

УДК 681.3.058

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В.Н. КОНДРАТЬЕВ, В.Ф. КРАВЧЕНКО, академик АН УССР В.Л. РВАЧЕВ

**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ СПЛАЙНОВ
СУПЕРПОЗИЦИЯМИ НЕКОТОРОЙ БАЗИСНОЙ СИСТЕМЫ**

1. Применение аппаратных средств реализации функций в цифровой технике [1, 2] требует развития математических методов представления функций нескольких аргументов суперпозициями простейших бинарных операций и функций одного аргумента. Наиболее общие результаты в этом направлении были получены в [3] для класса непрерывных функций. В [4] рассматривался вопрос использования теории полугрупп для возможностей представления функций нескольких аргументов, заданных таблицами. В настоящей заметке изложен метод представления многомерных сплайнов [5] суперпозициями операций типа сложение и функций одного аргумента. Использование сплайнов, а также применение аппарата R -функций [6] позволило не только расширить класс представляемых функций по сравнению с [3], но и существенно уменьшить сложность соответствующих представлений.

2. Пусть $G_\Phi = \{z_1 \pm z_2; \varphi_i(z), \varphi \in \Phi; x_1, x_2, \dots, x_n; 0, 1, \dots, N-1\}$ — некоторая базисная система, где Φ — произвольное множество функций одного аргумента. Пусть также для каждого набора индексов i_1, i_2, \dots, i_n , для которых $1 \leq i_j \leq N_j, j = 1, 2, \dots, n$, определен ряд суперпозиций ${}_s t_{i_1 \dots i_n}$ и полиномов ${}_s P_{i_1 \dots i_n}^{(r)}({}_s t_{i_1 \dots i_n})$. степени не более $r \geq 0, s = 1, 2, \dots, m_{i_1 \dots i_n}$. Будем рассматривать многомерные сплайны

$$(1) \quad f(x) = \sum_{s=1}^{m_{i_1 \dots i_n}} {}_s P_{i_1 \dots i_n}^{(r)}({}_s t_{i_1 \dots i_n}),$$

если $g_{i_j-1}^{(j)} \leq x_j \leq g_{i_j}^{(j)}$ для всех $j = 1, 2, \dots, n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [v_1, w_1] \times [v_2, w_2] \times \dots \times [v_n, w_n]$, где сетка $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ и

$$\Delta_j: v_j = g_0^{(j)} < g_1^{(j)} < \dots < g_{N_j}^{(j)} = w_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Условимся, что при наличии разрывов в узлах $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$

$$f(g) = \lim_{x \rightarrow g+0} f(x).$$

Представление $f(x)$ будем искать в базисной системе G_Ψ , которая в общем случае является некоторым расширением G_Φ . Для оценки сложности представления f введем критерий $\sigma(f)$ как число вхождений различных одномерных функций в соответствующее выражение, причем $\varphi(\psi(z))$ и $\varphi(z) + \psi(z)$ в составе выражения будем рассматривать как одно вхождение соответственно.

Обозначим: $N = \prod_{j=1}^n N_j, T = \bigcup_{i_1=1}^{N_1} \dots \bigcup_{i_n=1}^{N_n} \bigcup_{s=1}^{m_{i_1 \dots i_n}} \{ {}_s t_{i_1 \dots i_n} \}, m = \text{Card } T.$

Введем некоторые биекции: $\eta: T \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}, \xi: \Delta_1^{(0)} \times \Delta_2^{(0)} \times \dots \times \Delta_n^{(0)} \rightarrow$

$\rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}$, $\Delta_j^{(0)} = \Delta_j - \{g_0^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, если

$$\xi(g_{i_1}^{(1)}, g_{i_2}^{(2)}, \dots, g_{i_n}^{(n)}) = \sum_{j=1}^n \left((i_j - 1) \cdot \prod_{k=1}^{j-1} N_k \right).$$

