frac{1}{\operatorname{mes}\mathscr{E}} \int_{\mathscr{E}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \|f\|'_p$$

задает эквивалентную норму в пространстве $L_p(\mathscr{E})$. В силу неравенства Гёльдера для любой функции f из пересечения $\bigcap_{p\geqslant 1} L_p(\mathscr{E})$ семейство норм $\|f\|'_p$ монотонно не убывает (по p). А так как $\|f\|'_p \sim \|f\|_p$ при $p \to \infty$, то в доказательстве теоремы можно рассматривать как нормы $\|f\|_p$, так и нормы $\|f\|'_p$.

Утверждение о необходимости очевидно: из ограниченности измеримой функции f следует суммируемость $|f|^p$. А так как

$\|f\|'_p \leqslant \|f\|_\infty$, то ограничено, а следовательно, и сходится при $p \to \infty$ семейство норм функции f в $L_p(\mathscr{E})$. При этом

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|'_p = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty. \tag{4}$$

Докажем утверждение о достаточности. Пусть функция f принадлежит пересечению пространств $L_p(\mathscr{E})$, $p \geqslant 1$, и с некоторой постоянной C выполняется условие: $\|f\|_p \leqslant C$ для всех $p \geqslant 1$. Возьмем произвольное неотрицательное число K, для которого мера множества $\mathscr{E}_K = \{x \in \mathscr{E} : |f(x)| > K\}$ положительна. Поскольку для всех p

$$K^p \operatorname{mes} \mathscr{E}_K \leqslant \int_{\mathscr{E}_K} |f(x)|^p \, dx \leqslant \int_{\mathscr{E}} |f(x)|^p \, dx,$$

то каждое такое число K должно удовлетворять оценке

$$K \leqslant \lim_{p\to\infty} \frac{\|f\|_p}{(\operatorname{mes} \mathscr{E}_K)^{1/p}} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant C.$$

Следовательно, $f \in L_\infty(\mathscr{E})$ и

$$\|f\|_\infty = \sup\{K : \operatorname{mes} \mathscr{E}_K > 0\} \leqslant \lim_{p\to\infty} \|f\|_p \,.$$

Последнее неравенство вместе с (4) дают (3).

§ 2. Вложение пространства $W_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$

Пусть Q – ограниченная область $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$; гладкость ее границы (если это не оговорено особо) мы предполагать не будем. В этом параграфе будут доказаны теоремы вложения пространств $\mathring{W}_2^1(Q)$ и $W_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$; при этом мы будем следить за зависимостью постоянной от области Q. Кроме того. В § 9 главы 1 были доказаны теоремы об эквивалентных нормировках пространств $W_2^1(Q)$ и $\mathring{W}_2^1(Q)$, из которых следовали оценки квадрата нормы в $L_2(Q)$ через сумму интеграла Дирихле и квадрата интеграла по Q от рассматриваемой функции из $W_2^1(Q)$ (неравенство Пуанкаре) и через интеграл Дирихле для функций из $\mathring{W}_2^1(Q)$ (неравенство Стеклова). Из этих теорем (точнее, из теоремы 1 § 9 главы 1) нетрудно получить и оценку интеграла по Q от квадрата функции f (из $W_2^1(Q)$) через сумму интеграла Дирихле этой функции и интеграла от f по некоторому множеству положительной меры. В конце этого параграфа мы убедимся (см. лемму 1), что постоянная в обсуждаемой оценке зависит не от вида и расположения в Q этого множества, а только от его меры (считаем, что область Q фиксирована). Более подробную информацию о пространствах Соболева, в частности, теоремы вложения при минимальных предположениях относительно гладкости границы области можно найти, например, в [8].

Прежде всего, договоримся, что мы будем понимать под пространствами $W_2^1(Q)$ и $\mathring{W}_2^1(Q)$; определения этих пространств были даны для случая области с гладкой границей, а мы от этого требования отказались. Рассмотрим множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и финитных функций. Под $C^\infty(\,\overline{Q}\,)$ будем понимать множество сужений на Q функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. На $C^\infty(\,\overline{Q}\,)$ введем скалярное произведение

$$(f,g)_{W_2^1(Q)} = \int_Q \big[\big(\nabla f(x), \nabla g(x)\big) + f(x)g(x)\big]\,dx; \tag{5}$$

напомним, что мы договорились рассматривать вещественнозначные функции. Если последовательность фундаментальна в полученном нормированном пространстве, то она, очевидно, фундаментальна в $L_2(Q)$. Добавим к функциям из $C^\infty(\,\overline{Q}\,)$ пределы (элементы $L_2(Q)$) всех фундаментальных (в норме, порожденной скалярным произведением (5)) последовательностей функций из $C^\infty(\,\overline{Q}\,)$. Полученное таким образом замыкание $C^\infty(\,\overline{Q}\,)$

по норме, порожденной скалярным произведением (5), является гильбертовым пространством с тем же скалярным произведением (оно изоморфно пополнению $C^\infty(\overline{Q})$); его мы и будем обозначать через $W_2^1(Q)$. Отметим, что в случае области с гладкой границей приведенное определение эквивалентно (в силу теоремы 4 §2 главы 1) определению, использованному в первой части. Под пространством $\mathring{W}_2^1(Q)$ будем понимать замыкание по той же норме множества финитных бесконечно дифференцируемых в Q функций. Если граница ∂Q области Q состоит (как в части I) из конечного числа гладких поверхностей, то след на ∂Q функций из $\mathring{W}_2^1(Q)$, очевидно, равен нулю. А теорема 2 §4 главы 1 дает справедливость в этом случае и обратного утверждения: если след на ∂Q функции из $W_2^1(Q)$ равен нулю, то она является пределом (в норме, порожденной скалярным произведением (5)) некоторой последовательности функций из $C_0^\infty(Q)$. Таким образом, и новое определение пространства $\mathring{W}_2^1(Q)$ является расширением определения из главы 1 на области с негладкой границей. Отметим также, что в приведенных определениях вместо бесконечно дифференцируемых функций можно рассматривать непрерывно дифференцируемые функции: функция из $C^1(\overline{Q})$, очевидно, принадлежит $W_2^1(Q)$, а если она еще и финитна, то и $\mathring{W}_2^1(Q)$. Так же естественно определить пространства $W_2^1(Q)$ и $\mathring{W}_2^1(Q)$ и в случае неограниченной области Q; заметим, что если $Q = \mathbb{R}^n$, то так определенные пространства $W_2^1(Q)$ и $\mathring{W}_2^1(Q)$ совпадают.

Аналогично, под пространством $W_p^k(Q)$ естественно понимать замыкание $C^\infty(\overline{Q})$ по норме этого пространство (см. часть I); $\mathring{W}_p^k(Q)$ – это замыкание $C_0^\infty(Q)$ по той же норме.

Начнем изучение указанных в названии параграфа вложений со случая пространства $\mathring{W}_2^1(Q)$. В этом случае нет необходимости требовать ограниченность области Q.

Теорема 1. *Пусть размерность пространства n не меньше трех. Тогда $\mathring{W}_2^1(Q) \subset L_{\frac{2n}{n-2}}(Q)$. При этом для любой функции f из $\mathring{W}_2^1(Q)$ справедлива оценка*

$$\|f\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(Q)} \leqslant \frac{2(n-1)}{n-2} \, \| \, |\nabla f| \, \|_{L_2(Q)}. \tag{6}$$

Если $n = 2$ и $\operatorname{mes} Q < \infty$, то для всех $p \geqslant 1$ $\mathring{W}_2^1(Q) \subset L_p(Q)$ и

$$\|f\|_{L_p(Q)} \leqslant \frac{p}{2} (\operatorname{mes} Q)^{1/p} \, \| \, |\nabla f| \, \|_{L_2(Q)}, \qquad f \in \mathring{W}_2^1(Q). \tag{6$'$}$$

Замечание 1. Если $\operatorname{mes} Q < \infty$, то из первого утверждения теоремы 1 немедленно следует (в силу монотонности по вложению семейства пространств $L_p(Q)$), что все $L_p(Q)$, $p \in [1, \frac{2n}{n-2}]$, содержат $\mathring{W}_2^1(Q)$. При этом

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_p(Q)} &\leqslant (\operatorname{mes} Q)^{\frac{p(2-n)+2n}{2np}} \|f\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(Q)} \\ &\leqslant \frac{2(n-1)}{n-2} (\operatorname{mes} Q)^{\frac{p(2-n)+2n}{2np}} \| \, |\nabla f| \, \|_{L_2(Q)}.\end{aligned}$$

В частности, при $p = 2$ имеем неравенство Стеклова

$$\|f\|_{L_2(Q)} \leqslant \frac{2(n-1)}{n-2} (\operatorname{mes} Q)^{1/n} \| \, |\nabla f| \, \|_{L_2(Q)}, \qquad (6'')$$

в котором постоянная зависит только от размерности пространства n и меры области Q.

Доказательство теоремы 1. Возьмем произвольную функцию f из $C_0^\infty(Q)$; доопределим ее нулем вне Q. Тогда для любой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$|f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i', t_i) \, dt_i \right|,$$

здесь $(x_i', t_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Перемножая n таких равенств, соответствующих $i = 1, \ldots, n$, и возводя произведение в степень $1/(n-1)$, имеем

$$|f(x)|^{n/(n-1)} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i', t_i) \right| dt_i \right)^{1/(n-1)}.$$

Интегрируя это неравенство по x_1 и применяя обобщенное неравенство Гёльдера (1) с $p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = n-1$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|^{n/(n-1)}\, dx_1$$
$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1', t_1) \right| dt_1 \right)^{1/(n-1)}$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i', t_i) \right| dt_i \right)^{1/(n-1)} dx_1$$
$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1', t_1) \right| dt_1 \right)^{1/(n-1)}$$
$$\times \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt_i \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i', t_i) \right| dx_1 \right)^{1/(n-1)}.$$

Откуда, интегрируя по остальным переменным (x_k, $k = 2, \dots, n$) и каждый раз применяя обобщенное неравенство Гёльдера с теми же показателями, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{n/(n-1)}\, dx$$
$$\leqslant \left[\prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| dx \right]^{1/(n-1)} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \right)^{n/(n-1)}.$$

Таким образом, мы доказали (напомним, что $f = 0$ вне Q) справедливость для всех $f \in C_0^\infty(Q)$ оценки

$$\|f\|_{L_{n/(n-1)}(Q)} \leqslant \int_Q |\nabla f(x)|\, dx = \|\, |\nabla f|\, \|_{L_1(Q)}. \tag{7}$$

Замечание 2. Из полученного неравенства (7) немедленно следует, что для любой области $Q \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 2$, пространство $\mathring{W}_1^1(Q)$ вложено в $L_{n/(n-1)}(Q)$ и для всех $f \in \mathring{W}_1^1(Q)$ справедливо (7).

Действительно, возьмем произвольную функцию $f \in \mathring{W}_1^1(Q)$ и пусть $\{f_m\}$ – последовательность функций из $C_0^\infty(Q)$, сходящаяся к f в $\mathring{W}_1^1(Q)$. Из (7) следует фундаментальность этой последовательности и в $L_{n/(n-1)}(Q)$. Легко видеть, что предел в $L_{n/(n-1)}(Q)$

этой последовательности совпадает (п.в. в Q) с f (Докажите!) и его норма в $L_{n/(n-1)}(Q)$ – предел норм f_m в этом пространстве – удовлетворяет (7) (предел норм $|\nabla f_m|$ в $L_1(Q)$, конечно, равен норме $|\nabla f|$ в $L_1(Q)$).

Вернемся к доказательству теоремы 1. Пусть, по-прежнему, $f \in C_0^\infty(Q)$, а $n > 2$. Применим к непрерывно дифференцируемой и финитной в Q функции $|f(x)|^\gamma$, где $\gamma = \frac{2(n-1)}{n-2} > 2$, оценку (7); для таких функций она справедлива в силу замечания 2. Получим

$$\|\,|f|^\gamma\|_{L_{n/(n-1)(Q)}} = \left(\int_Q |f(x)|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}}$$
$$\leqslant \gamma\int_Q |f(x)|^{\gamma-1}|\nabla f(x)|\,dx \leqslant \gamma\|\,|f|^{\gamma-1}\|_{L_2(Q)}\,\|\,|\nabla f|\,\|_{L_2(Q)}.$$

Или, учитывая выбранное значение γ, имеем оценку

$$\left(\int_Q |f(x)|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \frac{2(n-1)}{n-2}\left(\int_Q |f(x)|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\|\,|\nabla f|\,\|_{L_2(Q)},$$

которая, очевидно, совпадает с (6). Из доказанной для гладких финитных функций оценки (6) вытекает, как и в замечании 2, первое утверждение доказываемой теоремы.

Докажем второе утверждение. Пусть теперь размерность пространства n равна двум, $f \in C_0^\infty(Q)$. Тогда (доказанное для всех $n \geqslant 2$) неравенство (7) имеет вид

$$\|f\|_{L_2(Q)} \leqslant \|\,|\nabla f|\,\|_{L_1(Q)}.$$

Возьмем произвольное число $\gamma > 1$ и применим (7) к функции $|f(x)|^\gamma$. Используя неравенство Гёльдера, получим оценку

$$\left(\int_Q |f(x)|^{2\gamma}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \gamma\int_Q |f(x)|^{\gamma-1}|\nabla f(x)|\,dx \leqslant \gamma\|\,|f|^{\gamma-1}\|_{L_2(Q)}\,\|\,|\nabla f|\,\|_{L_2(Q)}$$
$$\leqslant \gamma\left(\int_Q |f(x)|^{2(\gamma-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}}\,dx\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}(\operatorname{mes} Q)^{\frac{1}{2\gamma}}\|\,|\nabla f|\,\|_{L_2(Q)},$$

которая, очевидно, совпадает с (6′), $p = 2\gamma > 2$. Для $p \in [1,2]$ неравенство (6′) получается из доказанного с помощью неравенства Гёльдера. Утверждение о вложении $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$ и справедливость ($6'$) для всех $f \in \mathring{W}_2^1(Q)$ устанавливается, как и в замечании 2, с помощью приближения произвольной функции их $\mathring{W}_2^1(Q)$ гладкими финитными функциями.

В случае ограниченной области Q с гладкой (класса C^1) границей из доказанной теоремы 1 и теоремы 1 § 2 главы 1 немедленно вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. *Пусть Q – ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Тогда $W_2^1(Q) \subset L_p(Q)$ для $p \in [1, \frac{2n}{n-2}]$ при $n \geqslant 3$ и для всех $p \geqslant 1$ при $n = 2$. При этом справедлива оценка*

$$\|f\|_{L_p(Q)} \leqslant C\|f\|_{W_2^1(Q)},$$

в которой постоянная C зависит от размерности пространства n, показателя суммируемости p и области Q; $C = C(n, p, Q)$.

