Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. П. Ильин, Об одном интегральном представлении функций, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1974, том 47, 67–72

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.88
15 января 2025 г., 06:04:47

В.П.Ильин

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ

Основной целью настоящей заметки является получение одного интегрального представления функций "n" вещественных переменных, которое можно рассматривать (по крайней мере формально) как некоторый аналог формулы Фурье. Метод доказательства этого тождества основан на рассмотрении многопараметрических усреднений функций.

I. <u>Обозначения</u>. $e^n=\{1,\ldots,n\}$ – множество, состоящее из "n" первых натуральных чисел. Через e будем обозначать произвольное (возможно и пустое) подмножество множества e^n, а $e'=e^n\setminus e$ – дополнение e до e^n.

Положим $1^e=(\omega_1^e,\ldots,\omega_n^e)$, где $\omega_j^e=\begin{cases}1 & j\in e\\ 0 & j\in e'\end{cases}$, $|1^e|=\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^e$.

Пусть $v=(v_1,\ldots,v_n)$ – n-мерный вектор. Под v^e мы будем понимать вектор размерности $|1^e|$ с компонентами v_j, где j пробегает лишь множество e. Будем также писать $v=(v^e,v^{e'})$. Аналогичный смысл будут иметь h^e, ε^e, $h^{e'}$, $\varepsilon^{e'}$, где $h=(h_1,\ldots,h_n)$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$. Очевидны также обозначения: $F(v^e,v^{e'})$, $F(v^e,h^{e'})$, где $F(v)=F(v_1,\ldots,v_n)$ – заданная функция.

Положим еще

$$\mathcal{D}_{v^e}^{1^e}F=\frac{\partial}{\partial v_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial v_{j_s}}F,$$

$$\int_{\varepsilon^e}^{h^e}F\,dv^e=\int_{\varepsilon_{j_1}}^{h_{j_1}}dv_{j_1}\cdots\int_{\varepsilon_{j_s}}^{h_{j_s}}F\,dv_{j_s},$$

где $\{j_1,\ldots,j_s\}=e$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, $h=(h_1,\ldots,h_n)$.

2. <u>Многопараметрическое усреднение функций</u>. Пусть $\mathcal{K}(t)$ – бесконечно дифференцируемая финитная функция, определенная в E^1, т.е. $\mathcal{K}\in C_0^\infty(E^1)$; для простоты можно, например, считать, что $\operatorname{supp}\mathcal{K}\subset[-1,1]$. Предположим также, что

$$\int_{E^1}\mathcal{K}(t)\,dt=1. \tag{I}$$

Введем функцию

$$\Omega(t)=\mathcal{D}^k\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\int_{-\infty}^{t}\mathcal{K}(\tau)\,d\tau\right], \tag{2}$$

где k – некоторое натуральное число, $\mathcal{D}^k = \frac{d^k}{dt^k}$

Легко видеть, что $\operatorname{supp}\Omega = \operatorname{supp}\mathcal{K}$ и, в силу (I),

$$\int_{E^1} \Omega(t)\,dt = \int_{E^1} \mathcal{K}(t)\,dt = 1. \tag{3}$$

Пусть теперь $x=(x_1,\ldots,x_n)$ – точка n-мерного эвклидова пространства E^n. Положим

$$\tilde{\Omega}(x) = \prod_{j=1}^{n} \Omega(x_j).$$

Ясно, что $\tilde{\Omega} \in C_0^\infty(E^n)$, $\operatorname{supp}\tilde{\Omega} \subset \{x : |x_i| \leqslant 1,\ i=1,\ldots,n\}$ и, на основании (3),

$$\int_{E^n} \tilde{\Omega}(x)\,dx = 1.$$

Пусть $f(x)$ – локально суммируемая в E^n функция. Рассмотрим следующее усреднение функции f с ядром $\tilde{\Omega}$:*)

$$F(x;v) = F(x;v_1,\ldots,v_n) = \int_{E^n} f(x+y)\frac{1}{v_1\ldots v_n}\,\tilde{\Omega}\left(\frac{y_1}{v_1},\ldots,\frac{y_n}{v_n}\right)dy. \tag{4}$$

Рассматриваемое усреднение характеризуется тем, что по каждой переменной имеется свой параметр усреднения.

