

УДК 517.946.9

О ВЛИЯНИИ ДВОЙНОЙ РЕШЕТКИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ НА ИЗЛУЧЕНИЕ АКТИВНОГО ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО СЛОЯ

В. Ф. КРАВЧЕНКО

Имеется ряд работ, посвященных изучению влияния металлических решеток на излучение активным плоскопараллельным слоем [1—3]. В данной работе методом, развитым в [4, 5], дается строгое решение электродинамической задачи о влиянии решетки специальной геометрической формы, нанесенной с обеих сторон симметрично на плоскопараллельный активный слой в случае, когда вектор \mathbf{E} параллелен образующим лентам решетки. В работе выведено условие самовозбуждения, а также основные энергетические характеристики: плотность энергии, выходная мощность излучения.

Полученные аналитические выражения являются удобными для численного счета и позволяют сделать вывод о том, что энергетическими характеристиками излучения можно управлять с помощью решеток, нанесенных на стенки слоя. Кроме того, выполненные вычисления для обычных решеток позволяют заключить, что это управление может быть весьма эффективным.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ

Пусть на плоскопараллельный активный слой толщиной a с показателем преломления среды N нанесены с двух сторон симметрично решетки специальной геометрической формы (т. е. решетки, на каждом периоде которых расположены две идеально проводящие и бесконечно тонкие ленты различной ширины) с чередующимися полосками d и d_1 , периодом l . Обозначим пространство над первой решеткой ($z \geq 0$) областью I, пространство между решетками ($-a \leq z \leq 0$) областью II и пространство под нижней решеткой ($z \leq -a$) областью III. Без уменьшения общности будем считать, что окружающее пространство (I, III) — вакуум.

Математическая постановка задачи состоит в отыскании однозначного решения уравнения Гельмгольца для n -ой гармоники

$$\frac{\partial^2 E_{nx}^{(j)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{nx}^{(j)}}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon_j E_{nx}^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

в каждой из областей (I—III) (см. рис.), удовлетворяющего граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} E_{Iz} = E_{IIIz} = 0 \\ E_{Iz} = E_{IIIz}; \quad \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial E_{Iz}}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial E_{IIIz}}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad z = 0 \quad \begin{array}{l} \text{(на ленте)} \\ \text{(на щели),} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} E_{IIIz} = E_{IIIz} = 0 \\ E_{IIIz} = E_{IIIz}; \quad \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial E_{IIIz}}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial E_{IIIz}}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad z = -a \quad \begin{array}{l} \text{(на ленте)} \\ \text{(на щели).} \end{array} \quad (2)$$

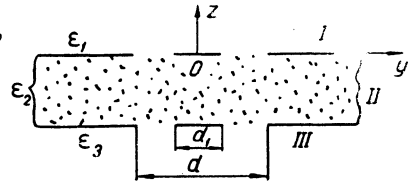
Компоненты поля областей (I—III) удовлетворяют условию излучения на бесконечности.

Если искать решение уравнения (1) в виде $e^{i(h_n^{(j)}z + \frac{2\pi n}{l}y)}$, то постоянная распространения электромагнитных волн для каждой из сред будет равна:

$$h_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} \quad \text{для сред (I, III),}$$

$$h_n = \sqrt{k^2 N^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}$$

для среды (II).



В области I электромагнитное поле является уходящим в направлении оси $z > 0$. Во второй области поле является суперпозицией плоских электромагнитных волн, которые распространяются или затухают в направлении от одной решетки специальной геометрической формы к другой; в третьей области имеется поле, уходящее в направлении против оси $z < -a$. Электромагнитное поле, возникающее за счет индуцированного излучения вещества, является периодичным вдоль оси OY , поэтому поле \mathbf{E} для каждой области можно записать в виде ряда Фурье по одним и тем же функциям $e^{i\frac{2\pi n}{l}y}$. Тогда поле \mathbf{E} для соответствующих областей принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_I &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ih_n'z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} \quad (z > 0), \\ \mathbf{E}_{II} &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n e^{-ihnz} + C_n e^{ihn(z+a)} \right\} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} \quad (0 > z > -a), \quad (3) \\ \mathbf{E}_{III} &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-ihn(z+a)} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} \quad (z < -a). \end{aligned}$$