Пусть теперь Q – шар единичного радиуса,

$$Q = \mathscr{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Лемма 1. *Для произвольной положительной постоянной c_0 найдется такая постоянная $C = C(n, c_0)$, что для любого множества $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}_1$, мера которого не меньше c_0, и всех функций $f \in W_2^1(\mathscr{B}_1)$ справедливо неравенство*

$$\int_{\mathscr{B}_1} f^2(x)\,dx \leqslant C\Big[\int_{\mathscr{B}_1} |\nabla f|^2(x)\,dx + \int_{\mathscr{E}} f^2(x)\,dx\Big]. \tag{8}$$

Доказательство. Возьмем две произвольные точки x и y шара $\mathscr{B}_1$. Наряду с декартовыми координатами точки y, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ будем рассматривать и ее сферические координаты с центром в точке x: $y = x + r\omega$, $r = |y - x|$, $|\omega| = 1$. Пусть g – произвольная функция из $C_0^\infty(\mathscr{B}_1)$. Так как

$$g(x) = g(y) - \int_0^r \frac{d}{dt}[g(x + t\omega)]\,dt,$$

то

$$|g(x)| \leqslant |g(y)| + \int_0^r |\nabla g(x + t\omega)|\,dt.$$

Интегрируя это неравенство по множеству $\mathscr{E}$ (по переменным y) и заменяя во втором слагаемом правой части интеграл по $\mathscr{E}$ на интеграл по всему шару $\mathscr{B}_1$, получаем

$$\operatorname{mes}\mathscr{E}|g(x)| \leqslant \int_{\mathscr{E}} |g(y)|\,dy + \int_{\mathscr{B}_1}\left[\int_0^r |\nabla g(x+t\omega)|\,dt\right]dy.$$

Доопределим функцию $|\nabla g|$ нулем вне $\mathscr{B}_1$ и обозначим ее через h: $h(z) = |\nabla g(z)|$ при $z \in \mathscr{B}_1$ и $h(z) = 0$ при $z \notin \mathscr{B}_1$. Так как

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{B}_1}\left[\int_0^r |h(x+t\omega)|\,dt\right]dy \\
&\qquad = \int_0^2 r^{n-1}\left[\int_{|\omega|=1}\left(\int_0^r h(x+t\omega)\,dt\right)dS_\omega\right]dr \\
&\qquad \leqslant \int_0^2 r^{n-1}\left[\int_{|\omega|=1}\left(\int_0^2 h(x+t\omega)\,dt\right)dS_\omega\right]dr \\
&\qquad = \frac{2^n}{n}\int_{\{z:|z-x|<2\}} \frac{h(z)}{|z-x|^{n-1}}\,dz = \frac{2^n}{n}\int_{\mathscr{B}_1}\frac{|\nabla g(z)|}{|z-x|^{n-1}}\,dz,
\end{aligned}$$

то для всех точек x из $\mathscr{B}_1$

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{c_0}\int_{\mathscr{E}}|g(y)|\,dy + \frac{2^n}{nc_0}\int_{\mathscr{B}_1}\frac{|\nabla g(z)|}{|z-x|^{n-1}}\,dz.$$

Интегрируя последнее неравенство по шару $\mathscr{B}_1$, получаем, что для любой функции $g \in C_0^\infty(\mathscr{B}_1)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{B}_1}|g(x)|\,dx &\leqslant \frac{C(n)}{c_0}\int_{\mathscr{E}}|g(y)|\,dy + \frac{2^n}{nc_0}\int_{\mathscr{B}_1}\left[\int_{\mathscr{B}_1}\frac{|\nabla g(z)|}{|z-x|^{n-1}}\,dz\right]dx \\
&\leqslant C(n,c_0)\left[\int_{\mathscr{E}}|g(x)|\,dx + \int_{\mathscr{B}_1}|\nabla g(x)|\,dx\right] \qquad (8')
\end{aligned}$$

с зависящей только от n и c_0 постоянной $C(n,c_0)$.

Замечание 3. Приближая произвольную функцию g, принадлежащую $W_1^1(\mathscr{B}_1)$, функциями из $C_0^\infty(\mathscr{B}_1)$, немедленно получаем (8′) для $g \in W_1^1(\mathscr{B}_1)$.

Вернемся к доказательству леммы 1. Возьмем произвольную $f \in C_0^\infty(\mathscr{B}_1)$ и к функции $g(x) = f^2(x)$ применим (8′). Получим неравенство

$$\int_{\mathscr{B}_1} f^2(x)\,dx \leqslant C(n,c_0)\left[\int_{\mathscr{E}} f^2(x)\,dx + \int_{\mathscr{B}_1}|f(x)|\,|\nabla f(x)|\,dx\right],$$

из которого немедленно вытекает доказываемая оценка (8) для $f \in C_0^\infty(\mathscr{B}_1)$. Справедливость (8) для всех $f \in W_2^1(\mathscr{B}_1)$ получается стандартным приемом с помощью приближения гладкими функциями.

Из следствия 1 и леммы 1 немедленно вытекает следующее утверждение, описывающее зависимость от радиуса шара ρ постоянной в оценке квадрата нормы в $L_p(\mathscr{B}_\rho)$ через интеграл Дирихле и квадрат нормы в $L_2(\mathscr{E})$, $\mathscr{B}_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \rho\}$.

Следствие 2. *Для произвольной положительной постоянной c_0 и для любого показателя $p \in [1, \frac{2n}{n-2}]$ при $n \geqslant 3$ и $p \geqslant 1$ при $n = 2$ найдется такая постоянная $C = C(n, c_0, p)$, что для любого множества $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}_\rho$, мера которого не меньше $c_0\rho^n$, и для всех функций $f \in W_2^1(\mathscr{B}_1)$ справедливо неравенство*

$$\left[\rho^{-n}\int_{\mathscr{B}_\rho}|f(x)|^p\,dx\right]^{2/p} \leqslant C\left[\rho^{2-n}\int_{\mathscr{B}_\rho}|\nabla f|^2(x)\,dx + \rho^{-n}\int_{\mathscr{E}}f^2(x)\,dx\right]. \tag{9}$$

Доказательство этого утверждения очевидно: подставляя в оценку нормы в $L_p(\mathscr{B}_1)$ следствия 1 неравенство (8), имеем (9) для единичного шара; для шара произвольного радиуса неравенство (9) получается с помощью растяжения.

Замечание 4. Оценка вида (9), конечно, верна и для любой ограниченной области Q с гладкой границей. Для ее доказательства достаточно продолжить (с сохранением принадлежности W_2^1) функцию в содержащий область Q шар и применить к ней (9), взяв $\mathscr{E} \subset Q$; конечно, постоянная в полученной оценке будет зависеть не только от n, c_0 и p, но еще и от области Q.

§ 3. Обобщенные производные сложной функции

Пусть f – отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Следующее утверждение дает достаточное условие принадлежности пространству $W_2^1(Q)$ суперпозиции отображений $F = f \circ u$ для всех $u \in W_2^1(Q)$. Напомним, что область Q мы договорились считать ограниченной.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема на всей оси, а ее производная ограничена. Тогда для любой $u \in W_2^1(Q)$ сложная функция $F(x) = f(u(x))$ принадлежит $W_2^1(Q)$, а ее обобщенные производные имеют вид*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f'\bigl(u(x)\bigr)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из ограниченности производной функции f следует оценка

$$\begin{aligned}|F(x)|^2 = \bigl|f\bigl(u(x)\bigr)\bigr|^2 &= \left|f(0) + \int_0^{u(x)} f'(t)\,dt\right|^2 \\ &\leqslant 2K^2u^2(x) + 2f^2(0), \qquad K = \sup_{t\in\mathbb{R}}|f'(t)|,\end{aligned}$$

которая вместе с очевидной измеримостью $F(x)$ дает принадлежность функции F пространству $L_2(Q)$. Аналогично, функции

$$f'\bigl(u(x)\bigr)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

измеримы и их квадраты мажорируются суммируемой функцией:

$$\left|f'(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2 \leqslant K^2|\nabla u(x)|^2.$$

Следовательно, и они принадлежат $L_2(Q)$.

Пусть последовательность $\{u_k\}$ функций из $C^\infty(\overline{Q})$ сходится к функции u в $W_2^1(Q)$. Выделим из нее сходящуюся п.в. (к u) подпоследовательность; будем обозначать эту подпоследовательность также через $\{u_k\}$; заметим, что последовательности $f(u_k(x)) - f(u(x))$ и $f'(u_k(x)) - f'(u(x))$ п.в. стремятся к нулю при $k \to \infty$. А так как

$$\bigl|f\bigl(u_k(x)\bigr) - f\bigl(u(x)\bigr)\bigr|^2 \leqslant K^2|u_k(x) - u(x)|^2,$$

то по теореме Лебега последовательность гладких функций $f\circ u_k$ сходится к $f\circ u$ в $L_2(Q)$. Покажем, что и последовательности производных $(\partial f\circ u_k)/\partial x_i$ сходятся в $L_2(Q)$ к $(f'\circ u)\partial u/\partial x_i$. Действительно,

$$\| \,|(f'\circ u_k)\nabla u_k - (f'\circ u)\nabla u|\, \|_{L_2(Q)} \\ \leqslant \|\, |f'\circ u_k - f'\circ u|\, |\nabla u|\, \|_{L_2(Q)} + \|\, |f'\circ u_k|\, |\nabla u_k - \nabla u|\, \|_{L_2(Q)}.$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю в силу теоремы Лебега, так как

$$\bigl|f'\bigl(u_k(x)\bigr) - f'\bigl(u(x)\bigr)\bigr|^2 \leqslant K^2.$$

Второе слагаемое оценивается величиной $K\|\,|\nabla u_k - \nabla u|\,\|_{L_2(Q)}$, которая стремится к нулю при $k\to\infty$. Следовательно, функции $f'(u(x))\partial u/\partial x_i(x)$ являются обобщенными производными функции $F(x)$, а F является пределом в норме $W_2^1(Q)$ последовательности гладких функций.

Замечание 1. Пусть I – одно из следующих множеств: либо это отрезок $[a,b]$, либо одна из полуосей $[a,+\infty)$ или $(-\infty,b]$. Предположим, что функция u принимает значения из этого множества: $u(x)\in I$ для п.в. x из Q. Тогда, как легко видеть, для справедливости теоремы 1 достаточно потребовать, чтобы функция f была непрерывно дифференцируема на I и ее производная была ограничена на этом множестве. Для доказательства этого утверждения достаточно линейно продолжить f на всю ось.

Лемма 1. *Для любой функции u из $W_2^1(Q)$ функция $u^+(x) = \max\{u(x),0\}$ принадлежит $W_2^1(Q)$. При этом*

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) & \text{для } x : u(x) > 0 \\ 0 & \text{для } x : u(x) \leqslant 0. \end{cases} \tag{10}$$

Замечание 2. Так как

$$u^-(x) = \min\{u(x),0\} = -[(-u)^+(x)],$$
$$|u(x)| = u^+(x) - u^-(x),$$
$$\max\{u(x),v(x)\} = \bigl(u(x)-v(x)\bigr)^+ + \bigl(v(x)-u(x)\bigr)^+,$$
$$\min\{u(x),v(x)\} = -\max\{-u(x),-v(x)\},$$

то из леммы 1 вытекает принадлежность и этих функций пространству $W_2^1(Q)$, если ему принадлежат функции u и v.

Очевидно также, что и функция $u^{(a)} = (u-a)^+$ принадлежит пространству $W_2^1(Q)$ при любом $a \in \mathbb{R}$. При этом

$$\frac{\partial u^{(a)}}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) & \text{при } u(x) > a \\ 0 & \text{при } u(x) \leqslant a. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\operatorname{mes}\{x \in Q : u(x) = a,\ |\nabla u(x)| > 0\} = 0$$

при всех a.

Доказательство леммы 1. Возьмем произвольное положительное число ε и пусть

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} (t^2+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Очевидно, что функция f_ε непрерывно дифференцируема на всей оси, принимает неотрицательные значения, а ее производная имеет вид

$$f_\varepsilon'(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{(t^2+\varepsilon^2)^{1/2}} & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Отметим, что для всех $t \in \mathbb{R}$ $|f_\varepsilon'(t)| \leqslant 1$. В силу теоремы 1 при любом $\varepsilon > 0$ $f_\varepsilon(u(x)) \in W_2^1(Q)$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon\bigl(u(x)\bigr) = f_\varepsilon'\bigl(u(x)\bigr)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

Семейство функций $f_\varepsilon(u(x))$ стремится к функции $u^+(x)$ в $L_2(Q)$ при $\varepsilon \to +0$, поскольку $f_\varepsilon(u(x)) \to u^+(x)$ при $\varepsilon \to +0$ п.в. и $|f_\varepsilon(u(x)) - u^+(x)| \leqslant |u(x)|$. Также в силу теоремы Лебега производная $f_\varepsilon(u(x))$ по x_i сходится в $L_2(Q)$ к функции, стоящей в правой части формулы (10), так как

$$f_\varepsilon'\bigl(u(x)\bigr)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \quad \text{при } \varepsilon \to +0$$

в тех точках x, в которых $u(x) > 0$, и

$$f_\varepsilon'\bigl(u(x)\bigr)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to +0$$

в остальных точках, а квадрат разности этих функций оценивается квадратом модуля градиента u. Следовательно, $u^+ \in W_2^1(Q)$, а заданные формулой (10) функции являются ее обобщенными производными.

Замечание 3. Из леммы 1 немедленно следует, что в теореме 1 вместо условия гладкости функции f можно потребовать, чтобы она была кусочно гладкой, т.е. чтобы f была непрерывной, а ее производная существовала и была непрерывной всюду, кроме конечного числа точек, в которых она имеет конечные пределы слева и справа, и была ограниченной.

Докажем это утверждение для случая одной точки излома функции f. Не ограничивая общность, можно считать, что точкой излома является точка $t = 0$ (если $u \in W_2^1(Q)$, то и $u - \mathrm{const} \in W_2^1(Q)$; напомним, область Q ограничена). В этом случае $f(u(x)) = f(u^+(x)) + f(u^-(x)) - f(0)$ и в силу замечания 1 для каждого из слагаемых справедливо утверждение теоремы 1. Ясно, что с помощью того же приема доказывается утверждение и в случае нескольких точек излома.

Задачи к главе 3

Пусть $\mathscr{A}$ – σ-алгебра (σ-кольцо с единицей) подмножеств некоторого множества X, а μ – σ-аддитивная мера (конечная: $\mu(X) < \infty$) на $\mathscr{A}$ (см. [6], [7]). Отождествим множества A и B из $\mathscr{A}$, если их симметрическая разность является множеством меры нуль ($\mu(A \bigtriangleup B) = 0$), и рассмотрим метрическое пространство $\mathscr{M}$, элементами которого являются множества из $\mathscr{A}$, а расстояние $\rho(A, B) = \mu(A \bigtriangleup B)$.

Задача 1. Докажите, что метрическое пространство $\mathscr{M}$ является полным.

Рассмотрим множество μ-измеримых функций f, для которых функция $|f|^p$ суммируема (μ-интегрируема) по X (см. [6], [7]). Отождествим функции, если их значения совпадают μ-п.в. Введем на нем норму

$$\|f\|_{L_p(X;\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Будем обозначать это пространство через $L_p(X;\mu)$.

Задача 2. Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ удовлетворяют условиям задачи 1. Докажите, что пространство $L_p(X;\mu)$ банахово.

Задача 3. Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ удовлетворяют условиям задачи 1, а $\mathscr{M}$ – метрическое пространство из той же задачи. Докажите, что пространство $L_p(X;\mu)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельно метрическое пространство $\mathscr{M}$ (μ – мера со счетным базисом, см. [6]).

Пространство $L_\infty(X;\mu)$ состоит из μ-измеримых функций f, каждая из которых удовлетворяет условию: существует такая постоянная M, что $\mu\{x \in X : |f(x)| > M\} = 0$; функции считаем равными, если их значения совпадают μ-п.в. Легко видеть, что это условие эквивалентно условию ограниченности множества чисел K, для которых $\mu\{x \in X : |f(x)| > K\} > 0$. Наименьшая из таких постоянных M (равная, очевидно, точной верхней грани чисел K) называется нормой f в $L_\infty(X;\mu)$; будем обозначать ее через $\|f\|_{L_\infty(X;\mu)}$.