(Предполагается, что $\prod_{k=1}^0 N_k = 1$.) Пусть также для $i = 1, 2, \dots, N$, $i = \xi(g_{i_1}^{(1)}, g_{i_2}^{(2)}, \dots, g_{i_n}^{(n)}) + 1$

$$\gamma_i(x) = \prod_{j=1}^n B_0((x_j - g_{i_j-1}^{(j)})(g_{i_j}^{(j)} - g_{i_j-1}^{(j)})^{-1}),$$

где B_0 — сплайны Шенберга нулевого порядка. Тогда (1) для всех наборов индексов i_1, i_2, \dots, i_n можно записать одним выражением

$$(2) \quad f(x) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N P_{ik}^{(r)}(t_k) \cdot \gamma_i(x),$$

где ${}_s t_{i_1 \dots i_n} = t_k$, ${}_s P_{i_1 \dots i_n}^{(2)}(t) = P_{ik}^{(r)}(t)$ при $\xi(g_{i_1}^{(1)}, g_{i_2}^{(2)}, \dots, g_{i_n}^{(n)}) = i - 1$ и $\eta({}_s t_{i_1 \dots i_n}) = k$.

Л е м м а 1. Если $B_0(z) \in \Psi(z)$, то для каждого $k = 1, 2, \dots, m$ существует G_Ψ -реализуемая функция

$$(3) \quad \rho_k(x) = \sum_{i=1}^N (\varphi_k(t_k) + i - 1) \cdot \gamma_i(x),$$

где $\varphi_k(z)$ — производная функция из $\Phi(z)$.

Для всех $j = 1, 2, \dots, n$ введем функцию

$$f_j(x_j) = \sum_{i=1}^{N_j} \left((i-1) \prod_{k=1}^{j-1} N_k \cdot B_0((x_j - g_{i_j-1}^{(j)})(g_{i_j}^{(j)} - g_{i_j-1}^{(j)})^{-1}) \right).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^n f_j(x_j) = \sum_{i=1}^N (i-1) \cdot \gamma_i(x),$$

откуда с учетом $\sum_{i=1}^N \gamma_i(x) = 1$ из (3) получим

$$(4) \quad \rho_k(x) = \varphi_k(t_k) + \sum_{j=1}^n f_j(x_j).$$

Пусть далее в (2) $P_{ik}^{(r)}(t) = \sum_{s=0}^r a_{ik}^{(s)} t^s$. Введем $(r+1)N$ -мерный вектор

$$A_{kr} = \| a_{1k}^{(r)} a_{1k}^{(r-1)} \dots a_{1k}^{(0)} \quad a_{2k}^{(r)} \dots a_{Nk}^{(r)} \quad a_{Nk}^{(r-1)} \dots a_{Nk}^{(0)} \|$$

и $(r + 1)N$ -мерный функциональный вектор

$$\Gamma_{kr} = \| t_k^r \gamma_1(x) \quad t_k^{r-1} \gamma_1(x) \dots \gamma_1(x) \quad t_k^r \gamma_2(x) \dots t_k^r \gamma_N(x) \quad t_k^{r-1} \gamma_N(x) \dots \gamma_N(x) \|.$$

Тогда из (2) следует

$$(5) \quad f(x) = \sum_{k=1}^m A_{kr} \times \Gamma_{kr}^T.$$

Представление функций $\rho_k(x)$ выражением (3), с одной стороны, и (4) — с другой, дает основание сформулировать следующую лемму.

Лемма 2. Если для каждого $k = 1, 2, \dots, m$ существует система G_Ψ -реализуемых функций $\lambda_{ik}(r)$, $i = 1, 2, \dots, (r + 1)N$, $B_0(z) \in \Psi(z)$, образующих векторы

$$H_k = \| \lambda_{1k}(\rho_k(x)) \quad \lambda_{2k}(\rho_k(x)) \dots \lambda_{(r+1)N,k}(\rho_k(x)) \|,$$

а также существует неособая числовая матрица U_k порядка $(r + 1)N$, для которой

$$(6) \quad U_k \times \Gamma_{kr}^T = H_k,$$

то

$$(7) \quad f(x) = \sum_{k=1}^m A_{kr} \times U_k^{-1} \times H_k.$$

Очевидно, (7) следует непосредственно из (5) и (6).