Из уравнений Максвелла находим составляющие \mathbf{H} для каждой из областей соответственно (временный множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем).

$$\mathbf{H}_I = \mathbf{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{h_n'}{k} e^{ih_n'z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} - \mathbf{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{n}{x} e^{ih_n'z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} \quad (z > 0),$$

$$\begin{aligned} H_{II} = j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -B_n e^{ih_n z} + C_n e^{ih_n(z+a)} \right\} \frac{h_n}{k} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} - \\ - k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n e^{-ih_n z} + C_n e^{ih_n(z+a)} \right\} \frac{n}{\kappa} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} \quad (0 > z > -a), \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{III} = j \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-D_n) \frac{h'_n}{k} e^{-ih_n(z+a)} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} - \\ - k \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \frac{n}{\kappa} e^{ih_n(z+a)} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} \quad (z < -a), \end{aligned}$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — неизвестные коэффициенты Фурье в выражениях полей (3), (4).

Вследствие периодичности нашей структуры для отыскания поля во всем пространстве достаточно найти его на одном из периодов. Неизвестные коэффициенты разложений (3), (4) находятся из граничных условий (2).

Подставляя выражения полей (3), (4) в граничные условия (2), получим ряд соотношений между дифракционными гармониками, выполняющимися на всем периоде и на его частях — на щели и металле: $A_n = B_n + C_n e^{ih_n a}$, $D_n = B_n e^{ih_n a} + C_n$;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n + C_n e^{ih'_n a} \right\} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (\text{на ленте}), \quad (4a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n e^{ih'_n a} + C_n \right\} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} = 0 \quad \text{при } z = -a \quad (\text{на ленте}),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n (h'_n + h_n) - C_n (h'_n - h_n) e^{ih'_n a} \right\} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (\text{на щели}), \quad (4б)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n (h'_n - h_n) e^{ih'_n a} + C_n (h'_n + h_n) \right\} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} = 0 \quad \text{при } z = -a \quad (\text{на щели}).$$

Рассматриваемая нами решетка специальной геометрической формы симметрична относительно плоскости $y = 0$, поэтому область изменения y для лент одна и та же в плоскостях $z = 0$, а также $z = -a$. Аналогичные рассуждения имеют место и для участка щелей. Следовательно, если сложить и вычесть соотношения, которые выполняются на ленте в (4а) и (4б), то новые соотношения можно записать под одним индексом суммирования и вынести общий множитель $\exp \left\{ i \frac{2\pi n}{l} y \right\}$. Прделав аналогичную операцию с соотношениями на щелях, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (B_n + C_n)(1 + e^{ih'_n a}) e^{i \frac{2\pi n}{l} y} = 0 \quad (\text{на ленте}) \quad (5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (B_n - C_n)(1 - e^{ih'_n a}) e^{i \frac{2\pi n}{l} y} = 0.$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (B_n + C_n)(h'_n + h_n) \left(1 - \frac{h'_n - h_n}{h'_n + h_n} e^{ih'_n a}\right) e^{i \frac{2\pi n}{l} y} = 0 \quad (\text{на щели}) \quad (6)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (B_n - C_n)(h'_n - h_n) \left(1 + \frac{h'_n - h_n}{h'_n + h_n} e^{ih'_n a}\right) e^{i \frac{2\pi n}{l} y} = 0.$$

Следует заметить, что физический смысл имеет то значение h_n и h'_n , у которого $\text{Im } h_n > 0$, $\text{Im } h'_n > 0$, а при $\text{Im } h_n = 0$, $\text{Im } h'_n = 0$ $\text{Re } h_n > 0$, $\text{Re } h'_n > 0$ (в нашем случае условия излучения эквивалентны принципу погашаемости).

II. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Сделаем замену: $\alpha_n = (B_n + C_n)(1 + e^{ih'_n a})$; $\beta_n = (B_n - C_n)(1 - e^{ih'_n a})$;
 $\varphi = \frac{2\pi y}{l}$; $\theta = \frac{\pi(l-d)}{l}$, $\theta_1 = \frac{\pi d_1}{l}$. Тогда

$$\sum_{n \neq 0} X_n e^{in\varphi} = 0, \quad |\varphi| < \theta, \quad \theta_1 < |\varphi| < \pi, \quad (7)$$

$$\sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = i \kappa \hat{G}_0^x \alpha_0 + \sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} \psi'_n e^{in\varphi}, \quad \theta_1 < |\varphi| < \theta, \quad (8)$$

$$\sum_{n \neq 0} Y_n e^{in\varphi} = 0, \quad |\varphi| < \theta, \quad \theta_1 < |\varphi| < \pi, \quad (9)$$

$$\sum_{n \neq 0} Y_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = i \kappa \hat{G}_0^y \beta_0 + \sum_{n \neq 0} Y_n \frac{|n|}{n} \xi'_n e^{in\varphi}, \quad \theta_1 < |\varphi| < \theta, \quad (10)$$

где

$$\psi'_n = 1 + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{|n|} \frac{\gamma_n + \gamma'_n - (\gamma_n - \gamma'_n) e^{ih_n a}}{1 + e^{ih_n a}}; \quad \gamma_n = \sqrt{\frac{\kappa^2}{n^2} N^2 - 1};$$

$$\xi'_n = 1 + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{|n|} \frac{\gamma_n + \gamma'_n - (\gamma_n - \gamma'_n) e^{ih_n a}}{1 - e^{ih_n a}}; \quad \gamma'_n = \sqrt{\frac{\kappa^2}{n^2} - 1}.$$

Системы уравнений (7)–(10) могут быть решены методом, предложенным в [4, 5].

Условие равенства нулю системы линейных однородных алгебраических уравнений, полученных из (7), (8), а также из (9) — (10) дают условия самовозбуждения системы и принимают следующий вид:

$$\hat{G}_0^x = i \frac{D_{0\psi'}}{\kappa \Delta_{0\psi'}}, \quad (11)$$

$$\hat{G}_0^y = i \frac{D_{0\xi'}}{\kappa \Delta_{0\xi'}}, \quad (12)$$

где $D_{0\psi'}$, $\Delta_{0\psi'}$ и $D_{0\xi'}$, $\Delta_{0\xi'}$ — определители системы, которые вычислены в [5] и имеют следующий вид:

$$\Delta = \Delta_0, \quad \text{а} \quad D = D_0$$

(при $n = 0$, $\xi'_n = \psi'_n = 0$ рассматривается длинноволновое приближение, когда $\kappa = \frac{kl}{2\pi} \ll 1$). Тогда

$$\Delta_0 = -4(R_{[\sigma]} \cdot \tilde{R}_{[\sigma]}^1 - R_{[\sigma]} \cdot R_{[\sigma]}^1), \quad (13)$$

$$D_0 = -2(R_{[\sigma]}^1 - \tilde{R}_{[\sigma]}^1),$$

где

$$\tilde{R}_{[\sigma]}^1 = \frac{1}{2\sqrt{2(1-u)}} \ln \frac{1-v}{32} \frac{(1-u + \sqrt{2(1-u)})^2}{(1-u)^2},$$

$$R_{[\sigma]}^1 = \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}} \ln \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u + \sqrt{2(1-u)}},$$

$$\tilde{R}_{[\sigma]} = \tilde{R}_{[\sigma]}^1 - \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1-u}{2}} \right); \quad R_{[\sigma]} = R_{[\sigma]}^1 - \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{2},$$

(здесь параметры решетки выражаются через $u = \cos \theta_1$ и $v = \cos \theta$).