Задача 4. Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ удовлетворяют условиям задачи 1. Докажите, что функция f принадлежит пространству

$L_\infty(X;\mu)$ тогда и только тогда, когда она принадлежит всем пространствам $L_p(X;\mu)$, $p \geqslant 1$, и существует такая постоянная C, что для всех $p \geqslant 1$ $\|f\|_{L_p(X:\mu)} \leqslant C$. При этом $\|f\|_{L_p(X:\mu)} \to \|f\|_{L_\infty(X;\mu)}$ при $p \to \infty$.

Задача 5. Докажите справедливость следующего утверждения. Пусть $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и $\mathrm{mes}\{x \in Q : u(x) = a\} > 0$. Тогда $|\nabla u(x)| = 0$ п.в. на $\{x \in Q : u(x) = a\}$.

Задача 6. Докажите справедливость следующего утверждения. Пусть $u \in W^1_2(Q)$, а $v \in \mathring{W}^1_2(Q)$. Тогда $uv \in \mathring{W}^1_1(Q)$.

Задача 7. Докажите, что утверждение теоремы 1 § 3 остается справедливым, если от функции f потребовать непрерывность, выпуклость и ограниченность производной (которая существует всюду, кроме, быть может, счетного множества точек).

Задача 8. Приведите пример функции из $W^1_2(Q)$, значения которой нельзя так изменить на множество меры нуль, чтобы она стала непрерывной хотя бы в одной точке.

Задача 9. Приведите пример функции из $W^1_2(Q)$, значения которой нельзя так изменить на множестве меры нуль, чтобы она стала ограниченной хотя бы в каком-нибудь шаре $\mathscr{B} \subset \overline{Q}$.

Задача 10. Пусть $f \in W^1_2(Q)$, Γ – гладкая поверхность, $\Gamma \subset \overline{Q}$, а $u_0 = u\big|_\Gamma$ – след функции u на Γ (см. часть I). Докажите, что $(u_0)^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ является следом функции u^+ на Γ.

Глава 4

Разрешимость задачи Дирихле для общего линейного эллиптического уравнения второго порядка

Хорошо известно (см., например, [9], [10], [11], [12], [13], [3], [4]), что для классических решений однородного эллиптического уравнения (при некоторых условиях на коэффициенты) справедлив принцип максимума: наибольшее и наименьшее значения непрерывного в замыкании ограниченной области решения достигается на границе этой области. Аналогичное утверждение имеет место и в случае обобщенного решения. Так как мы не можем говорить о значениях обобщенного решения в точках, то в формулировке этой теоремы следует вместо наибольшего и наименьших значений говорить о существенных максимуме и минимуме. В частности, из ограниченности следа решения на границе следует ограниченность решения в области; как мы уже отмечали раньше (см. также задачу 9 в конце предыдущей главы), ограниченность не вытекает из принадлежности пространству $W_2^1(Q)$. В § 2 изучаются пространства $W_2^{-1}(Q)$ и $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$. Там же доказана теорема об изоморфизме. В § 3 будут установлены условия однозначной разрешимости задачи Дирихле.

§ 1. Принцип максимума

Рассмотрим общее линейное однородное уравнение второго порядка. Главную часть будем записывать в самосопряженной форме, что позволяет налагать менее жесткие ограничения на гладкость коэффициентов.

$$-\big(\nabla, A(x)\nabla u\big) - \big(\nabla, B(x)u\big) + \big(C(x), \nabla u\big) + c(x)u = 0, \qquad x \in Q, \tag{1_0}$$

где $A(x) = (a_{i,j}(x))$ – симметрическая, равномерно (по $x \in Q$) положительно определенная $n\times n$-матрица с измеримыми и ограниченными коэффициентами, т.е. $a_{i,j} = a_{j,i} \in L_\infty(Q)$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что для почти всех $x \in Q$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$\gamma|\xi|^2 \leqslant \big(\xi, A(x)\xi\big) \leqslant \gamma^{-1}|\xi|^2, \tag{2}$$

здесь и всюду далее под $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ понимаем скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; $(\nabla, B) = \mathrm{div}B$. Будем считать, что векторные поля B, C и скалярное поле c измеримы и ограничены в Q:

$$B(x) = \big(b_1(x), \dots, b_n(x)\big), \qquad C(x) = \big(c_1(x), \dots, c_n(x)\big),$$

где $b_i \in L_\infty(Q)$, $c_i \in L_\infty(Q)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $c \in L_\infty(Q)$.

Условия измеримости и ограниченности коэффициентов уравнения и условие эллиптичности (2) всюду далее будем предполагать, не отмечая это особо, выполненными. Условие ограниченности коэффициентов при младших членах можно ослабить (по этому поводу см. [3]).

Стоящее в левой части уравнения (1_0) выражение будем обозначать через $\mathscr{L}u$. Мы не будем сейчас описывать область определения и область значений оператора $\mathscr{L}$. Отметим только, что он не определен даже на бесконечно дифференцируемых функциях, если его образами считать регулярные (принадлежащие $L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$) функции: произведение $a_{i,j}\partial u/\partial x_j$ функции $a_{i,j}$ из $L_\infty(Q)$ на гладкую функцию $\partial u/\partial x_j$ не обязано иметь обобщенную производную. Первое слагаемое в выражении $\mathscr{L}u$ является в общем случае обобщенной функцией. Описанию возникающего здесь класса обобщенных функций посвящен § 2 этой главы; подробнее с теорией обобщенных функций можно ознакомиться, например, в книгах [10], [14], [15].

Под решением уравнения (1_0), как и в первой части, будем понимать функцию u из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, которая удовлетворяет уравнению (1_0) в смысле равенства обобщенных функций, т.е. выполняется интегральное тождество

$$\int_Q \big\{ \big(\nabla\eta(x), [A(x)\nabla u(x) + B(x)u(x)]\big) \\ + \eta(x)\big[\big(C(x), \nabla u(x)\big) + c(x)u(x)\big]\big\}\, dx = 0, \qquad (1'_0)$$

для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$; далее такие функции η будем называть пробными функциями. С помощью приближения гладкими функциями легко убедиться, что тождество ($1'_0$) выполняется для всех финитных функций η из $W^1_2(Q)$. Если же решение u, дополнительно, принадлежит пространству $W^1_2(Q)$, то ($1'_0$) имеет место для всех $\eta \in \mathring{W}^1_2(Q)$.

Напомним, что для измеримой функции g

$$\begin{aligned} \operatorname{vrai\,sup}_Q g &= \sup\big\{K : \operatorname{mes}\{x \in Q : g(x) > K\} > 0\big\} \\ &= \min\big\{M : \operatorname{mes}\{x \in Q : g(x) > M\} = 0\big\}, \\ \operatorname{vrai\,inf}_Q g &= \inf\big\{K : \operatorname{mes}\{x \in Q : g(x) < K\} > 0\big\}. \end{aligned}$$

В случае области с гладкой границей ∂Q и $g \in W^1_2(Q)$ аналогично определяется существенные точные верхняя и нижняя грани множества значений функции на ∂Q: вместо функции g нужно взять ее след на ∂Q, а вместо n-мерной меры Лебега следует использовать меру Лебега на этой $(n-1)$-мерной поверхности. Заметим, что если $m \geqslant \operatorname{vrai\,sup}_{\partial Q} g$, то след на ∂Q функции $g^{(m)}$ равен нулю (см. задачу 10, глава 3), т.е. $g^{(m)} \in \mathring{W}^1_2(Q)$. Обратное утверждение очевидно. Таким образом, для $\partial Q \in C^1$

$$g(x) \leqslant m \quad \text{на } \partial Q \quad \Leftrightarrow \quad g^{(m)} \in \mathring{W}^1_2(Q).$$

Это свойство примем за определение в случае негладкой границы.

Определение 1. Пусть $g \in W^1_2(Q)$. Будем говорить, что *$g(x) \leqslant m$ на ∂Q*, если $g^{(m)} = (g-m)^+ \in \mathring{W}^1_2(Q)$; $\operatorname{vrai\,sup}_{\partial Q} g = \inf\{m : g^{(m)} \in \mathring{W}^1_2(Q)\}$. Аналогично, *$g(x) \geqslant m$ на ∂Q*, если $(g-m)^- \in \mathring{W}^1_2(Q)$; $\operatorname{vrai\,inf}_{\in\partial Q} g = \sup\{m : (g-m)^- \in \mathring{W}^1_2(Q)\}$.

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что для любой функции $g \in W^1_2(Q)$ справедливы неравенства

$$\operatorname{vrai\,sup}_{\partial Q} g \leqslant \operatorname{vrai\,sup}_Q g \quad \text{и} \quad \operatorname{vrai\,inf}_{\partial Q} g \geqslant \operatorname{vrai\,inf}_Q g.$$

Действительно, для любого числа $M \geqslant \operatorname{vrai\,sup}_Q g$ функция $g^{(M)} = (g - M)^+$ равна нулю п.в. (по определению) и, конечно, принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$. Тем самым, $g(x) \leqslant M$ на ∂Q. Утверждение о нижних гранях доказывается, как обычно, применением доказанного утверждения о верхних гранях к функции $-g$.

Определение 2. Принадлежащая пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ функция v называется *субрешением уравнения* (1_0), если для всех неотрицательных пробных функций $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется неравенство

$$\int_Q \big[\big(\nabla\eta(x), A(x)\nabla v(x) + B(x)v(x)\big) + \eta(x)\big(\big(C(x), \nabla v(x)\big) + c(x)v(x)\big)\big]\, dx \leqslant 0. \tag{3}$$

Для краткости будем записывать (3) также в виде: $\mathscr{L}v \leqslant 0$.

Замечание 2. Приближая пробные функции гладкими, легко убедиться, что неравенство (3) выполняется для всех неотрицательных финитных функций η из $W_2^1(Q)$. Если же субрешение v, дополнительно, принадлежит пространству $W_2^1(Q)$, то (3) имеет место для всех $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, $\eta(x) \geqslant 0$ (п.в. в Q). Конечно, любое решение является субрешением.

Рассмотрим сначала простейший случай уравнения без младших членов, в котором принцип максимума доказывается совсем просто. Пусть $B(x) = 0$, $C(x) = 0$, $c(x) = 0$ п.в. в Q, т.е. уравнение (1_0) имеет вид

$$\mathscr{L}_0 u = -\big(\nabla, A(x)\nabla u\big) = 0, \qquad x \in Q. \tag{4_0}$$

Принцип максимума. *Для любого принадлежащего пространству $W_2^1(Q)$ субрешения v уравнения (4_0) справедливо равенство*

$$\operatorname{vrai\,sup}_{\partial Q} v = \operatorname{vrai\,sup}_Q v \tag{5}$$

В частности, для любого решения u уравнения (4_0), принадлежащего пространству $W_2^1(Q)$, отсюда следует справедливость равенств

$$\operatorname{vrai\,sup}_{\partial Q} u = \operatorname{vrai\,sup}_Q u \quad \text{и} \quad \operatorname{vrai\,inf}_{\partial Q} u = \operatorname{vrai\,inf}_Q u, \tag{$5'$}$$

поскольку и u и $-u$ являются субрешениями.

Доказательство. Пусть $m = \operatorname{vrai\,sup}_{\partial Q} v < +\infty$. Положим $\eta = v^{(m)} = (v-m)^+$. Так как $\eta \in \mathring{W}_2^1(Q)$ и $\eta(x) \geqslant 0$, то функцию η можно подставить в определяющее субрешение неравенство (3) (с $B(x) = 0$, $C(x) = 0$, $c(x) = 0$). А так как в силу леммы 1 § 3 предыдущей главы

$$\nabla\eta(x) = \nabla(v-m)^+(x) = \nabla(v-m)(x) = \nabla v(x)$$

для тех точек x, в которых $v(x) > m$, и $\nabla\eta(x) = 0$ при $v(x) \leqslant m$, то

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant \int_Q \bigl(\nabla\eta(x), A(x)\nabla v(x)\bigr)\,dx \\
&= \int_{\{x:v(x)>m\}} \bigl(\nabla v^{(m)}(x), A(x)\nabla v(x)\bigr)\,dx \\
&= \int_Q \bigl(\nabla v^{(m)}(x), A(x)\nabla v^{(m)}(x)\bigr)\,dx.
\end{aligned}$$

Откуда с помощью (2) и неравенства Стеклова (напомним, что $v^{(m)} \in \mathring{W}_2^1(Q)$):

$$\int_Q [v^{(m)}(x)]^2\,dx \leqslant \mathrm{const}\int_Q |\nabla v^{(m)}(x)|^2\,dx$$

получаем, что $v^{(m)}(x) = 0$ (п.в.), т.е. $\operatorname{vrai\,sup}_Q v \leqslant m$. Вместе с замечанием 1 это дает доказываемое равенство (5).

Рассмотрим теперь случай общего уравнения (1_0). Пусть сначала коэффициенты являются гладкими функциями. Тогда уравнение (1_0) можно переписать в виде

$$-\bigl(\nabla, A(x)\nabla u\bigr) + \bigl(C(x) - B(x), \nabla u\bigr) + \bigl[c(x) - \bigl(\nabla, B(x)\bigr)\bigr]u = 0$$

и для справедливости принципа максимума следует потребовать неотрицательность коэффициента при u:

$$c(x) - \bigl(\nabla, B(x)\bigr) \geqslant 0 \quad \text{для} \ \in Q. \tag{6'}$$

Ясно, что в общем случае условие должно быть таким, чтобы оно переходило в (6′), если коэффициенты гладкие. Т.е. нужно записать (6′) в виде, не использующем производные B. Для этого заметим, что ($6'$) эквивалентно (для $B \in C^1(\overline{Q}\,)$) выполнению неравенства

$$\int_Q \big[c(x)\eta(x) + \big(B(x), \nabla\eta(x)\big)\big]\,dx \geqslant 0 \tag{6}$$

для всех неотрицательных $\eta \in C_0^\infty(Q)$.

В таком виде это условие обеспечивает справедливость принципа максимума и в случае измеримых и ограниченных коэффициентов уравнения.

Пусть теперь коэффициенты уравнения (1_0) измеримы и ограничены, B и c удовлетворяют условию (6). Отметим, что в силу плотности $C_0^\infty(Q)$ в $\mathring{W}_1^1(Q)$ это неравенство справедливо для всех неотрицательных $\eta \in \mathring{W}_1^1(Q)$.

Теорема 1 (Принцип максимума). *Пусть выполнено условие* (6). *Тогда для любого субрешения v уравнения* (1_0), *принадлежащего пространству $W_2^1(Q)$, справедливо равенство* (5).

Доказательство. Предположим, что доказываемое утверждение неверно, т.е. $m = \operatorname{vrai\,sup}_{\partial Q} v < \operatorname{vrai\,sup}_Q v = M$ ($m < +\infty$, $M \leqslant +\infty$). Возьмем произвольное число $l \in [m, M)$ и положим $\eta = v^{(l)}$. Подставляя такую пробную функцию в (3), получаем

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \int_Q \big[&\big(\nabla v^{(l)}(x), A(x)\nabla v(x) + B(x)v(x)\big) \\ &+ v^{(l)}(x)\big(\big(C(x), \nabla v(x)\big) + c(x)v(x)\big)\big]\,dx \\ = \int_Q \big[&\big(\nabla v^{(l)}(x), A(x)\nabla v^{(l)}(x)\big) + \big(B(x), \nabla[v(x)v^{(l)}(x)]\big) \\ &+ c(x)v(x)v^{(l)}(x) + v^{(l)}(x)\big(C(x) - B(x), \nabla v(x)\big)\big]\,dx \end{aligned}$$

Откуда, в силу (2) и (6) (неотрицательная функция $v(x)v^{(l)}(x)$ принадлежит $\mathring{W}_1^1(Q)$, задача 6, глава 3),

$$\begin{aligned} \gamma\int_Q |\nabla v^{(l)}(x)|^2\,dx &\leqslant \int_Q \big(\nabla v^{(l)}(x), A(x)\nabla v^{(l)}(x)\big)\,dx \\ &\leqslant \left|\int_Q \big(C(x) - B(x), \nabla v(x)\big)v^{(l)}(x)\,dx\right|. \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что если бы мы рассматривали случай уравнения с самосопряженным оператором ($B = C$), то из последних неравенств следовало бы, что $v^{(l)} = 0$ и утверждение было бы доказано. Продолжим доказательство в общем случае.