Теорема 1. Пусть в (2) $m = 1$, $r = 0$, $P_{i1}^{(0)}(t_1) \equiv a_i$ для $i = 1, 2, \dots, N$ и либо $\Psi(z) = \Phi(z) \cup \{B_0(z)\} \cup \{z^s\}$, либо $\Psi(z) = \Phi(z) \cup \{B_0(z)\} \cup \{|z|\}$ для целого $s \geq 0$. Тогда существует G_Ψ -реализуемая функция f_0 , для которой

$$(8) \quad f(x) = f_0 \left(\sum_{j=1}^n f_j(x_j) \right).$$

Выберем в (4) $\varphi_1(t_1) = 1$, т.е. $\rho_1(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) + 1$, $H_1 = \| 1 \rho_1(x) (\rho_1(x))^2 \dots (\rho_1(x))^{N-1} \|$, $U_1 = \| u_{ij} \|$, где $u_{ij} = j^{i-1}$ для $i, j = 1, 2, \dots, N$. Тогда в соответствии с леммой 2 коэффициенты при степенях $\rho_k(x)$ в полиноме, определяющем f_0 , находятся из вектора $A_{10} \times U_1^{-1}$. Введем далее функцию $\theta_s(z)$ для $s = 0, 1, \dots, N - 1$ с помощью R-дизъюнкции [6]:

$$\theta_s(z) = 0 \vee_\alpha (z - s) = 2^{-1} \cdot (|z - s| + z - s).$$

Выберем $H_1 = \| \theta_0(\rho_1(x)) \quad \theta_1(\rho_1(x)) \dots \theta_{N-1}(\rho_1(x)) \|$, $U_1 = \| u_{ij} \|$, где $u_{ij} = \theta_{i-1}(j)$ для $i, j = 1, 2, \dots, N$. В этом случае f_0 можно выразить в общем виде:

$$f_0(z) = \sum_{i=1}^N (a_{i-2} - 2a_{i-1} + a_i) \cdot \theta_{i-1}(z + 1),$$

где $a_{-1} = a_0 = 0$.

Теорема 2. Если в (2) $r \geq 1$, $\Psi(z) = \Phi(z) \cup \{B_0(z)\} \cup \{z^s\} \cup \{|z|\} \cup \{\text{sign } z\}$, то $f(x)$ может быть представлена G_Ψ -реализуемой функцией

$$(9) \quad f(x) = \sum_{k=1}^m f_{0k}(f_{1k}(t_k) + \sum_{j=1}^n f_j(x_j)).$$

Пусть в (4) $\varphi_k(t_k) = p_k t_k + q_k$, где

$$p_k = (\max_x t_k - \min_x t_k + b_k)^{-1}, \quad q_k = -(\min_x t_k - c_k) \cdot (\max_x t_k - \min_x t_k + b_k)^{-1}$$

для любых b_k, c_k , удовлетворяющих неравенству $0 \leq c_k \leq b_k$, откуда следует $0 \leq p_k t_k + q_k \leq 1$. Пусть, далее,

$$\lambda_{ik}(\rho_k(x)) = \begin{cases} (\theta_{s-1}(\rho_k(x)))^{r-l} & \text{при } i \bmod r + 1 \neq 0, \\ \text{sing } \theta_{s-1}(\rho_k(x)) & \text{при } i \bmod r + 1 = 0 \end{cases}$$

для $i = 1, 2, \dots, (r+1)N$, $s = \left[\frac{i-1}{r+1} \right] + 1$, $l = i - 1 - \left[\frac{i-1}{r+1} \right] \cdot (r+1)$, $[a]$

обозначена целая часть числа a .

