В. И. Сумин, А. В. Чернов, Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность,
Дифференц. уравнения, 1998, том 34, номер 10, 1402–1411

1998. Т. 34, № 10. С. 1402 — 1411

УДК 517.95

ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ: ВОЛЬТЕРРОВОСТЬ И КВАЗИНИЛЬПОТЕНТНОСТЬ

В. И. Сумин, А. В. Чернов

В работах [1, 2] предложено описывать распределенные управляемые системы функциональными уравнениями вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

где $f(\cdot,\cdot,\cdot) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$, $v(\cdot)$ — управление, $A[\cdot] : L_p^m(\Pi) \to L_p^l(\Pi)$ — линейный ограниченный оператор (л. о. о.) в лебеговых пространствах, вольтерров в смысле введенного в [1, 2] многомерного обобщения известного определения оператора типа Вольтерра из [3] (см. в п. 1 определение оператора, вольтеррова на системе множеств). Форма (1) оказалась удобной в теории оптимального управления, во-первых, ввиду того, что к (1) естественным образом приводятся разнообразные управляемые начально-краевые задачи (н.к.з.) для самых различных уравнений с частными производными [2, 4], а во-вторых, потому, что такое описание адекватно многим проблемам теории оптимизации распределенных систем (см., например, [2, 4 — 6]). Операторы A из уравнений (1), эквивалентных "эволюционным" н.к.з., имеют, как правило, мажоранты, обладающие свойством квазинильпотентности (квазинильпотентные мажоранты)*) [2, 4]. В различных вопросах теории оптимального управления бывает важно найти для оператора A квазинильпотентную мажоранту с теми или иными вполне определенными свойствами [4 — 6].

При проверке оператора на квазинильпотентность непосредственное использование формулы И. М. Гельфанда для спектрального радиуса нередко оказывается весьма затруднительным из-за сложного вида оператора. Поэтому представляют интерес специальные признаки квазинильпотентности операторов. Заметим, что признаки квазинильпотентности так или иначе связаны обычно с тем или иным понятием вольтерровости операторов (см., например, [7 — 15]). Первые определения вольтерровости функциональных операторов даны в [3, 16] (см. [17])**). Они относились фактически лишь к операторам, действующим в пространствах функций одной переменной. В работе [7] введено понятие интегрального оператора Вольтерра в классах функций нескольких переменных. Там же получены соответствующие признаки квазинильпотентности. В настоящей работе доказываются достаточные условия квазинильпотентности функциональных операторов с использованием понятия вольтерровости таких операторов в смысле [1, 2], при этом развиваются и обобщаются некоторые результаты [7].

Пусть $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — компакт; E — банахово идеальное пространство (б. и. п.) измеримых на Π функций***). Оператор $F[x](t) = \int\limits_\Pi k(t,s)x(s)\,ds$, $t \in \Pi$, назван в [7] интегральным

---

*) Напомним, что линейный оператор $B: L_p(\Pi) \to L_p(\Pi)$ называется мажорантой оператора $A: L_p^m(\Pi) \to L_p^l(\Pi)$, если $\big|A[z](t)\big| \le B\big[|z|\big](t)$, $t \in \Pi$, $z \in L_p^m(\Pi)$. Говорят, что оператор обладает свойством квазинильпотентности (является квазинильпотентным), если его спектральный радиус равен нулю.

**) Здесь рассматриваем лишь функциональные операторы, т.е. операторы, действующие в пространствах функций (об абстрактных вольтерровых операторах см., например, [7, 18, 19]).

***) Банахово пространство измеримых функций E называется б. и. п., если $\{y \in E,\ x$ измерима, $|x| \le |y|\} \Rightarrow \{x \in E,\ \|x\|_E \le \|y\|_E\}$ [20, с. 139].

оператором Вольтерра, если существует семейство $\{H_\lambda | 0 \le \lambda \le 1\}$ компактных подмножеств Π, удовлетворяющее условиям: а) $H_0 = \varnothing$, $H_1 = \Pi$; б) $H_{\lambda'} \subset H_{\lambda''}$, если $\lambda' \le \lambda''$; в) $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0 + 0} \operatorname{mes}(H_\lambda \setminus H_{\lambda_0}) = 0$, $\lambda_0 \in [0, 1)$; г) $\forall \lambda \in [0,1]$ $k(t, s) = 0$ при $t \in H_\lambda$, $s \notin H_\lambda$.

Лемма 1 [7, теорема 1]. *Спектральный радиус $\rho(F)$ действующего в E интегрального оператора Вольтерра F задается формулой* $\rho(F) = \inf\limits_{\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m\}} \max\limits_{1 \le i \le m} \rho(P_{H_{\lambda_i} \setminus H_{\lambda_{i-1}}} F P_{H_{\lambda_i} \setminus H_{\lambda_{i-1}}})$, *где инфимум берется по всем наборам чисел $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, таким, что $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ $\dots < \lambda_{m-1} < \lambda_m = 1$, $m \in \mathbf{N}$.*

Пусть P_H — оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H \subset \Pi$. Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Если для интегрального оператора Вольтерра $F : E \to E$*

$$\inf_{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m = 1} \max_{1 \le i \le m} \|P_{H_{\lambda_i} \setminus H_{\lambda_{i-1}}} F P_{H_{\lambda_i} \setminus H_{\lambda_{i-1}}}\| = 0, \tag{2}$$

то этот оператор квазинильпотентен.