Пусть $\mathscr{E}_l = \{x \in Q : v(x) > l$ и $|\nabla v(x)| > 0\}$. Возьмем некоторое $p \in (2, \frac{2n}{n-2})$ и оценим правую часть (7) с помощью неравенства Гёльдера и теоремы вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ в $L_p(Q)$ (см. замечание 1 § 2 главы 3)

$$\begin{aligned}
&\left|\int_Q \big(C(x) - B(x), \nabla v(x)\big) v^{(l)}(x)\,dx\right| \\
&\qquad = \left|\int_{\mathscr{E}_l} v^{(l)}(x)\big(C(x) - B(x), \nabla v^{(l)}(x)\big)\,dx\right| \\
&\qquad \leqslant \|B - C\|_{L_\infty(Q)}\,\|v^{(l)}\|_{L_2(\mathscr{E}_l)}\,\|\,|\nabla v^{(l)}|\,\|_{L_2(Q)} \\
&\qquad \leqslant \|B - C\|_{L_\infty(Q)}\,[\operatorname{mes}\mathscr{E}_l]^{1-\frac{1}{p}}\,\|v^{(l)}\|_{L_p(Q)}\,\|\,|\nabla v^{(l)}|\,\|_{L_2(Q)} \\
&\qquad \leqslant \mathrm{const}\,[\operatorname{mes}\mathscr{E}_l]^{1-\frac{1}{p}}\,\|\,|\nabla v^{(l)}|\,\|^2_{L_2(Q)},
\end{aligned}$$

где положительная постоянная (const) зависит только от n, p, $\|B - C\|_{L_\infty(Q)}$ и меры области Q (не зависит от l!). Подставляя полученную оценку в (7), имеем

$$\operatorname{mes}\mathscr{E}_l \geqslant \mathrm{const} > 0 \quad \text{для всех } l \in [m, M).$$

А так как оценивающая снизу меру множества $\mathscr{E}_l$ постоянная не зависит от l, то, устремляя l к $M = \operatorname{vrai\,sup}_Q v$, получаем, что $M < +\infty$ и $\operatorname{mes}\{x \in Q : v(x) = M,\ |\nabla v(x)| > 0\} > 0$. Но это невозможно (см. замечание 2 § 3 главы 3). Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теоремы 1 немедленно вытекает

Следствие 1. *Для любого принадлежащего пространству* $W_2^1(Q)$ *решения уравнения* (1_0) *справедливы равенства* ($5'$).

§ 2. Пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$ и $W_2^{-1}(Q)$

В первой части была установлена (см. § 2 главы 2) однозначная разрешимость задачи Дирихле для уравнения $\mathscr{L}u = g$ в случае $B = C = 0$. При этом отмечалось, что на правую часть уравнения g можно налагать более слабые условия, чем ее принадлежность пространству $L_2(Q)$. На этом вопросе мы остановимся подробнее в этом параграфе. Будет получено описание множество всех правых частей g, для которых существует решение задачи Дирихле с однородным граничным условием в случае простейшего уравнения $\mathscr{L}_0 u = g$. Тем самым будет дано описание области значений оператора $\mathscr{L}_0$ с областью определения $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.

Рассмотрим задачу Дирихле с однородным граничным условием

$$u\,|_{\partial Q} = 0 \tag{8_0}$$

для простейшего эллиптического уравнения второго порядка

$$\mathscr{L}_0 u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = g(x), \qquad x \in Q. \tag{4}$$

Напомним, что мы считаем коэффициенты $a_{i,j} = a_{j,i}$ уравнения измеримыми ограниченными функциями. Уравнение (4) равномерно эллиптично в Q, т.е. выполнено условие (2).

Напомним также, что для $g \in L_2(Q)$ обобщенным решением рассматриваемой задачи Дирихле (задачи (4), (8_0)) называется функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \big(\nabla\eta(x), A(x)\nabla u(x)\big)\,dx = \int_Q \eta(x)g(x)\,dx$$

для всех $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.

Так как левая часть этого равенства задает эквивалентное скалярное произведение

$$(\eta, u)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} = \int_Q \big(\nabla\eta(x), A(x)\nabla u(x)\big)\,dx \tag{9}$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ (см. теорему 2 § 9 главы 1), то интегральное тождество можно переписать в виде

$$(\eta, u)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} = \int_Q \eta(x)g(x)\,dx. \tag{10}$$

Однозначная разрешимость (существование и единственность решения) задачи Дирихле (4), (8_0) немедленно вытекает из теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала скалярным произведением, поскольку правая часть (10) является линейным непрерывным функционалом (η – его аргумент) на пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$.

Ясно, что множество правых частей g уравнения (4), для которых существует решение рассматриваемой задачи, является множеством всех линейных непрерывных функционалов на $\mathring{W}_2^1(Q)$; причем действие функционалов следует реализовывать, как это принято в теории обобщенных функций, исходя из скалярного произведения в $L_2(Q)$.

Легко видеть, что условие принадлежности правой части g пространству $L_2(Q)$, достаточное для ограниченности задаваемого ей функционала l_g,

$$\langle l_g, \eta\rangle = \int_Q g(x)\eta(x)\,dx, \tag{11}$$

не является необходимым; $\langle l_g, \eta\rangle$ – значение функционала l_g на элементе η пространства $\mathring{W}_2^1(Q)$. Например, его можно ослабить, потребовав принадлежность g пространству $L_{\frac{2n}{n+2}}(Q)$ при $n \geqslant 3$ и пространству $L_p(Q)$ с каким-нибудь $p > 1$ при $n = 2$, задачи 1 и 2 этой главы. Кроме того, линейный непрерывный функционал на $\mathring{W}_2^1(Q)$ может задаваться и нерегулярной обобщенной функцией: определенный равенством

$$\langle l_F, \eta\rangle = -\int_Q \big(\nabla\eta(x), F(x)\big)\,dx, \tag{12}$$

где $F = (f_1, \ldots, f_n) \in [L_2(Q)]^n$, линейный функционал l_F также является ограниченным функционалом на $\mathring{W}_2^1(Q)$, а его норма не превосходит нормы $|F|$ в $L_2(Q)$. Действительно, для всех $\eta \in \mathring{W}_2^1(Q)$

$$|\langle l_F, \eta\rangle| \leqslant \|\,|\nabla\eta|\,\|_{L_2(Q)}\,\|\,|F|\,\|_{L_2(Q)} = \|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)}\,\|\,|F|\,\|_{L_2(Q)};$$

$$(\eta, u)_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \int_Q \big(\nabla\eta(x), \nabla u(x)\big)\,dx, \qquad \|\eta\|^2_{\mathring{W}_2^1(Q)} = (\eta, \eta)_{\mathring{W}_2^1(Q)}. \tag{13}$$

Функционал l_F с $f_i = f \in L_2(Q)$ и $f_j = 0$ при $j \neq i$, будем называть *производной функции* f *по переменной* x_i и обозначать $\partial f/\partial x_i$; отметим, что так определенная производная не является обобщенной производной, мы не требуем ее регулярность (принадлежность $L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$). В общем случае задаваемый формулой (11) функционал l_F будем называть дивергенцией векторного поля F и обозначать $(\nabla\ , \ F) = \operatorname{div} F$.

Из ограниченности функционала $l_F = \operatorname{div} F$, $F \in [L_2(Q)]^n$ немедленно следует однозначная разрешимость задачи (4), (8_0) и в случае $g = \operatorname{div} F$; под решением такой задачи естественно понимать функцию u из $\mathring{W}_2^1(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \big(\nabla\eta(x), A(x)\nabla u(x)\big)\, dx = \int_Q \big(\nabla\eta(x), F(x)\big)\ dx \tag{14}$$

для всех $\eta \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Множество всех обобщенных функций g из $\mathscr{D}'(Q)$ (g – линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathscr{D}(Q)$), для которых справедлива оценка

$$|\langle g, \eta\rangle| \leqslant C\|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} \quad \text{для всех } \eta \in C_0^\infty(Q) \tag{15}$$

с некоторой постоянной $C = C(g)$, будем называть *пространством* $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$; $\langle g, \eta\rangle$ – значение обобщенной функции g на основной функции η. Очевидно, что каждая такая обобщенная функция продолжается по непрерывности (напомним, что по определению $C_0^\infty(Q)$ всюду плотно в $\mathring{W}_2^1(Q)$) до ограниченного функционала на $\mathring{W}_2^1(Q)$. Наименьшая из постоянных C, с которыми справедливо (15), является нормой этого функционала; будем называть ее нормой g в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ и обозначать $\|g\|_{\mathring{W}_2^{-1}(Q)}$,

$$\|g\|_{\mathring{W}_2^{-1}(Q)} = \sup_{\eta\in\mathring{W}_2^1(Q),\eta\neq 0} \frac{|\langle g, \eta\rangle|}{\|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)}}\,. \tag{16}$$

А так как на $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ любой линейный ограниченный функционал можно рассматривать, как удовлетворяющую условию (15) обобщенную функцию (сужение этого функционала на $C_0^\infty(Q)$; из (15), очевидно, следует непрерывность этого сужения в топологии $\mathscr{D}(Q)$), то введенное пространство $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ является сопряженным к пространству $\mathring{W}_2^1(Q)$, а следовательно, гильбертовым пространством.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (4), (8_0) с $g \in \mathring{W}_2^{-1}(Q)$ будем называть функцию из $\mathring{W}_2^1(Q)$, которая удовлетворяет тождеству

$$\int_Q \big(\nabla\eta(x), A(x)\nabla u(x)\big)\,dx = \langle \eta, g\rangle \quad \text{для всех } \eta \in \mathring{W}_2^1(Q). \qquad (14')$$

Тождество ($14'$) – это реализация функционала η в гильбертовом пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ в виде скалярного произведения (9). Поэтому и в этом случае обобщенное решение существует для любой $g \in \mathring{W}_2^{-1}(Q)$ и единственно.

Следующая теорема дает общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathring{W}_2^1(Q)$.

Теорема 1.

$$g \in \mathring{W}_2^{-1}(Q) \quad \Leftrightarrow \quad g = -\operatorname{div} F,$$

где $F \in [L_2(Q)]^n$.

Доказательство. То, что заданный формулой (12) с $F \in [L_2(Q)]^n$ линейный функционал l_F является ограниченным, т.е. является элементом $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$, доказано выше. Докажем обратное утверждение. Пусть g – произвольный линейный ограниченный функционал на $\mathring{W}_2^1(Q)$. Обозначим через w такой элемент пространства $\mathring{W}_2^1(Q)$, который реализует функционал g в скалярном произведении (13), т.е.

$$\langle g, \eta\rangle = \int_Q \big(\nabla w(x), \nabla\eta(x)\big)\,dx, \quad \text{для всех } \eta \in \mathring{W}_2^1(Q)$$

(w – решение задачи Дирихле с однородным граничным условием для уравнения Пуассона $-\triangle\, w = g$). А последнее тождество и означает, что $g = -\operatorname{div} F$ с $F = \nabla w \in [L_2(Q)]^n$.

Замечание 1. На самом деле доказано более сильное утверждение: *для любого* $g \in \mathring{W}_2^{-1}(Q)$ *существует и единственно такое потенциальное векторное поле* $F_g = \nabla w_g$ *с принадлежащим пространству* $\mathring{W}_2^1(Q)$ *потенциалом* w_g, *что* $g = -\operatorname{div} F_g$; *при этом*

$$(g,h)_{\mathring{W}_2^{-1}(Q)} = (F_g, F_h)_{[L_2(Q)]^n}.$$

Определим теперь оператор $\mathscr{L}_0\colon \mathring{W}_2^1(Q) \to \mathring{W}_2^{-1}(Q)$ следующим правилом: для каждой функции u из $\mathring{W}_2^1(Q)$ $\mathscr{L}_0 u = -\operatorname{div} F$, где $F = A\nabla\ u \in [L_2(Q)]^n$. Оценка

$$\|\mathscr{L}_0 u\|_{\mathring{W}_2^{-1}(Q)} = \|\operatorname{div} F\|_{\mathring{W}_2^{-1}(Q)} = \sup_{\eta\in\mathring{W}_2^1(Q),\eta\neq 0} \frac{|\langle \operatorname{div} F, \eta\rangle|}{\|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)}}$$
$$\leqslant \|\,|F|\,\|_{L_2(Q)} = \|\,|A\nabla u|\,\|_{L_2(Q)} \leqslant C\big(\|a_{i,j}\|_{L_\infty(Q)}\big)\|u\|_{\mathring{W}_2^1(Q)}$$

доказывает ограниченность этого оператора. Область значений оператора $\mathscr{L}_0$ совпадает со всем пространством $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$, поскольку решение задачи (4), (8_0) существует для всех $g \in \mathring{W}_2^{-1}(Q)$. А так как решение этой задачи единственно, то оператор $\mathscr{L}_0$ обратим. Обратный оператор (он ставит в соответствие каждому элементу g из $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ решение $u = \mathscr{L}_0^{-1} g$ задачи Дирихле (4), (8_0) с правой частью g) будем обозначать символом $\mathscr{L}_0^{-1}$. Более того, из ($14'$) следует также равенство

$$\|u\|'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \|\mathscr{L}_0 u\|_{\mathring{W}_2^{-1}(Q)} \quad \text{для любого } u \in \mathring{W}_2^1(Q), \tag{17}$$

где $\|\cdot\|'_{\mathring{W}_2^1(Q)}$ – норма в $\mathring{W}_2^1(Q)$, порожденная скалярным произведением (9). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Отображение $\mathscr{L}_0\colon \mathring{W}_2^1(Q) \mapsto \mathring{W}_2^{-1}(Q)$ является изоморфизмом гильбертовых пространств $\mathring{W}_2^1(Q)$ и $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$.*

Напомним, что каждая функция g из $L_2(Q)$ задает функционал $l_g \in \mathring{W}_2^{-1}(Q)$ равенством (11); при этом $\|l_g\|_{\mathring{W}_2^{-1}(Q)} \leqslant \|g\|_{L_2(Q)}$. В силу плотности множества функций из $\mathring{W}_2^1(Q)$ в пространстве $L_2(Q)$ каждый такой функционал задается единственной функцией. Отождествляя такие функционалы l_g с задающими их функциями g, получаем вложение $L_2(Q)$ в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$.

Итак, мы имеем вложения

$$\mathring{W}_2^1(Q) \subset L_2(Q) \subset \mathring{W}_2^{-1}(Q) = \mathscr{L}_0 \mathring{W}_2^1(Q).$$

Причем первое из них ($\mathring{W}_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$) вполне непрерывно (теорема 1 § 6 главы 1). Докажем, что и второе вложение вполне непрерывно.

Теорема 3. *Оператор вложения $L_2(Q)$ в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Нужно доказать, что единичный шар в $L_2(Q)$ является компактным множеством в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ (тогда, очевидно, и любое ограниченное в $L_2(Q)$ множество будет компактным в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$).