Для нас в дальнейшем важное значение будет играть тот факт, что если $f \in L_p^{loc}(E^n)$, $p>1$, то при $v_1,\ldots,v_n \to 0$, $F(x;v) \to f(x)$ почти везде на E^n (см. [2], стр.358–365). Если $v_1 = v_2 = \ldots = v_n$, то аналогичное заключение имеет место и для $f \in L^{loc}(E^n)$. В случае непрерывности функции f указанное соотношение справедливо в каждой точке $x \in E^n$.

Отметим также, что $F(x;v_1,\ldots,v_n)$, рассматриваемая как функция $v_1,\ldots,v_n$, имеет непрерывные производные любого порядка по этим переменным при $v_i > 0$ $(i=1,\ldots,n)$.

3. <u>Основное тождество</u>. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, $h=(h_1,\ldots,h_n)$, $0<\varepsilon_i<h_i<\infty$ $(i=1,\ldots,n)$. Последовательным применением формулы Ньютона – Лейбница по переменным v_i $(i=1,\ldots,n)$ можно получить следующее равенство:

$$F(x;\varepsilon) = \sum_{e\subset e^n} (-1)^{|1^e|}\,\tilde{J}^e(x;\varepsilon,h), \tag{5}$$

где

$$\tilde{J}^e(x;\varepsilon,h) = \int_{\varepsilon^e}^{h^e} \mathcal{D}_{v^e}^{1^e} F(x;v^e,h^{e'})\,dv^e, \tag{6}$$

а суммирование проводится по всем $e \subset e^n$, включая $e=\emptyset$ и $e=e^n$.

---

*) Применение таких усреднений к исследованию дифференциальных свойств функций рассматривалось в работе [I].

Покажем справедливость формулы (5), например, при $n=3$. Имеем

$$F(x;\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=F(x;\varepsilon_1,\varepsilon_2,h_3)-\int_{\varepsilon_3}^{h_3}\frac{\partial F(x;\varepsilon_1,\varepsilon_2,v_3)}{\partial v}dv_3=$$

$$=F(x;\varepsilon_1,h_2,h_3)-\int_{\varepsilon_2}^{h_2}\frac{\partial F(x;\varepsilon_1,v_2,h_3)}{\partial v_2}dv_2-\int_{\varepsilon_3}^{h_3}\frac{\partial F(x;\varepsilon_1,h_2,v_3)}{\partial v_3}dv_3+$$

$$+\int_{\varepsilon_2}^{h_2}\int_{\varepsilon_3}^{h_3}\frac{\partial^2 F(x;\varepsilon_1,v_2,v_3)}{\partial v_2\,\partial v_3}dv_2dv_3=F(x;h_1,h_2,h_3)-$$

$$-\int_{\varepsilon_1}^{h_1}\frac{\partial F(x;v_1,h_2,h_3)}{\partial v_1}dv_1-\int_{\varepsilon_2}^{h_2}\frac{\partial F(x;h_1,v_2,h_3)}{\partial v_2}dv_2-$$

$$-\int_{\varepsilon_3}^{h_3}\frac{\partial F(x;h_1,h_2,v_3)}{\partial v_3}dv_3+\int_{\varepsilon_1}^{h_1}\int_{\varepsilon_2}^{h_2}\frac{\partial^2 F(x;v_1,v_2,h_3)}{\partial v_1\,\partial v_2}dv_1dv_2+$$

$$+\int_{\varepsilon_1}^{h_1}\int_{\varepsilon_3}^{h_3}\frac{\partial^2 F(x;v_1,h_2,v_3)}{\partial v_1\,\partial v_3}dv_1dv_3+\int_{\varepsilon_2}^{h_2}\int_{\varepsilon_3}^{h_3}\frac{\partial^2 F(x;h_1,v_2,v_3)}{\partial v_2\,\partial v_3}dv_2dv_3-$$

$$-\int_{\varepsilon_1}^{h_1}\int_{\varepsilon_2}^{h_2}\int_{\varepsilon_3}^{h_3}\frac{\partial^3 F(x;v_1,v_2,v_3)}{\partial v_1\,\partial v_2\,\partial v_3}dv_1dv_2dv_3,$$

что совпадает с (5) при $n=3$. В общем случае доказательство аналогичное.