Каждый элемент $u_{ij}^{(k)}$ матрицы U_k представим как

$$u_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot p_k^{\alpha_2} (q_k + \alpha_3)^{\alpha_1}, & j \geq i, (j-1) \bmod r + 1 \geq (i-1) \bmod r + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$\alpha_1 = (j-1) \bmod r + 1 - (i-1) \bmod r + 1, \quad \alpha_2 = r - (j-1) \bmod r + 1,$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{j-1}{r+1} \right] - \left[\frac{i-1}{r+1} \right].$$

Нетрудно убедиться, что U_k — треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали, причем для соответствующих H_k и U_k выполняется (6). Обозначив $f_{1k}(t_k) = p_k t_k + q_k$ и определив из вектора $A_{kr} \times U_k^{-1}$ коэффициенты полиномов, задающих f_{0k} , получим (9).

3. Из (8) и (9) следует, что $\sigma(f) = n + 1$ и $\sigma(f) \leq m + n + \sum_{k=1}^m \sigma(t_k)$ соответственно. Интересно заметить, что полученные оценки сложности совершенно не зависят от числа узлов N и степени r соответствующих полиномов.

Иногда целесообразно использовать другой критерий оценки выражений (9), минимизирующий число $\sigma_1(f)$ различных функциональных символов в соответствующем представлении. Для этого можно выбрать

$$p_k = \left(\max_{1 \leq k \leq m} \max_x t_k - \min_{1 \leq k \leq m} \min_x t_k \right)^{-1},$$

$$q_k = - \min_{1 \leq k \leq m} \min_x t_k \cdot \left(\max_{1 \leq k \leq m} \max_x t_k - \min_{1 \leq k \leq m} \min_x t_k \right)^{-1}$$

для всех $k = 1, 2, \dots, m$. Тогда из (9) получим

$$(10) \quad f(x) = \sum_{k=1}^m f_{0k}(f_{00}(t_k)) + \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

при f_{00} , определенном выбранными выше значениями p_k и q_k , откуда $\sigma_1(f) = m + n + 1$.

4. Изложенную методику представления сплайнов легко распространить на любые многомерные полиномиальные сплайны. Для этого достаточно выра-

зять произведения $x_j^l \cdot x_k^r$ степеней переменных тождествами типа $x_j^l \cdot x_k^r = 2^{-1} \cdot (x_j^l + x_k^r)^2 - 2^{-1} x_j^{2l} - 2^{-1} x_k^{2r}$, которые реализуются любыми базисными системами, включающими в себя степенные функции. Так, представление параболических двумерных сплайнов, сумма степеней переменных в которых не превосходит 2, согласно (10) будет содержать 6 функциональных символов, т.е.

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^2 f_{0k} (f_{00}(x_k) + f_1(x_1) + f_2(x_2)) + f_{03} (f_{00}(x_1 + x_2) + f_1(x_1) + f_2(x_2)).$$

Дальнейшее обобщение полученных результатов может быть получено за счет распространения области определения кусочно-элементарных сплайнов на произвольные множества, заданные уравнениями $\omega_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$ в соответствии с [6]. Согласно [6] на этих множествах можно определить пучок функций φ , выбрав в качестве нагружающих функций числа $0, 1, \dots, N - 1$. Используя неопределенные компоненты в пучке, можно найти оптимальное согласно рассмотренным критериям представление φ в соответствующей базисной системе. Последующие действия по представлению сплайна не отличаются от описанных выше с учетом замены в (4),

(9) и (10) выражений $\sum_{j=1}^n f_j(x_j)$ на полученное представление φ .

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
27 XI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухомад Ю.Ф. Проектирование специализированных микропроцессорных вычислителей. Новосибирск: Наука, 1981. 160 с.
2. Потанов В.Т., Флоренсов А.Н. — Автоматика и вычисл. техн., 1977, № 6, с. 73–77.
3. Колмогоров А.Н. — ДАН, 1957, т. 114, № 5, с. 953–956.
4. Кондратьев В.Н., Кравченко В.Ф. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 2, с. 66–69.
5. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 551 с.