Возьмем произвольную последовательность $\{f_k\}$ элементов единичного шара в $L_2(Q)$: $\|f_k\|_{L_2(Q)} \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу слабой компактности ограниченного множества в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не загромождать формулы индексами, обозначим эту подпоследовательность снова через $\{f_k\}$. Ее слабый предел обозначим через $f \in L_2(Q)$:

$$(f_k - f, \eta)_{L_2(Q)} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty \quad \text{для всех } \eta \in L_2(Q). \tag{18}$$

Докажем, что

$$\|f - f_k\|_{\mathring{W}_2^{-1}(Q)} = \sup_{\|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)}=1} |(f - f_k, \eta)_{L_2(Q)}| \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{19}$$

(сходимость равномерна по единичной сфере в $\mathring{W}_2^1(Q)$).

Предположим, что (19) не верно, т.е. $\exists\, \varepsilon > 0$ $\forall N$ $\exists\, k > N$ и $\exists\, \eta_k \in \mathring{W}_2^1(Q)$, $\|\eta_k\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} = 1$, для которых $|(f - f_k, \eta_k)_{L_2(Q)}| \geqslant \varepsilon$. Т.е. найдется подпоследовательность, снова обозначим ее $\{f_k\}$, и лежащая на единичной сфере в $\mathring{W}_2^1(Q)$, а следовательно, ограниченная в $\mathring{W}_2^1(Q)$ последовательность $\{\eta_k\}$, для которых

$$|(f - f_k, \eta_k)_{L_2(Q)}| \geqslant \varepsilon. \tag{20}$$

В силу компактности вложения $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$ из последовательности $\{\eta_k\}$ можно выделить сходящуюся (сильно) в $L_2(Q)$ подпоследовательность $\{\eta_{k_m}\}$:

$$\eta_{k_m} \to \eta \quad \text{в } L_2(Q) \quad \text{при } m \to \infty. \tag{21}$$

Возьмем соответствующую ей подпоследовательность $\{f_{k_m}\}$. Для них в силу (20), (18) и (21) имеем

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon &\leqslant |(f - f_{k_m}, \eta_{k_m})_{L_2(Q)}| \\ &\leqslant |(f_{k_m}, \eta - \eta_{k_m})_{L_2(Q)}| + |(f - f_{k_m}, \eta)_{L_2(Q)}| + |(f, \eta_{k_m} - \eta)_{L_2(Q)}| \\ &\leqslant 2\|\eta - \eta_{k_m}\|_{L_2(Q)} + |(f - f_{k_m}, \eta)_{L_2(Q)}| \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает (19), а следовательно, и теорему 3.

Кратко остановимся на сопряженном к $W_2^1(Q)$ пространстве $W_2^{-1}(Q)$. Так как $\mathring{W}_2^1(Q)$ является подпространством пространства $W_2^1(Q)$, то согласно теореме Хана–Банаха каждый линейный непрерывный функционал на $\mathring{W}_2^1(Q)$ может быть продолжен на $W_2^1(Q)$ с сохранением нормы. Например, можно доопределить этот функционал нулем на ортогональном дополнении к $\mathring{W}_2^1(Q)$. Продолжение функционала, конечно, не единственно; произвол в выборе продолжения определяется пространством линейных ограниченных функционалов на ортогональном дополнении к $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $W_2^1(Q)$.

Пространство $W_2^{-1}(Q)$ естественно рассматривать как множество всех обобщенных функций g из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ с носителями в $\overline{Q}$, для которых справедлива оценка

$$|\langle g, \eta\rangle| \leqslant C\|\eta\|_{W_2^1(Q)} \quad \text{для всех } \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{15$'$}$$

с некоторой постоянной $C = C(g)$. Действительно, если g – линейный непрерывный функционал на $W_2^1(Q)$, то он, конечно, определен и на всех $\eta \in C^\infty(\,\overline{Q}\,) \subset W_2^1(Q)$. Следовательно, его можно отождествить с обобщенной функцией из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ с носителем в $\overline{Q}$, для которой справедлива оценка (15$'$): каждой функции $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ставится в соответствие значение функционала g на сужении этой функции на $\overline{Q}$. Если же g – удовлетворяющая (15$'$) обобщенная функция, то этот функционал распространяется по непрерывности на все пространство $W_2^1(Q)$; напомним, что множество $C^\infty(\,\overline{Q}\,)$ (множество сужений на $\overline{Q}$ функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) всюду плотно в $W_2^1(Q)$.

Наименьшую из постоянных C, с которыми справедливо (15$'$) будем называть нормой g в $W_2^{-1}(Q)$ и обозначать $\|g\|_{W_2^{-1}(Q)}$:

$$\|g\|_{W_2^{-1}(Q)} = \sup_{\eta\in W_2^1(Q),\eta\neq 0} \frac{|\langle g, \eta\rangle|}{\|\eta\|_{W_2^1(Q)}}. \tag{16$'$}$$

Легко видеть, что формулы (11) с $g \in L_2(Q)$ и (12) с $F \in [L_2(Q)]^n$ определяют ограниченные функционалы и на $W_2^1(Q)$. Однако, в отличии от пространства $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ не все элементы $W_2^{-1}(Q)$ задаются формулой (12). Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что все заданные формулой (12) функционалы имеют равное нулю значение на функции $\eta = \text{const} \in W_2^1(Q)$ (область Q мы считаем ограниченной). Общий вид линейного непрерывного функционала на $W_2^1(Q)$ дает следующая

Теорема 2′.

$$g \in W_2^{-1}(Q) \quad \Leftrightarrow \quad g = -\operatorname{div} F + f,$$

где $F \in [L_2(Q)]^n$, *а* $f \in L_2(Q)$.

Доказательство. То, что заданные формулами (12) с $F \in [L_2(Q)]^n$ и (11) с $f \in L_2(Q)$ линейные функционалы l_F и l_f является ограниченными, т.е. являются элементами $W_2^{-1}(Q)$, доказано выше. Докажем обратное утверждение. Пусть g – произвольный линейный ограниченный функционал на $W_2^1(Q)$. Обозначим через w такой элемент пространства $W_2^1(Q)$, который реализует функционал g в скалярном произведении

$$(\eta, w)_{W_2^1(Q)} = \int_Q \big[\big(\nabla\eta(x), \nabla w(x)\big) + \eta w\big]\, dx, \tag{13′}$$

т.е.

$$\langle g, \eta\rangle = \int_Q \big[\big(\nabla w(x), \nabla\eta(x)\big) + \eta w\big]\, dx, \quad \text{для всех } \eta \in W_2^1(Q)$$

(w – решение задачи Неймана с однородным граничным условием для уравнения $-\triangle w + w = g$). Последнее тождество означает, что функционал $g = -\operatorname{div} F + l_f$ с $F = \nabla w \in [L_2(Q)]^n$ и $f = w \in L_2(Q)$.

§ 3. Теоремы об однозначной разрешимости задачи Дирихле

В этом параграфе мы докажем две теоремы об однозначной разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в произвольной ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$. При этом правую часть уравнения будем брать из пространства $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$. В силу теоремы 1 § 2 этой главы ее можно записать в виде $-\operatorname{div} F$ с $F \in [L_2(Q)]^n$.

Рассмотрим задачу Дирихле для общего линейного уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} &-\big(\nabla, A(x)\nabla u\big) - \big(\nabla, B(x)u\big) \\ &\qquad + \big(C(x), \nabla u\big) + c(x)u = -\operatorname{div} F(x), \qquad x \in Q, \end{aligned} \tag{1}$$

$$u\,|_{\partial Q} = \varphi. \tag{8}$$

Здесь, как и выше, $A(x) = (a_{i,j}(x))$ – симметрическая, равномерно (по $x \in Q$) положительно определенная $n \times n$-матрица с измеримыми и ограниченными коэффициентами, векторные поля B, C и скалярное поле c измеримы и ограничены в Q. Граничную функцию φ будем считать определенной в области Q и принадлежащей пространству $W_2^1(Q)$. Под решением рассматриваемой задачи (1), (8) будем понимать функцию u из $W_2^1(Q)$, которая удовлетворяет уравнению (1) в смысле равенства обобщенных функций, т.е.

$$\begin{aligned} &\int_Q \big\{\big(\nabla\eta(x), [A(x)\nabla u(x) + B(x)u(x)]\big) \\ &\qquad + \eta(x)\big[\big(C(x), \nabla u(x)\big) + c(x)u(x)\big]\big\}\,dx = \int_Q \big(\nabla\eta(x), F(x)\big)\,dx \end{aligned} \tag{1$'$}$$

для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$, и удовлетворяет граничному условию (8) в следующем смысле:

$$u - \varphi \in \mathring{W}_2^1(Q). \tag{8$'$}$$

В случае области с гладкой границей условие (8′) эквивалентно условию (8), понимаемому в обычном смысле: следы на ∂Q функций u и φ совпадают. Отметим также, что интегральное тождество (1′) выполняется для всех η из $\mathring{W}_2^1(Q)$.

Как и в § 2 главы 2 первой части курса сведем задачу к случаю однородных краевых условий: функция $v = u - \varphi$ принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(Q)$ и удовлетворяет уравнению

$$- \big(\nabla, A(x)\nabla v\big) - \big(\nabla, B(x)v\big) \\ + \big(C(x), \nabla v\big) + c(x)v = g(x) - \operatorname{div} G(x), \qquad x \in Q, \tag{22}$$

в котором

$$g = \big(C(x), \nabla\varphi\big) + c(x)\varphi \in L_2(Q),$$
$$G = F(x) + A(x)\nabla\varphi + B(x)\varphi \in [L_2(Q)]^n.$$

Отметим очевидные оценки

$$\|g\|_{L_2(Q)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi\|_{W_2^1(Q)}, \tag{23}$$

$$\|G\|_{[L_2(Q)]^n} \leqslant \mathrm{const}\,\big[\,\|F\|_{[L_2(Q)]^n} + \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}\big], \tag{24}$$

в которых постоянные зависят только от норм в $L_\infty(Q)$ коэффициентов уравнения.

Перепишем изучаемую задачу в виде $\mathscr{L}v = g - \operatorname{div} G$, где оператор $\mathscr{L}$, действующий из $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$, определен равенством

$$\mathscr{L}w = -\operatorname{div}[A(x)\nabla w + B(x)w] + \big(C(x), \nabla w\big) + c(x)w \in \mathring{W}_2^{-1}(Q)$$

для всех $w \in \mathring{W}_2^1(Q)$, а $g - \operatorname{div} G \in \mathring{W}_2^{-1}(Q)$. Так как осуществляемое оператором $\mathscr{L}_0^{-1}$ отображение пространства $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ на $\mathring{W}_2^1(Q)$ является изоморфизмом, то задача (22), (8) эквивалентна следующему уравнению в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$

$$v + \mathscr{B}_1 v + \mathscr{B}_2 v + \mathscr{B}_3 v = h, \tag{25}$$

в котором операторы $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ и $\mathscr{B}_3$ (действующие в $\mathring{W}_2^1(Q)$) определены равенствами

$$\mathscr{B}_1 w = -\mathscr{L}_0^{-1}\operatorname{div}(Bw), \tag{26_1}$$

$$\mathscr{B}_2 w = \mathscr{L}_0^{-1}(C, \nabla w), \tag{26_2}$$

$$\mathscr{B}_3 w = \mathscr{L}_0^{-1}(cw), \tag{26_3}$$

а $h = \mathscr{L}_0^{-1}(g - \operatorname{div} G)$. В силу (17), (23) и (24) имеем оценку

$$\|h\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} \leqslant \mathrm{const}\,\big[\,\|F\|_{[L_2(Q)]^n} + \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}\big] \tag{27}$$

для всех $F \in [L_2(Q)]^n$ и всех $\varphi \in W_2^1(Q)$, в которой постоянная зависит только от постоянной эллиптичности γ и норм коэффициентов в $L_\infty(Q)$.

Лемма. *Операторы $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ и $\mathscr{B}_3$ вполне непрерывны.*

Доказательство. По теореме 1 § 6 главы 1 (теорема о компактности вложения $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$) любое ограниченное множество в $\mathring{W}_2^1(Q)$ компактно в $L_2(Q)$. Оператор умножения на функцию $B \in L_\infty(Q)$, очевидно, ограничен в $L_2(Q)$, оператор div, как доказано в § 2, ограничен из $L_2(Q)$ в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$, а оператор $\mathscr{L}^{-1}$ является ограниченным оператором из $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ в $\mathring{W}_2^1(Q)$ (теорема 2 § 2 этой главы). Поэтому оператор $\mathscr{B}_1$ переводит ограниченные множества в компактные.

Столь же просто доказывается полная непрерывность оператора $\mathscr{B}_2$. Оператор $w \mapsto (C, \nabla w)$ ограничен из $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$. А так как вложение $L_2(Q)$ в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ вполне непрерывно (теорема 3 § 2), то этот оператор переводит каждое ограниченное множество пространства $\mathring{W}_2^1(Q)$ в компактное множество в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$. Полная непрерывность $\mathscr{B}_2$ теперь немедленно следует из ограниченности оператора $\mathscr{L}^{-1}$ из $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ в $\mathring{W}_2^1(Q)$. Утверждение о полной непрерывности оператора $\mathscr{B}_3$ очевидно.

Итак, мы свели (как и в первой части) задачу Дирихле к операторному уравнению (25) с вполне непрерывным оператором $\mathscr{B}_1+\mathscr{B}_2+\mathscr{B}_3$ в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$. В силу теорем Фредгольма для разрешимости такого уравнения необходима и достаточна ортогональность правой части h уравнения (25) подпространству решений сопряженной однородной задачи. В частности, если решение (25) единственно (тогда однородная сопряженная задача имеет только тривиальное решение), то оно существует для всех $h \in \mathring{W}_2^1(Q)$. При этом для всех $h \in \mathring{W}_2^1(Q)$ справедлива оценка

$$\|v\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} \leqslant \mathrm{const}\, \|h\|_{\mathring{W}_2^1(Q)}$$

с зависящей только от коэффициентов уравнения постоянной. Из нее и (27) следует оценка

$$\|u\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} \leqslant \mathrm{const}\left[\, \|F\|_{[L_2(Q)]^n} + \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}\right] \tag{28}$$

для всех $F \in [L_2(Q)]^n$ и $\varphi \in W_2^1(Q)$.

Таким образом, если доказать единственность решения задачи (1), (8), то получим ее разрешимость для всех $F \in [L_2(Q)]^n$, $\varphi \in W_2^1(Q)$, а также справедливость оценки (28). Единственность решения немедленно вытекает из принципа максимума (теорема 1 § 1 главы 4, см. следствие 1 из этой теоремы). Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условию*

$$\int_Q \big[c(x)\eta(x) + \big(B(x), \nabla\eta(x)\big)\big]\, dx \geqslant 0$$

для всех неотрицательных функций η *из* $C_0^\infty(Q)$. *Тогда для любых* $F \in [L_2(Q)]^n$ *и* $\varphi \in W_2^1(Q)$ *существует решение задачи* (1), (8). *Это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} \leqslant \text{const}\, \big[\, \|F\|_{[L_2(Q)]^n} + \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}\big]$$

с независящей от F *и* φ *постоянной.*

Другое достаточное условие однозначной разрешимости дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условию*

$$\int_Q \left[c(x)\eta(x) + \frac{1}{2}\big(B(x) + C(x), \nabla\eta(x)\big)\right] dx \geqslant 0 \tag{29}$$

для всех неотрицательных функций η *из* $C_0^\infty(Q)$. *Тогда для любых* $F \in [L_2(Q)]^n$ *и* $\varphi \in W_2^1(Q)$ *существует решение задачи* (1), (8). *Это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} \leqslant \text{const}\, \big[\, \|F\|_{[L_2(Q)]^n} + \|\varphi\|_{W_2^1(Q)}\big]$$

с независящей от F *и* φ *постоянной.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что неравенство (29) справедливо для всех $\eta \in \mathring{W}_1^1(Q)$. Для доказательства этого факта достаточно приблизить произвольную функцию η, принадлежащую $\mathring{W}_1^1(Q)$, функциями из $C_0^\infty(Q)$; напомним, что по принятому в этой части определению множество бесконечно дифференцируемых и финитных в Q функций всюду плотно во всех соболевских пространствах.