Преобразуем функцию $\tilde{\mathfrak{J}}^{\ell}(x;\varepsilon,h)$, входящую в формулу (5). На основании (4) имеем

$$\mathfrak{D}^{1^{\ell}}_{v^e}F(x;v^e,h^{e'})=$$

$$=\int_{E^n} f(x+y)\Big(\prod_{j\in e}\frac{d}{dv_j}[v_j^{-1}\,\Omega(y_j v_j^{-1})]\Big)\Big(\prod_{j\in e'} h_j^{-1}\,\Omega(y_j h_j^{-1})\Big)\,dy, \tag{7}$$

где, в силу (2),

$$\frac{d}{dv_j}\Big[v_j^{-1}\Omega(y_j v_j^{-1})\Big]=\frac{d}{dv_j}\Big[v_j^{-1}\mathcal{D}^k_{y_j v_j^{-1}}\Big(\frac{(y_j v_j^{-1})^{k-1}}{(k-1)!}\int_{-\infty}^{y_j v_j^{-1}}\mathcal{K}(t)\,dt\Big)\Big]=$$

$$=\mathcal{D}^k_{y_j}\Big[\frac{y_j^{k-1}}{(k-1)!}\,\frac{d}{dv_j}\Big(\int_{-\infty}^{y_j v_j^{-1}}\mathcal{K}(t)\,dt\Big)\Big]=-\frac{1}{v_j^2}\,\mathcal{D}^k\mathcal{L}(y_j v_j^{-1}), \tag{8}$$

$$\mathcal{L}(t)=\frac{1}{(k-1)!}\,t^k\mathcal{K}(t). \tag{9}$$

Сопоставляя (5)-(8), получаем

$$F(x;\varepsilon)=\sum_{e\subset e^n}\mathcal{J}^e(x;\varepsilon,h), \tag{10}$$

где

$$\mathcal{J}^e(x;\varepsilon,h)=$$

$$=\int_{\varepsilon^e}^{h^e}\Big(\prod_{j\in e}v_j^{-1}\Big)dv^e\int_{E^n} f(x+y)\Big(\prod_{j\in e}v_j^{-1}\mathcal{D}^k\mathcal{L}(y_j v_j^{-1})\Big)\Big(\prod_{j\in e'}h_j^{-1}\,\Omega(y_j h_j^{-1})\Big)\,dy. \tag{11}$$

Из формул (10) и (11) можно получить различные интегральные представления функции f, если учесть, что $F(x;\varepsilon)\to f(x)$ при $\varepsilon\to 0$ и что правая часть (10) зависит от произвольных параметров $h_1,\dots,h_n$, в то время как левая часть от них не зависит. Если еще предположить, что функция f имеет обобщенные производные в смысле С.Л.Соболева вида $\mathcal{D}^{\alpha^e}f$, $\forall e\subset e^n$, где α^e – вектор с целочисленными положительными компонентами размерности (1^e), то правая часть (10) выражается через эти производные.

Мы не будем рассматривать здесь все возможные следствия из формулы (10), а остановимся лишь на одном, приводящем к упоминавшемуся во введении формальному аналогу формулы Фурье.

Будем в дальнейшем предполагать, что $f\in L_p(E^n)$, $1\leqslant p<\infty$. Оценим $|\mathcal{J}^e(x;\varepsilon,h)|$. Для этого сначала оценим внутренний интеграл в правой части (11) с помощью неравенства Гельдера. Имеем

$$\Big|\int_{E^n} f(x+y)\Big(\prod_{j\in e}v_j^{-1}\mathcal{D}^k\mathcal{L}(y_j v_j^{-1})\Big)\Big(\prod_{j\in e'}h_j^{-1}\,\Omega(y_j h_j^{-1})\Big)\,dy\Big|\leqslant$$

$$\leqslant C_1 \|f\|_p \Big(\prod_{j\in e} v_j^{-\frac{1}{p}}\Big)\Big(\prod_{j\in e'} h_j^{-\frac{1}{p}}\Big),$$

где C_1 - константа, не зависящая от v_j, h_j и функции f. Таким образом,

$$|\mathfrak{J}^e(x;\varepsilon,h)| \leqslant C_2 \|f\|_p \Big(\prod_{j\in e} \int_{\varepsilon_j}^{h_j} v_j^{-1-\frac{1}{p}} dv_j\Big)\Big(\prod_{j\in e'} h_j^{-\frac{1}{p}}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \|f\|_p \Big(\prod_{j\in e} \varepsilon_j^{-\frac{1}{p}}\Big)\Big(\prod_{j\in e'} h_j^{-\frac{1}{p}}\Big). \qquad (12)$$