Таким образом, ясно, что совместное решение дисперсионных уравнений (11) — (12) дает условие самовозбуждения слоя с прилегающими решетками.

В [6] было показано, что в плоскопараллельном слое поток излучаемой радиации направлен от середины слоя к краям, поэтому амплитуды дифракционных гармоник B_n и C_n будут одинаковыми по модулю и связаны между собой соотношением $B_n = (-1)^s C_n$ ($s = 1, 2, \dots$).

В том случае, когда s четно, используется только выражение (11), а когда s нечетно, роль условия самовозбуждения играет уравнение (12). Следует отметить то обстоятельство, что в общем виде уравнения (11) — (12) представляют собой громоздкие трансцендентные уравнения, требующие решения на ЭВМ.

Исследуем случай, когда s четно.

III. УСЛОВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Преобразуем уравнение (11) к виду

$$\frac{N+1}{2} \frac{1 - \sqrt{r} e^{i(kNa-\delta)}}{1 + e^{ikNa}} = \frac{i}{\kappa} \frac{Q_0}{\ln \frac{1+u}{2}}, \quad (14)$$

где

$$Q_0 = \frac{1-L}{\left\{ -L + \frac{2 \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1-u}{2}} \right)}{\ln \frac{1+u}{2}} \right\}}; \quad L = \frac{\bar{R}_{[\sigma]}}{R_{[\sigma]}^1};$$

$$\frac{N-N_1}{N+N_1} = \sqrt{r} e^{-i\delta}.$$

После ряда вычислений (14) несколько упрощается:

$$\frac{1 - \sqrt{r} e^{i(kNa-\delta)}}{1 + e^{ikNa}} = \frac{i}{\kappa} \frac{2Q_0}{(N+1) \ln \frac{1+u}{2}} = i\bar{Q}_0 t e^{-i\delta_1}. \quad (15)$$

Введем обозначения:

$$t e^{-i\delta_1} = \frac{2}{\kappa(N+1) \ln \frac{1+u}{2}}; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{-2N_0 \chi}{N_0^2 - 1 + \chi^2}; \quad \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\chi}{N_0 + 1}.$$

Учитывая, что δ и δ_1 незначительны, представим (15) следующим образом:

$$\sqrt{R} e^{i \left(2\pi N \frac{a}{\lambda} + \hat{\gamma} \right)} = 1, \quad (16)$$

где

$$R = \frac{r + \bar{Q}_0^2 t^2}{1 + \bar{Q}_0^2 t^2},$$

$$\hat{\gamma} = \operatorname{arctg} \frac{\bar{Q}_0 t}{\sqrt{r}} + \operatorname{arctg} \bar{Q}_0 t + \tilde{\gamma}',$$

$\tilde{\gamma}'$ — малая поправка. Тогда условие самовозбуждения (16) имеет вид

$$R e^{-\kappa a} = 1, \quad \kappa N_0 a + \hat{\gamma} = 2\pi s \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Зная условие самовозбуждения плоскопараллельного слоя, можно определить энергетические характеристики для электрического и магнитного полей, а также выходную мощность излучения. Для слоя с решетками специальной геометрической формы энергетические характеристики таковы:

$$U_s = \frac{1}{2} U_0 \left[1 - \left(\frac{\lambda \ln R}{4\pi N_0 a} \right)^2 \right] \left\{ \operatorname{ch} \left(\frac{\xi'}{a} \ln R \right) + \cos \left[(2\pi s - \hat{\gamma}) \frac{\xi'}{a} \right] \right\}, \quad (18)$$

$$U_m = \frac{1}{2} U_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda \ln R}{4\pi N_0 a} \right)^2 \right] \left\{ \operatorname{ch} \left(\frac{\xi'}{a} \ln R \right) - \cos \left[(2\pi s - \hat{\gamma}) \frac{\xi'}{a} \right] \right\};$$

$$U_{\text{общ}} = U_s + U_m = U_0 \left\{ \operatorname{ch} \left(\frac{\xi'}{a} \ln R \right) - \right.$$