Пусть u – решение однородной задачи (1_0), (8_0), т.е. $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству ($1_0'$) для всех пробных функций η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$. Подставляя в это тождество $\eta = u$, получим

$$\begin{aligned}
0 = \int_Q \Big\{ \big(\nabla u(x), [A(x)\nabla u(x) + B(x)u(x)]\big) \\
+ u(x)\big[\big(C(x), \nabla u(x)\big) + c(x)u(x)\big]\Big\}\, dx \\
= \int_Q \big(\nabla u(x), A(x)\nabla u(x)\big)\, dx \\
+ \int_Q \left[\frac{1}{2}\big(B(x) + C(x), \nabla u^2(x)\big) + c(x)u^2(x)\right] dx.
\end{aligned}$$

Так как согласно условию (29) (с $\eta = u^2 \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(Q)$) второе слагаемое в правой части последнего равенства неотрицательно, то

$$\int_Q \big(\nabla u(x), A(x)\nabla u(x)\big)\, dx \leqslant 0.$$

Откуда в силу (2) $u = 0$, что и доказывает единственность решения.

Задачи к главе 4

Задача 1. Пусть Q – область $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, а $g \in L_{\frac{2n}{n+2}}(Q)$. Докажите, что определенный формулой

$$\langle l_g, \eta\rangle = \int_Q \eta(x)g(x)\, dx$$

функционал l_g является линейным непрерывным функционалом на пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.

Задача 2. Пусть $g \in L_{\frac{2n}{n+2}}(Q)$, а Q – ограниченная область $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, с гладкой границей. Докажите, что определенный формулой

$$\langle l_g, \eta\rangle = \int_Q \eta(x)g(x)\, dx$$

функционал l_g является линейным непрерывным функционалом на пространстве $W_2^1(Q)$.

Задача 3. Пусть Q – ограниченная область $\mathbb{R}^2$, а $g \in L_p(Q)$ с некоторым $p > 1$. Докажите, что определенный формулой

$$\langle l_g, \eta \rangle = \int_Q \eta(x) g(x)\, dx$$

функционал l_g является линейным непрерывным функционалом на пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$.

Задача 4. Пусть Q – ограниченная область $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей, а $g \in L_p(Q)$ с некоторым $p > 1$. Докажите, что определенный формулой

$$\langle l_g, \eta \rangle = \int_Q \eta(x) g(x)\, dx$$

функционал l_g является линейным непрерывным функционалом на пространстве $W_2^1(Q)$.

Задача 5. Докажите, что множество заданных равенством (11) функционалов l_g, $g \in L_2(Q)$, всюду плотно в сопряженном к $\mathring{W}_2^1(Q)$ пространстве.

Задача 6. Докажите, что пространство векторных полей $[L_2(Q)]^n$ разлагается в прямую сумму двух ортогональных подпространств $\mathring{J}(Q)$ и $G(Q)$, где $\mathring{J}(Q)$ – подпространство потенциальных векторных полей с принадлежащим $\mathring{W}_2^1(Q)$ потенциалом

$$\mathring{J}(Q) = \left\{ F = \nabla w,\ w \in \mathring{W}_2^1(Q) \right\},$$

а $G(Q)$ – пространство соленоидальных векторных полей

$$G(Q) = \{ F \in [L_2(Q)]^n : \operatorname{div} F = 0 \}.$$

Глава 5

Непрерывность по Гёльдеру решений эллиптических уравнений

Известно, что решение эллиптического уравнения с достаточно гладкими коэффициентами принадлежит пространству $W^{k+2}_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, если правая часть принадлежит $W^{k}_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, $k \geqslant 0$ (см., например, [12]). Из этого утверждения и теорем вложения (§ 9 первой главы) следует гладкость решения и в классических терминах. Однако, от условия гладкости коэффициентов в теореме о принадлежности решения $W^{k+2}_{2}(Q)$, как нетрудно увидеть, освободиться нельзя. Тем не менее, некоторой гладкостью решение обладает и без дополнительных условий; как утверждает теорема Е. Де Джорджи и Дж. Нэша оно непрерывно по Гёльдеру внутри рассматриваемой области. Доказательству этого результата и посвящена настоящая глава.

Мы ограничимся случаем однородного уравнения без младших членов
$$-\big(\nabla, A(x)\nabla u\big) = 0, \qquad x \in Q. \tag{1}$$
Область $Q \subset \mathbb{R}^n$ будем считать ограниченной, хотя основной результат о внутренней непрерывности по Гёльдеру имеет локальный характер и поэтому справедлив в произвольной области. Как и ранее, мы будем предполагать, что коэффициенты уравнения – элементы $a_{i,j}$ симметрической матрицы A – измеримые и ограниченные функции. Напомним, что мы всегда предполагаем выполненным условие равномерной эллиптичности: существует такая постоянная $\gamma > 0$, что для почти всех $x \in Q$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства
$$\gamma|\xi|^2 \leqslant \big(\xi, A(x)\xi\big) \leqslant \gamma^{-1}|\xi|^2. \tag{2}$$

§ 1. Субрешения эллиптического уравнения

В этом параграфе мы будем изучать свойства субрешений уравнения (1). В теореме 1 § 3 главы 3 было доказано, что суперпозиция $v = f \circ u$ гладкого отображения $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ и $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ принадлежит $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, если производная функции f ограничена. Условие ограниченности f', как легко видеть, существенно; без него функции

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = f'\bigl(u(x)\bigr)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

не обязаны принадлежать $L_{2,\mathrm{loc}}(Q)$. В этом параграфе будет доказано (теорема 2), что если u – неотрицательное субрешение уравнения (1), а функция f монотонно не убывает и выпукла вниз, то от условия ограниченности производной f можно отказаться, заменив его требованием принадлежности сложной функции v пространству $L_{2,\mathrm{loc}}(Q)$. Более того, функция v также будет субрешением. Доказательство этого результата опирается на оценку интеграла Дирихле субрешения через его норму в L_2. С этого утверждения, имеющего и самостоятельное значение, мы начнем изучение обсуждаемых вопросов.

Прежде всего напомним определение субрешения. Принадлежащая пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ функция v называется *субрешением уравнения* (1) в области Q, если для всех неотрицательных пробных функций $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется неравенство

$$\int_Q \bigl(\nabla\eta(x), A(x)\nabla v(x)\bigr)\,dx \leqslant 0. \tag{3}$$

Если $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется равенство

$$\int_Q \bigl(\nabla\eta(x), A(x)\nabla u(x)\bigr)\,dx = 0, \tag{1$'$}$$

то функция u называется обобщенным *решением уравнения* (1) в Q. Далее мы будем рассматривать только обобщенные решения. Поэтому прилагательное “обобщенное” обычно будем опускать. Как отмечалось выше, неравенство (3) выполняется для всех неотрицательных финитных функций из $W^1_2(Q)$. Аналогично, и равенство (1$'$) справедливо для всех финитных функций из $W_2^1(Q)$. Конечно, решение уравнения (1) является его субрешением. Отметим также, что если функция v является слабым пределом в $W_2^1(Q')$ для всех $Q' \Subset Q$ последовательности субрешений, то и она является субрешением.

Теорема 1. *Пусть v – неотрицательное субрешение уравнения (1). Тогда для любой точки $x^0 \in Q$ и всех положительных чисел ρ и σ, удовлетворяющих условию $\rho+\sigma < \operatorname{dist}(x^0, \partial Q)$, справедлива оценка*

$$\int_{\mathscr{B}_\rho(x^0)} |\nabla v(x)|^2\, dx \leqslant \frac{1}{\gamma^2\sigma^2} \int_{\mathscr{B}_{\rho+\sigma}(x^0)} v^2(x)\, dx. \tag{4}$$

Здесь и всюду далее $\mathscr{B}_r(x^0)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x^0, $\operatorname{dist}(x^0, \partial Q)$ – расстояние от точки x^0 до множества ∂Q.

Доказательство. Возьмем функцию

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{в } \mathscr{B}_\rho(x^0), \\ \dfrac{\rho+\sigma-|x-x^0|}{\sigma} & \text{при } \rho \leqslant |x-x^0| \leqslant \rho+\sigma, \\ 0 & \text{вне шара } \mathscr{B}_{\rho+\sigma}(x^0). \end{cases}$$

Эта функция финитна в Q, удовлетворяет условию Липшица и $|\nabla\zeta(x)| \leqslant 1/\sigma$ для п.в. x. Функция $\eta = \zeta^2 v$ неотрицательна, финитна в Q и, как легко видеть, принадлежит пространству $W_2^1(Q)$. Подставляя ее в (3), получим

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \int_Q \bigl(\nabla\zeta^2(x)v(x), A(x)\nabla v(x)\bigr)\, dx \\ &= \int_Q \bigl(\nabla\bigl(\zeta(x)v(x)\bigr), A(x)\nabla\bigl(\zeta(x)v(x)\bigr)\bigr)\, dx \\ &\qquad - \int_Q v^2(x)\bigl(\nabla\zeta(x), A(x)\nabla\zeta(x)\bigr)\, dx, \end{aligned} \tag{5}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \bigl(\nabla(\zeta^2 v), A\nabla v\bigr) &= \bigl(\zeta\nabla(\zeta v) + \zeta v\nabla\zeta, A\nabla v\bigr) \\ &= \bigl(\nabla(\zeta v), A\nabla(\zeta v)\bigr) - v\bigl(\nabla(\zeta v), A\nabla\zeta\bigr) + v\bigl(\nabla\zeta, A\nabla(\zeta v)\bigr) \\ &\qquad - v^2(\nabla\zeta, A\nabla\zeta) = \bigl(\nabla(\zeta v), A\nabla(\zeta v)\bigr) - v^2(\nabla\zeta, A\nabla\zeta). \end{aligned}$$

Оценка (4) вытекает из (5) в силу (2):

$$\gamma \int_{\mathscr{B}_\rho(x^0)} |\nabla v(x)|^2\,dx \leqslant \gamma \int_Q \bigl|\nabla\bigl(\zeta(x)v(x)\bigr)\bigr|^2\,dx$$
$$\leqslant \int_Q \Bigl(\nabla\bigl(\zeta(x)v(x)\bigr), A(x)\nabla\bigl(\zeta(x)v(x)\bigr)\Bigr)$$
$$\leqslant \int_Q v^2(x)\bigl(\nabla\zeta(x), A(x)\nabla\zeta(x)\bigr)\,dx \leqslant \frac{1}{\gamma\sigma^2}\int_{\mathscr{B}_{\rho+\sigma}(x^0)} v^2(x)\,dx.$$

Замечание 1. Если субрешение v является решением уравнения (1), то утверждение теоремы 1 справедливо и без условия его неотрицательности.

Перейдем теперь к изучению суперпозиции отображений. Будем рассматривать кусочно гладкие функции f (f непрерывна на всей оси и ее производная существует и непрерывна всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет пределы слева и справа). Будем также предполагать, что функция f выпукла вниз (ее производная f' монотонно не убывает).

Теорема 2. *Пусть f – неотрицательная, кусочно гладкая, выпуклая вниз функция, $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и $v = f \circ u \in L_{2,\mathrm{loc}}(Q)$. Тогда справедливы следующие утверждения*

1) *если u – решение уравнения (1) в Q, то v – субрешение уравнения (1) в Q (в частности, $v \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$); при этом*
$$\nabla v(x) = f'\bigl(u(x)\bigr)\nabla u(x); \tag{6}$$
2) *если u – субрешение уравнения (1) в Q и, дополнительно, производная f' функции f неотрицательна, то v – субрешение уравнения (1) в Q; при этом справедливо равенство (6).*

Доказательство. **1.** Докажем сначала утверждение теоремы при более жестких ограничениях на функцию f. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$, для всех $t \in \mathbb{R}$ $f(t) \geqslant 0$, $f''(t) \geqslant 0$, и пусть существует такое число M, что

$$f''(t) = 0 \quad \text{для всех } t \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty). \tag{7}$$

В этом случае требование $v \in L_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, конечно, излишне.

Так как из (7) следует ограниченность производной функции f, то по теореме 1 § 3 главы 3 $v = f \circ u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, и справедливо равенство (6). По той же причине $f' \circ u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и

$$\nabla(f' \circ u) = (f'' \circ u)\nabla u. \tag{6$'$}$$

Нужно доказать, что v – субрешение уравнения (1). Пусть u – субрешение уравнения (1), а $f'(t) \geqslant 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Возьмем произвольную неотрицательную пробную функцию η из $C_0^\infty(Q)$. В силу (6) и (6′)

$$\int_Q \big(\nabla\eta(x), A(x)\nabla v(x)\big)\,dx = \int_Q f'\big(u(x)\big)\big(\nabla\eta(x), A(x)\nabla u(x)\big)\,dx$$
$$= \int_Q \Big(\nabla\big(f'\big(u(x)\big)\eta(x)\big), A(x)\nabla u(x)\Big)\,dx$$
$$- \int_Q f''\big(u(x)\big)\eta\big(\nabla u(x), A(x)\nabla u(x)\big)\,dx \leqslant 0;$$

первое слагаемое в правой части последнего неравенства неположительно, поскольку функция $(f' \circ u)\eta \in W_2^1(Q)$, финитна и неотрицательна в Q, а u – субрешение. Неположительность второго слагаемого вытекает из эллиптичности уравнения и выпуклости функции f. Аналогично доказывается и первое утверждение: если u – решение уравнения (1), то первое слагаемое равно нулю (условие неотрицательности функций f' и η в этом случае не нужно).

2. Освободимся от условия гладкости функции f. Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 2 и, дополнительно, линейна при $t > M$ и при $t < -M$.

Прежде всего заметим, что и в этом случае выполнены условия, гарантирующие принадлежность сложной функции v пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и справедливость равенства (6). Нужно доказать, что v – субрешение уравнения (1) в области Q.

Возьмем произвольное положительное число h и рассмотрим усреднение

$$f_h = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_h(|t-\tau|)f(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_h(|\tau|)f(t-\tau)\,d\tau$$

функции f с неотрицательным ядром $\omega_h(t) = \omega(t/h)$ (см. § 1 главы 1). При любом $h > 0$ функция f_h бесконечно дифференцируема, неотрицательна и монотонно не убывает, если монотонно не убывает функция f (второе утверждение теоремы). А так как $(f')_h = (f_h)'$, то и функция f_h' монотонно не убывает. И наконец, $f_h''(t) = 0$ при $|t| > M + h$, поскольку усреднением линейной функции является сама усредняемая функция. По доказанному в п. **1** функции $v_h = f_h \circ u$ являются субрешениями (и для них справедливы равенства (6)).

Так как f_h равномерно на всей оси сходится к f при $h \to +0$ ($f_h(t) = f(t)$ для $|t| > M + h$), то $f_h \circ u \to f \circ u$ в $L_2(Q')$ для любой подобласти Q', компактно принадлежащей Q. Пусть точка x такова, что функция f' непрерывна в $u(x)$. Тогда $f_h'(u(x)) \to f'(u(x))$ при $h \to +0$. На множестве $\{x : u(x) -$ точка разрыва функции $f'\}$ $|\nabla u(x)| = 0$ п.в. (замечание 2 § 3 главы 3). Поэтому

$$f_h'(u(x))\nabla u(x) \to f'(u(x))\nabla u(x)$$

п.в. в Q при $h \to +0$. А так как $|f_h'(u(x))|^2\, |\nabla u(x)|^2$ мажорируется суммируемой функцией $\mathrm{const}|\nabla u(x)|^2$, то по теореме Лебега

$$\int_{Q'} \left|\nabla f_h\big(u(x)\big) - \nabla f\big(u(x)\big)\right|^2 dx \to 0 \quad \text{при } h \to +0$$

для любой $Q' \Subset Q$. Таким образом, функция v является субрешением уравнения (1), как предел субрешений.