Положим теперь $\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_n=\varepsilon$, $h_1=\ldots=h_n=h$ *). Тогда (12) примет вид:

$$|\mathfrak{J}^e(x;\varepsilon,h)| \leqslant C_3 \|f\|_p \, \varepsilon^{-\frac{|e|}{p}} h^{-\frac{|e'|}{p}}.$$

Если $e' \neq \emptyset$, то, поскольку $p<\infty$, при $h\to\infty$ последний множитель в правой части неравенства стремится к нулю, а другие множи- при фиксированном $\varepsilon>0$ остаются ограниченными. Поэтому все слагаемые в правой части (10), кроме слагаемого, соответствующего $e=e^n$ (в этом случае $e'=\emptyset$), будут стремится к нулю при $h\to\infty$. Следовательно, формулу (10) можно переписать в виде:

$$F(x;\varepsilon) =$$

$$=\lim_{h\to\infty} \int_\varepsilon^h \ldots \int_\varepsilon^h (v_1^{-2}dv_1)\cdots(v_n^{-2}dv_n) \int_{E^n} f(x+y)\Big(\prod_{j=1}^n \mathfrak{D}^k \mathcal{L}(y_j,v_j^{-1})\Big)dy.$$

Учитывая, что при $\varepsilon\to 0$ $F(x;\varepsilon)\to f(x)$ почти везде, имеем

$$f(x) =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{h\to\infty} \int_\varepsilon^h \ldots \int_\varepsilon^h (v_1^{-2}dv_1)\ldots(v_n^{-2}dv_n) \int_{E^n} f(x+y)\Big(\prod_{j=1}^n \mathfrak{D}^k \mathcal{L}(y_j v_j^{-1})\Big)dy.$$

Полагая под интегралом $v_j=\frac{1}{u_j}$ $(j=1,\ldots,n)$, переставляя пределы интегрирования и заменяя затем $\frac{1}{h}$ на ε, а $\frac{1}{\varepsilon}$ на h, получаем

*) В дальнейшем ε и h - числа.

$$f(x)=\lim_{h\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{h}\dots\int_{\varepsilon}^{h}du_1\dots du_n\int_{E^n}f(y)\Big(\prod_{j=1}^{n}\mathfrak{D}^{k}\mathcal{L}((y_j-x_j)u_j)\Big)dy. \qquad (13)$$

Эта формула и явилась целью заметки. Напомним, что она получена для $f\in L_p(E^n)$, $1\leqslant p<\infty$, а функция $\mathcal{L}(t)$ определена формулой (9).

Если $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)$, $0\leqslant\ell_i$ ℓ_i- целые $(i=1,\dots,n)$, и функция f имеет обобщенную производную $\mathfrak{D}^{\ell}f=\frac{\partial^{\ell_1}}{\partial x_1^{\ell_1}}\cdots\frac{\partial^{\ell_n}}{\partial x_n^{\ell_n}}f$, а число k , фигурирующее в ядре, выбрано так, что $k\geqslant\max_{i=1,\dots,n}\ell_i$, то (13) можно переписать в виде

$$f(x)=(-1)^{|\ell|}\lim_{h\to\varepsilon}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{h}\dots\int_{\varepsilon}^{h}\Big(\prod_{j=1}^{n}u_j^{-\ell_j}\Big)du_1,\dots,du_n\int_{E^n}\mathfrak{D}^{\ell}f(y)\times$$

$$\times\Big(\prod_{j=1}^{n}\mathfrak{D}^{k-\ell_j}\mathcal{L}[(y_j-x_j)u_j]\Big)dy. \qquad (13')$$

Заметим, что не обязательно требовать, чтобы $\mathcal{K}(t)$, а, следовательно, и $\Omega(t)$ и $\mathcal{L}(t)$ были бесконечно дифференцируемыми. Достаточно, чтобы $\mathcal{K}\in C_0^k(E^1)$. При этом, если иметь в виду только формулу (13) (а не (13$'$)), то можно в качестве ядра усреднения $\tilde{\Omega}(x)$ взять функцию $\tilde{\mathcal{K}}(x)=\prod_{i=1}^{n}\mathcal{K}(x_i)$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ильин В.П. Об условиях справедливости неравенств между L_p -нормами частных производных функций многих переменных. Труды МИАН, 96, 1968, 205-242.

I. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. П. Изд. "Мир",Москва,1965.