$$-\left(\frac{\lambda \ln R}{4\pi N_0 a}\right)^2 \cos \left[(2\pi s - \hat{\gamma}) \frac{\xi'}{a} \right] \} \quad (19)$$

$$\mathbf{W} = -\mathbf{k} U_0 \frac{c}{N_0} \left\{ \operatorname{sh} \left(\frac{\xi'}{a} \ln R \right) + \frac{\lambda \ln R}{4\pi N_0 a} \sin \left[(2\pi s - \hat{\gamma}) \frac{\xi'}{a} \right] \right\}, \quad (20)$$

где $\xi' = z + \frac{a}{2}$; $U_0 = |B_0'|^2 \frac{N_0^2}{4\pi}$.

Неопределенной остается величина U_0 , которую можно найти, привлекая теорию нелинейной оптики [6]. После чего без учета осциллирующих членов (19), (20) соответственно придадим вид

$$W = -\frac{c}{N_0 a} \frac{K_0 a - \ln R}{R - 1} \sqrt{R} \operatorname{sh} \left[\left(\frac{z}{a} + \frac{1}{2} \right) \ln R \right], \quad (21)$$

$$U_{\text{общ}} = \frac{1}{a} \frac{K_0 a - \ln R}{R - 1} \sqrt{R} \operatorname{ch} \left[\left(\frac{z}{a} + \frac{1}{2} \right) \ln R \right]. \quad (22)$$

IV. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Из соотношения (17) нетрудно показать, что оно переходит в выражение (1) работы [6], если предположить, что решетки отсутствуют ($-u = v = 1$), так как в этом случае $R = r$, $\tilde{\gamma} = -\delta$. Можно также убедиться и в том, что плотность внутренней радиации, выходная мощность излучения для активного изотропного слоя с прилегающими решетками специальной геометрической формы, полученные в данной работе, соответствуют их значениям, вычисленным в [6]. Поэтому соображения, высказанные в [6] относительно r , в полной мере относятся и к R . Так как в R (см. (16)) входят геометрические размеры решетки специальной формы: l , d , d_1 и $\kappa = \frac{l}{\lambda}$, а в свою очередь

энергетический коэффициент отражения R содержится в удобных для расчетов аналитических выражениях (21), (22), то, задавая параметры двойной решетки специальной геометрической формы, можно, меняя величины r , $p = \frac{\kappa}{2} (N_0 + 1)$, $u = \cos \frac{\pi d}{l}$, $v = \cos \frac{\pi d_1}{l}$, управлять излучением плоскопараллельного слоя при соответствующей поляризации.

Численные расчеты, проведенные в [2], показывают, что наличие прилегающих решеток увеличивает энергетический коэффициент отражения (следовательно, увеличивается выходная мощность излучения, особенно при небольших r), и, таким образом, подтверждают идею о практической возможности эффективного управления излучением слоя.

Эти соображения в полной мере распространяются также и на те результаты, которые можно получить из (21), (22).

Литература

1. Третьяков О. А., Шестопапов В. П. Оптика и спектроскопия, **15**, вып. 5, 1963.
2. Третьяков О. А., Шестопапов В. П. Оптика и спектроскопия, **18**, вып. 2, 1965.

3. Кравченко В. Ф. Оптика и спектроскопия, **20**, вып. 1, 1966.
4. Агранович З. С., Марченко В. А., Шестопапов В. П. Журнал техн. физ., **32**, вып. 4, 381, 1962.
5. Гестрин Г. Н., Маслов К. В., Шестопапов В. П. Записки механико-матем. ф-та Харьковского гос. ун-та и Харьковскго матем. общества, т. XXX, серия 4, 1964.
6. Хапалюк А. П., Сотский Б. А., Степанов Б. И. Оптика и спектроскопия, **13**, 282, 1962.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.

*Поступила в редакцию
6 июля 1965 г.*

*Харьковский институт
горного машиностроения, автоматики
и вычислительной техники*