3. Докажем теперь утверждения теоремы 2 в общем случае. Возьмем положительное число M_0 столь большим, чтобы были выполнены следующие три условия:

1) все точки излома функции f (точки разрыва f') лежат в интервале $(-M_0, M_0)$,
2) если $\lim_{t\to+\infty} f'(t) > 0$ (в частности, если $f(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$), то $f'(M_0) > 0$ (а следовательно, $f'(t) > 0$ для всех $t \geqslant M_0$),
3) если $\lim_{t\to-\infty} f'(t) < 0$ (в частности, если $f(t) \to -\infty$ при $t \to -\infty$), то $f'(-M_0) < 0$ (а следовательно, $f'(t) < 0$ для всех $t \leqslant -M_0$).

Для каждого $M > M_0$ определим кусочно гладкую функцию $f_{(M)}$ следующим образом.

Для $|t| \leqslant M$

$$f_{(M)}(t) = f(t).$$

Для $t > M$

$$f_{(M)}(t) = f(M), \quad \text{если } \lim_{t\to+\infty} f'(t) \leqslant 0,$$

и

$$f_{(M)}'(t) = f'(M), \quad \text{если } \lim_{t\to+\infty} f'(t) > 0.$$

Для $t < -M$

$$f_{(M)}(t) = f(-M), \quad \text{если} \lim_{t\to-\infty} f'(t) \geqslant 0,$$

и

$$f'_{(M)}(t) = f'(-M), \quad \text{если} \lim_{t\to-\infty} f'(t) < 0.$$

Прежде всего отметим, что по теореме 1 § 3 главы 3 функции $v_{(M)} = f_{(M)} \circ u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, и для них справедливо неравенство (6), а по доказанному в п. **2** утверждению функции $v_{(M)}$ являются субрешениями уравнения (1).

Кроме того, при $u(x) > M$

$$\bigl|f\bigl(u(x)\bigr) - f_{(M)}\bigl(u(x)\bigr)\bigr| \leqslant f(u(x)), \quad \text{если} \lim_{t\to+\infty} f'(t) > 0,$$

и

$$\bigl|f\bigl(u(x)\bigr) - f_{(M)}\bigl(u(x)\bigr)\bigr| \leqslant f(M) \leqslant f(M_0), \quad \text{если} \lim_{t\to+\infty} f'(t) \leqslant 0.$$

Аналогично, при $u(x) < -M$

$$\bigl|f\bigl(u(x)\bigr) - f_{(M)}\bigl(u(x)\bigr)\bigr| \leqslant f(u(x)), \quad \text{если} \lim_{t\to-\infty} f'(t) < 0,$$

и

$$\bigl|f\bigl(u(x)\bigr) - f_{(M)}\bigl(u(x)\bigr)\bigr| \leqslant f(-M) \leqslant f(M_0), \quad \text{если} \lim_{t\to-\infty} f'(t) \geqslant 0.$$

Поэтому для любой $Q' \Subset Q$

$$\int_{Q'} \bigl|f\bigl(u(x)\bigr) - f_{(M)}\bigl(u(x)\bigr)\bigr|^2\,dx = \int_{\{x\in Q':|u(x)|>M\}} \bigl[\, f^2\bigl(u(x)\bigr) + f^2(M_0) + f^2(-M_0)\bigr]\,dx \to 0$$

при $M\to+\infty$. Таким образом, $v_{(M)} \to v = f \circ u$ при $M \to +\infty$ в $L_2(Q')$ для любой $Q' \Subset Q$. И следовательно, ограничено семейство их норм: $\|v_{(M)}\|_{L_2(Q')} \leqslant C(Q')$ для всех $M > M_0$.

Докажем теперь сходимость производных функций из этого семейства. Возьмем произвольную подобласть $Q' \Subset Q$; обозначим $\operatorname{dist}(Q', \partial Q) = d'$. Покроем подобласть Q' конечным набором шаров радиуса $d'/4$ с центрами в Q' и в каждом из них применим к произвольной функции $v_{(M)}$ из рассматриваемого семейства оценку (4) теоремы 1 с $\sigma = \rho = d'/4$. Получим

$$\int_{Q'} |\nabla v_{(M)}(x)|^2\,dx \leqslant C(Q') \int_{Q''} v_{(M)}^2(x)\,dx \leqslant \mathrm{const},$$

где $Q'' = \{x \in Q : \operatorname{dist}(x, Q') < d'/2\} \Subset Q$, а постоянная $C(Q')$ не зависит от $M > M_0$. Так как

$$\nabla v_{(M)}(x) = f'_{(M)}\big(u(x)\big)\nabla u(x) \to f'\big(u(x)\big)\nabla u(x)$$

при $M \to +\infty$ почти всюду ($\operatorname{mes}\{x \in Q' : |u(x)| > M\} \to 0$ при $M \to +\infty$), то по лемме Фату функция $(f'(u(x)))^2|\nabla u(x)|^2$ суммируема по Q'. А так как

$$\int_{Q'} \big|f'\big(u(x)\big) - f'_{(M)}\big(u(x)\big)\big|^2\,|\nabla u(x)|^2\,dx$$
$$\leqslant \int_{\{x\in Q' : |u(x)|>M\}} \big|f'\big(u(x)\big)\big|^2\,|\nabla u(x)|^2\,dx \to 0 \quad \text{при } M \to +\infty,$$

то обобщенные производные функций $v_{(m)}$ сходятся в $L_2(Q')$ к функциям $f'(u(x))\partial u/\partial x_i(x)$. Следовательно, предельная функция $v = f \circ u$ принадлежит $W_2^1(Q')$, и для нее справедливо равенство (6). Более того, она является пределом в $W_2^1(Q')$ субрешений $v_{(M)}$, а следовательно, сама является субрешением.

Замечание 2. Из теоремы 2 немедленно следует, что $|u|$ является субрешением уравнения (1), если u – решение (1). Более того, пусть p – произвольное число из интервала $(1, \frac{n}{n-2})$, а u – решение уравнения (1) в Q. Тогда в силу следствия 1 из теоремы 1 § 2 главы 3 $|u|^p \in L_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и по только что доказанной теореме 2 $|u|^p$ – субрешение уравнения (1) в Q.

Замечание 3. Пусть I – одно из следующих множеств: либо это отрезок $[a, b]$, либо одна из полуосей $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$. Предположим, что субрешение u принимает значения из этого множества: $u(x) \in I$ для п.в. x из Q. Тогда, как легко видеть, выполнение условий на функцию f в теореме 2 следует требовать на этом множестве I. В частности, если $p \in (1, \frac{n}{n-2})$, а v – неотрицательное субрешение (например, $v = |u|^p$, где u – решение уравнения (1)), то функция v^p также является субрешением (1). Поэтому для любого решения u и всех натуральных k функции $|u|^{p^k}$ являются субрешениями.

§ 2. Локальная ограниченность обобщенных решений эллиптического уравнения

Теорема 1. *Любое неотрицательное субрешение v в области Q уравнения (1) принадлежит пространству $L_{\infty,\mathrm{loc}}(Q)$. Более того, существует такая зависящая только от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ постоянная C, что для любых подобластей Q', Q'', $Q' \Subset Q$ справедлива оценка*

$$\operatorname{vrai\,sup}_{Q'} v^2(x) \leqslant C(d)^{-n} \int_{Q''} v^2(y)\,dy, \tag{8}$$

в которой $d = \operatorname{dist}(Q', \partial Q''))$ – расстояние от подобласти Q' до границы Q''.

В частности, оценка (8) справедлива для $v(x) = |u(x)|$, где u – произвольное решение уравнения (1).

Доказательство. Прежде всего заметим, что достаточно доказать справедливость для любой точки $x^0 \in Q$ и всех $r \in (0, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x^0,\ \partial Q))$ оценки

$$\operatorname{vrai\,sup}_{x\in\mathscr{B}_r(x^0)} v^2(x) \leqslant C(2r)^{-n} \int_{\mathscr{B}_{2r}(x^0)} v^2(y)\,dy. \tag{8$'$}$$

Справедливость оценки (8), а тем самым и принадлежность субрешения v пространству $L_{\infty,\mathrm{loc}}(Q)$, немедленно следует из (8′).

Пусть v – произвольное неотрицательное субрешение уравнения (1). Возьмем и зафиксируем число $p = 2\kappa \in (2, \frac{2n}{n-2})$ (например, $\kappa = \frac{n}{n-1}$) и любую точку x^0 из Q. Для произвольных $\rho > 0$ и $\sigma > 0$, для которых $\mathscr{B}_{\rho+\sigma} = \mathscr{B}_{\rho+\sigma}(x^0) \Subset Q$, подставляя оценку (4) теоремы 1 предыдущего параграфа в неравенство (9) следствия 2 § 2 главы 3 (с $\mathscr{E} = \mathscr{B}_\rho$), имеем

$$\left[\rho^{-n}\int_{\mathscr{B}_\rho} v^{2\kappa}(x)\,dx\right]^{1/\kappa} \leqslant C(n,\gamma)\left[\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2 + 1\right]\left[\frac{\rho+\sigma}{\rho}\right]^n \times \left[(\rho+\sigma)^{-n}\int_{\mathscr{B}_{\rho+\sigma}} v^2(x)\,dx\right]. \tag{9}$$

Возьмем произвольное положительное число r такое, что $r < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x^0, \partial Q))$. Положим $\rho_0 = 2r$, $\sigma_k = r2^{-k}$, $\rho_k = \rho_{k-1} - \sigma_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{\rho_k\}$ монотонно убывает и сходится к числу r. Как отмечалось в замечании 3 предыдущего параграфа, функции $v_1(x) = v^\kappa(x)$, $v_2(x) = v_1^\kappa(x) = v^{\kappa^2}(x), \ldots, v_k(x) = v_{k-1}^\kappa(x) = v^{\kappa^k}(x), \ldots$ являются субрешениями (в Q) уравнения (1). Поэтому для каждой из них справедлива оценка (9). Положим в (9) $v = v_{k-1}$, $\rho = \rho_k$ и $\sigma = \sigma_k$, при этом $\rho + \sigma = \rho_{k-1}$. Тогда

$$\left[\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2 + 1\right]\left[\frac{\rho+\sigma}{\rho}\right]^n = \left[\left(\frac{\rho_k}{\sigma_k}\right)^2 + 1\right]\left[\frac{\rho_k+\sigma_k}{\rho_k}\right]^n \leqslant C(n)4^k.$$

Таким образом, для любого натурального k имеем оценку

$$\begin{aligned}\left[\rho_k^{-n}\int_{\mathscr{B}_{\rho_k}} v_k^2(x)\,dx\right]^{1/\kappa} &= \left[\rho_k^{-n}\int_{\mathscr{B}_{\rho_k}} v_{k-1}^{2\kappa}(x)\,dx\right]^{1/\kappa} \\ &\leqslant C\,4^k\left[\rho_{k-1}^{-n}\int_{\mathscr{B}_{\rho_{k-1}}} v_{k-1}^2(x)\,dx\right],\end{aligned}$$

здесь и далее постоянная $C = C(n,\gamma)$ зависит только от n и γ. Из нее получаем

$$\begin{aligned}\rho_k^{-n}\int_{\mathscr{B}_{\rho_k}} v_k^2(x)\,dx &\leqslant C^\kappa 4^{k\kappa}\left[\rho_{k-1}^{-n}\int_{\mathscr{B}_{\rho_{k-1}}} v_{k-1}^2(x)\,dx\right]^\kappa \\ &\leqslant C^{\kappa+\kappa^2}\,4^{k\kappa+(k-1)\kappa^2}\left[\rho_{k-2}^{-n}\int_{\mathscr{B}_{\rho_{k-2}}} v_{k-2}^2(x)\,dx\right]^{\kappa^2} \\ &\leqslant C^{\kappa+\kappa^2+\cdots+\kappa^k}\,4^{k\kappa+(k-1)\kappa^2+\cdots+\kappa^k}\left[\rho_0^{-n}\int_{\mathscr{B}_{\rho_0}} v_0^2(x)\,dx\right]^{\kappa^k}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|v^2\|'_{L_{\kappa^k}(\mathscr{B}_r)} &\leqslant \|v^2\|'_{L_{\kappa^k}(\mathscr{B}_{\rho_k})} = \left[\rho_k^{-n} \int_{\mathscr{B}_{\rho_k}} v^{2\kappa^k}(x)\,dx\right]^{\frac{1}{\kappa^k}} \\
&= \left[\rho_k^{-n} \int_{\mathscr{B}_{\rho_k}} v_k^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{\kappa^k}} \\
&\leqslant C^{\frac{\kappa+\kappa^2+\dots+\kappa^k}{\kappa^k}}\, 4^{\frac{k\kappa+(k-1)\kappa^2+\dots+\kappa^k}{\kappa^k}} \left[\rho_0^{-n} \int_{\mathscr{B}_{\rho_0}} v_0^2(x)\,dx\right] \\
&\leqslant C^{\sum_{m=0}^{\infty} \kappa^{-m}}\, 4^{\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\kappa^{-m}} \left[(2r)^{-n} \int_{\mathscr{B}_{2r}} v^2(x)\,dx\right].
\end{aligned}$$

Устремляя теперь k к бесконечности, в силу теоремы 1 § 1 главы 3 получаем доказываемое неравенство (8).

§ 3. Слабое неравенство Гарнака

В этом параграфе мы докажем, что нетривиальное неотрицательное в некотором шаре решение уравнения (1) в шаре меньшего радиуса (с тем же центром) отделено от нуля. Для доказательства этого утверждения нам понадобится неочевидная оценка интеграла Дирихле для специального класса субрешений, с которой мы и начнем изложение.

Возьмем произвольный шар

$$\mathscr{B}_{2r} = \mathscr{B}_{2r}(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < 2r\},$$
$$x^0 \in Q, \qquad r < \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(x^0, \partial Q).$$

Пусть u – решение уравнения (1) (в области Q). По теореме 1 предыдущего параграфа решение ограничено в любой компактно вложенной в Q подобласти, в частности, в шаре $\mathscr{B}_{2r}$. Прибавляя к решению постоянную (она, очевидно, является решением уравнения (1)), можно добиться, чтобы решение стало неотрицательным в $\mathscr{B}_{2r}$. Далее мы будем считать решение u неотрицательным и ограниченным: существует такое число M, что $0 \leqslant u(x) \leqslant M$ п.в. в $\mathscr{B}_{2r}$. Будем рассматривать кусочно гладкие функции f на отрезке $[0, M]$: f непрерывна на этом отрезке, имеет производную f' всюду, кроме конечного числа "точек излома" (точками излома считаем и крайние точки отрезка), и эта производная непрерывна на каждом из отрезков, на которые точки излома разбивают $[0, M]$ (в частности, в крайних точках 0 и M существуют односторонние производные, равные соответствующим односторонним пределам f'). Будем предполагать, что функция f неотрицательна и удовлетворяет следующему условию

$$\text{функция } g(t) = -e^{-f(t)} \quad \text{выпукла,} \tag{10}$$

т.е. ее производная g' монотонно не убывает.

Остановимся подробнее на этом классе функций. Для дважды непрерывно дифференцируемых функций f $g''(t) = [f''(t) - f'^2(t)]e^{-f(t)}$ и условие (10) эквивалентно условию

$$f''(t) \geqslant f'^2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant M. \tag{10'}$$

Из последнего неравенства, конечно, следует выпуклость и функции f. Выпуклость функции f следует из (10) и без дополнительного условия гладкости. В этом можно убедиться, например, следующим образом:

$$f(t) = -\ln\bigl(-g(t)\bigr), \qquad f'(t) = \frac{g'(t)}{-g(t)}\,,$$

и из монотонного неубывания g' следует монотонное неубывание f'. Отметим, что в отличие от класса выпуклых функций, множество функций, удовлетворяющих условию (10), не инвариантно (см. (10′)) относительно умножения на положительные (большие единицы) числа, а следовательно, и относительно сложения. Кроме того, отметим, что удовлетворяющая условию (10) кусочно гладкая функция $f \neq \mathrm{const}$ не может быть продолжена с сохранением этого свойства на всю ось. Однако в некоторую окрестность отрезка $[0, M]$ такое продолжение возможно (например, решением задачи Коши для уравнения $f''(t) = f'^2(t)$).

Продолжая f на всю ось с сохранением ее (а не функции g!) свойства выпуклости (например, линейно: f' постоянна на полуосях $(-\infty, 0)$ и $(M, +\infty)$; условие (10) при этом, конечно, нарушится), из теоремы 2 § 1 получим, что сложная функция $v = f \circ u$ является субрешением уравнения (1) в Q, а следовательно, и в $\mathscr{B}_{2r}$.

Лемма 1. *Существует такая постоянная $C = C(n, \gamma)$, что для любого шара $\mathscr{B}_{2r} \Subset Q$, любого неотрицательного решения u и любой неотрицательной кусочно гладкой функции f, удовлетворяющей условию* (10), *субрешение $v = f \circ u$ удовлетворяет оценке*

$$\int_{\mathscr{B}_r} |\nabla v(x)|^2\, dx \leqslant C r^{n-2}. \tag{11}$$

Подчеркнем, что постоянная C в оценке (11) не зависит ни от рассматриваемого шара, ни от неотрицательного решения (в частности, C не зависит от M), ни от функции f; она зависит только от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ.

Доказательство. **1.** Рассмотрим сначала случай дважды непрерывно дифференцируемой функции f. В этом случае, как отмечалось выше, условие (10) эквивалентно условию (10′). Функцию f продолжим линейно на всю числовую ось. В силу теоремы 1 §3 главы 3 функция $f' \circ u$ принадлежит пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, а ее производные (конечно, обобщенные) вычисляются по обычному правилу (по формуле (6)).

Возьмем функцию $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\zeta \subset \mathscr{B}_{2r}$, $\zeta(x)=1$ в $\mathscr{B}_r$ и $|\nabla\zeta(x)| \leqslant \mathrm{const}\, r^{-1}$ для всех $x \in Q$. Подставим

$$\eta = \zeta^2(x) f'\bigl(u(x)\bigr) \in \mathring{W}^1_2(Q), \qquad \operatorname{supp}\eta \subset \mathscr{B}_{2r},$$

в определяющее обобщенное решение интегральное тождество. Используя (10′), получим

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathscr{B}_{2r}} \Bigl[& f'\bigl(u(x)\bigr)\bigl(\nabla\zeta^2(x), A(x)\nabla u(x)\bigr) \\ & + \zeta^2(x) f''\bigl(u(x)\bigr)\bigl(\nabla u(x), A(x)\nabla u(x)\bigr)\Bigr]\, dx \\ = \int_{\mathscr{B}_{2r}} \biggl[& \bigl(\nabla\zeta^2(x), A(x)\nabla v(x)\bigr) \\ & + \zeta^2(x)\frac{f''(u(x))}{f'^2(u(x))}\bigl(\nabla v(x), A(x)\nabla v(x)\bigr)\biggr]\, dx \\ \geqslant \int_{\mathscr{B}_{2r}} & \Bigl[\bigl(\nabla\zeta^2(x), A(x)\nabla v(x)\bigr) + \zeta^2(x)\bigl(\nabla v(x), A(x)\nabla v(x)\bigr)\Bigr]\, dx. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует оценка

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{B}_{2r}} & \zeta^2(x)\bigl(\nabla v(x), A(x)\nabla v(x)\bigr)\, dx \\ & \leqslant \int_{\mathscr{B}_{2r}} 2\zeta(x)\bigl(\nabla\zeta(x), A(x)\nabla v(x)\bigr)\, dx \\ & \leqslant 2\biggl[\int_{\mathscr{B}_{2r}} \zeta^2(x)\bigl(\nabla v(x), A(x)\nabla v(x)\bigr)\, dx\biggr]^{1/2} \\ & \qquad \times \biggl[\int_{\mathscr{B}_{2r}} \bigl(\nabla\zeta(x), A(x)\nabla\zeta(x)\bigr)\, dx\biggr]^{1/2} \\ & \leqslant C(n,\gamma) r^{\frac{n-2}{2}} \biggl[\int_{\mathscr{B}_{2r}} \zeta^2(x)\bigl(\nabla v(x), A(x)\nabla v(x)\bigr)\, dx\biggr]^{1/2}, \end{aligned}$$

из которой немедленно вытекает (11).

2. Рассмотрим теперь случай кусочно гладкой функции f. Значения функции g отрицательны на всем отрезке $[0, M]$. Продолжим ее линейно на некоторый отрезок $[-\delta, M+\delta]$, $\delta > 0$ с сохранением этого свойства (и свойства выпуклости). Тогда усреднения $g_h(t)$ с $h < \delta$ являются бесконечно дифференцируемыми выпуклыми функциями на отрезке $[0, M]$, принимающими отрицательные значения. Поэтому функции $f^{(h)}(t) = -\ln(-g_h(t))$ удовлетворяют условию (10′) и по доказанному в п. **1** субрешения $v_h = f^{(h)} \circ u$ удовлетворяют оценке (11):

$$\int_{\mathscr{B}_r} |\nabla v_h(x)|^2\,dx \leqslant C(n,\gamma) r^{n-2}. \tag{11′}$$

Так как $g_h(t) \to g(t)$ при $h \to +0$, $g_h'(t) \to g'(t)$, $h \to +0$, а следовательно, и $(f^{(h)})'(t) \to f'(t)$, $h \to +0$ во всех точках отрезка $[0, M]$, за исключением точек излома, то

$$\nabla v_h(x) = (f^{(h)})'\bigl(u(x)\bigr)\nabla u(x) \to f'\bigl(u(x)\bigr)\nabla u(x)$$

при $h \to +0$ п.в. в $\mathscr{B}_{2r}$.

Справедливость оценки (11) теперь следует из (11′) в силу леммы Фату.

Теорема 1 (Слабое неравенство Гарнака). *Для любого числа $c_0 > 0$ найдется такая постоянная $c = c(n, \gamma, c_0) > 0$, что для произвольного шара $\mathscr{B}_{2r} \Subset Q$ и произвольного неотрицательного в этом шаре решения u уравнения (1), удовлетворяющего условию*

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathscr{B}_r : u(x) \geqslant 1\} \geqslant c_0 r^n \tag{12}$$

справедлива оценка

$$u(x) \geqslant c \quad \text{для п.в. } x \in \mathscr{B}_{r/2}. \tag{13}$$

Доказательство. Возьмем произвольное положительное число ε и рассмотрим функцию $f_\varepsilon(t) = \max\{0, -\ln(t+\varepsilon)\}$. Она удовлетворяет условиям леммы 1: функция $g_\varepsilon(t) = -e^{-f(t)} =$

$\max\{-1, -(t+\varepsilon)\}$ выпукла. Поэтому субрешение $v_\varepsilon = f_\varepsilon \circ u$ удовлетворяет оценке (11):

$$\int_{\mathscr{B}_r} |\nabla v_\varepsilon(x)|^2 \, dx \leqslant C r^{n-2}.$$

Кроме того, из (12) следует, что $\operatorname{mes}\{x \in \mathscr{B}_r : f_\varepsilon(u(x)) = 0\} \geqslant c_0 r^n$. Поэтому из оценки (9) следствия 2 из леммы 1 § 2 главы 3 (с $p = 2$ и $\mathscr{E} = \{x \in \mathscr{B}_r : f_\varepsilon(u(x)) = 0\}$) имеем

$$r^{-n} \int_{\mathscr{B}_r} v_\varepsilon^2(x) \, dx \leqslant C(n, c_0) r^{2-n} \int_{\mathscr{B}_r} |\nabla v_\varepsilon(x)|^2 \, dx \leqslant C(n, \gamma, c_0).$$

А по теореме 1 § 2 этой главы

$$v_\varepsilon(x) = \max\bigl\{0, -\ln\bigl(u(x) + \varepsilon\bigr)\bigr\} \leqslant C(n, \gamma, c_0) \quad \text{п.в. в } \mathscr{B}_{r/2}.$$

Откуда

$$u(x) \geqslant e^{-C(n,\gamma,c_0)} = c(n, \gamma, c_0) \quad \text{п.в. в } \mathscr{B}_{r/2}.$$

§ 4. Непрерывность по Гёльдеру решений эллиптического уравнения

Пусть u – любое решение (в Q) уравнения (1). Возьмем произвольный шар $\mathscr{B}_\rho \Subset Q$ и обозначим

$$\omega(\rho) = \omega_u(\rho) = \operatorname{vrai\,sup}_{x\in\mathscr{B}_\rho} u(x) - \operatorname{vrai\,inf}_{x\in\mathscr{B}_\rho} u(x).$$

Лемма 1. *Существует такое число $\lambda = \lambda(n,\gamma) < 1$, что для любого решения уравнения* (1) *и любого шара $\mathscr{B}_\rho \Subset Q$ справедливо неравенство*

$$\omega(\rho/4) \leqslant \lambda\omega(\rho). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\omega(\rho) = 2M$. Поскольку прибавление к решению постоянной не меняет значения ω, не ограничивая общность, можно считать, что

$$M = \operatorname{vrai\,sup}_{x\in\mathscr{B}_\rho} u(x) = -\operatorname{vrai\,inf}_{x\in\mathscr{B}_\rho} u(x).$$

Рассмотрим решения $w_\pm(x) = (M \pm u(x))/M$. Они неотрицательны в рассматриваемом шаре, причем

$$\operatorname{vrai\,sup}_{x\in\mathscr{B}_\rho} w_\pm(x) = 2, \qquad \operatorname{vrai\,inf}_{x\in\mathscr{B}_\rho} w_\pm(x) = 0,$$
$$\omega_{w_+}(\rho) = \omega_{w_-}(\rho) = \frac{1}{M}\omega_u(\rho\ ).$$

Кроме того, если

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathscr{B}_{\rho/2} : w_-(x) \geqslant 1\} < \frac{1}{2}\operatorname{mes}\mathscr{B}_{\rho/2},$$

то

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathscr{B}_{\rho/2} : w_+(x) \geqslant 1\} \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{mes}\mathscr{B}_{\rho/2}. \tag{15}$$

Если w_+ не удовлетворяет (15), то ему удовлетворяет w_-. Т.е. по крайней мере одна из функций $w_\pm$ удовлетворяет (15). Пусть это будет w_+. Применяя к ней теорему 1 § 3, получаем $\operatorname{vrai\,inf}_{\mathscr{B}_{\rho/4}} w_+(x) \geqslant c = c(n,\gamma) > 0$. Следовательно,

$$\omega_u(\rho/4) = M\omega_{w_+}(\rho/4) \leqslant (2-c)M = (1-c/2)\omega_u(\rho)$$

и мы получили (14) с $\lambda = \lambda(n,\gamma) = 1 - c/2$.

Отметим, что из леммы 1 легко следует справедливость теоремы Лиувилля и в случае уравнения (1) с измеримыми и ограниченными коэффициентами (задача 3, глава 5).

Теорема 1. *Существуют такие зависящие только от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ постоянные α и C, что для любого решения в Q уравнения (1) и любых $Q' \Subset Q'' \Subset Q$ справедливо неравенство*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C d^{-\frac{n}{2}-\alpha} |x-y|^{\alpha}\, \|u\|_{L_2(Q'')} \quad \textit{для п.в. } x \textit{ и } y \textit{ из } Q, \tag{16}$$

в котором $d = \operatorname{dist}\{Q', \partial Q''\}$ – расстояние между подобластью Q' и границей подобласти Q''.

Доказательство. Пусть $x \in Q'$, $y \in Q'$ и $|x-y| < d/2$. Обозначим $r_0 = d/2$, $r_k = 4^{-k} r_0$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть m – такое натуральное число, что $r_{m+1} \leqslant |x-y| < r_m$. Применим к шару $\mathscr{B}_{r_m}(y)$ лемму 1 этого параграфа. С помощью теоремы 1 § 2 этой главы имеем

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leqslant \omega(r_m) \leqslant \lambda \omega(r_{m-1}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda^m \omega(r_0) \\ &\leqslant 2\lambda^m \operatorname{vrai\,sup}_{z \in \mathscr{B}_{r_0}(y)} |u(z)| \leqslant \lambda^m C(n,\gamma) d^{-n} \|u\|_{L_2(Q'')}. \end{aligned}$$

Положим $\alpha = \alpha(n,\gamma) = -\log_4 \lambda > 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \lambda^m &= 4^{m \log_4 \lambda} = (4^{-m})^{-\log_4 \lambda} \\ &= (4^{-m})^{\alpha} = \left(\frac{2r_m}{d}\right)^{\alpha} = \left(\frac{8}{d}\right)^{\alpha} r_{m+1}^{\alpha} \leqslant \frac{8^{\alpha}}{d^{\alpha}} |x-y|^{\alpha}, \end{aligned}$$

имеем (16) для $|x-y| < d/2$.

Пусть теперь $x \in Q'$, $y \in Q'$ и $|x-y| \geqslant d/2$. В этом случае оценка (16) немедленно вытекает из теоремы 1 § 2. Действительно,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leqslant 2\|u\|_{L_\infty(Q')} \leqslant C(n,\gamma) d^{-n} \|u\|_{L_2(Q'')} \\ &\leqslant C(n,\gamma) d^{-n} \left(\frac{2|x-y|}{d}\right)^{\alpha} \|u\|_{L_2(Q'')}. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана.

Задачи к главе 5

Задача 1. Докажите утверждение теоремы 2 § 1 в случае счетного множества точек излома функции f (точек разрыва производной функции f).

В силу теоремы 1 § 4 значения решения уравнения (1) можно так изменить на множестве меры нуль, что оно будет непрерывным внутри рассматриваемой области. Т.е. в этом классе отождествляемых функций имеется непрерывная функция. Ее естественно и понимать под решением уравнения.

Задача 2. Докажите **строгий принцип максимума**. Если решение уравнения (1) с измеримыми и ограниченными коэффициентами достигает наибольшего значения во внутренней точке области, то оно постоянно.

Задача 3. Докажите **теорему Лиувилля**. Ограниченное во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ решение уравнения (1) постоянно.

Список литературы

[1] E. DeGiorgi, "Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari", *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **3** (1957), 25–43.

[2] J. Nash, "Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations", *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 931–954.

[3] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.

[4] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

[5] J. Moser, "A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **17** (1964), 101–134.

[6] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1972.

[7] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.

[8] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд. Ленинградского университета, Л., 1985.

[9] И. Г. Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Государственное изд. технико-теоретической литературы, М., 1953.

[10] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981.

[11] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физико-математическая литература, М., 2000.

[12] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1983.

[13] В. П. Михайлов, *Лекции по уравнениям математической физики*, Физматлит, М., 2001.

[14] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.

[15] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Введение в теорию обобщенных функций*, Лекционные курсы НОЦ, **5**, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, М., 2006.