В работе [7] указаны абстрактные аналоги приведенных результатов, касающиеся л. о. о., действующих в банаховом пространстве*). Пусть л. о. о. $F : B \to B$, действующий в банаховом пространстве B, имеет семейство инвариантных подпространств $\mathcal{E} = \{B_\lambda = P_\lambda B;$ $0 \le \lambda \le 1\}$, где $\{P_\lambda\}$ — семейство проекторов, удовлетворяющее условиям: а) $P_0 = 0$, $P_1 = I$; б) $P_\lambda P_\mu = P_{\min\{\lambda, \mu\}}$; в) $\|P_\lambda\| \le a$ $(0 \le \lambda \le 1)$. Формула леммы 1 останется справедливой и в этом случае, если заменить в ней $P_{H_{\lambda_i} \setminus H_{\lambda_{i-1}}}$ на $P_{\lambda_i} - P_{\lambda_{i-1}}$ (для интегрального оператора Вольтерра можно взять $P_\lambda \equiv P_{H_\lambda}$, $0 \le \lambda \le 1$). Абстрактным аналогом леммы 2 является

Лемма 3. *Если семейство $\mathcal{E}$ таково, что*

$$\inf_{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m = 1} \max_{1 \le i \le m} \|(P_{\lambda_i} - P_{\lambda_{i-1}}) F (P_{\lambda_i} - P_{\lambda_{i-1}})\| = 0, \tag{3}$$

то л. о. о. $F :$ $B \to B$ квазинильпотентен.

При достаточной универсальности сформулированных в леммах 2 и 3 признаков квазинильпотентности их неудобство состоит в том, что далеко не всегда просто найти систему инвариантных для данного оператора подпространств, линейно упорядоченную по вложению (линейная упорядоченность системы $\mathcal{E}$ следует из свойства б) проекторов P_λ) и обладающую свойством (3); такая система $\mathcal{E}$, вообще говоря, бесконечна. Это замечание касается в первую очередь операторов, действующих в пространствах функций нескольких переменных. Одна из целей данной работы — показать, что для квазинильпотентности функционального оператора достаточно выполнения более слабого по форме, нежели требование леммы 3, условия, не требующего отыскания бесконечной линейно упорядоченной системы инвариантных подпространств оператора (условие (4) в теореме 2 и эквивалентное ему условие (5) в следствии теоремы 4). Это условие позволяет доказать удобные в приложениях признаки квазинильпотентности функциональных операторов (см. теоремы 3 и 5). Для примера в п. 3 исследуются на квазинильпотентность некоторые операторы в лебеговых пространствах L_p. Рассматриваемые примеры связаны с указанной выше задачей нахождения квазинильпотентных мажорант операторов A из уравнений вида (1), эквивалентных н.к.з. математической физики. Некоторые результаты настоящей работы анонсированы в [14, 15].

1. Формулировки основных результатов. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — фиксированное измеримое по Лебегу ограниченное множество; $t = \operatorname{col}\{t^1, \dots, t^n\} \in \Pi$; $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ — σ-алгебра измеримых подмножеств Π; T — некоторая часть Σ; $E = E(\Pi)$ — некоторое б. и. п. измеримых вещественных функций, определенных на Π. Следуя [1, 2], назовем л. о. о. $G[\cdot] : E \to E$ вольтерровым оператором на системе множеств T, если $\forall H \in T$ сужение $G[x]|_H$ не зависит от значений сужения $x|_{\Pi \setminus H}$, т. е. $\forall H \in T$ имеем $P_H G P_H = P_H G$. Класс операторов, вольтерровых на системе T, обозначим через $V(T)$ **).

---

*) В работах [8, 9] результаты [7] применяются для изучения операторов, действующих в пространствах функций двух переменных.

**) Если $G \in V(T)$, то $\forall H \in T$ имеем $P_H G P_{\Pi \setminus H} = 0$. Поэтому оператор $G \in V(T)$ обладает системой инвариантных подпространств $\mathcal{E} = \{P_{\Pi \setminus H} E \, : \, H \in T\}$. Такая система $\mathcal{E}$ упорядочена по вложению, но, вообще говоря, не является линейно упорядоченной.

В качестве примера укажем, что при переходе от конкретных н.к.з. к уравнениям вида (1) часто появляются операторы A, вольтерровы на системах T следующего вида T_μ [1, 2, 4]. Пусть $[a,b]=[a^1,b^1]\times\ldots\times[a^n,b^n]$ — фиксированный брус, содержащий Π, $\mu=\{\nu,\lambda\}$ — любая упорядоченная пара наборов $\nu,\lambda\subset\{1,\ldots,n\}$, $\nu\cup\lambda\neq\varnothing$, $\nu\cap\lambda=\varnothing$. Положим $T_\mu([a,b])\equiv \equiv\{[\alpha,\beta]=[\alpha^1,\beta^1]\times\ldots\times[\alpha^n,\beta^n]\subset[a,b]\mid\ \alpha^i=a^i\ \ (i\notin\nu),\ \beta^i=b^i\ \ (i\notin\lambda)\}$, $T_\mu(\Pi)\equiv \equiv\{\Pi\cap[\alpha,\beta]\mid\ [\alpha,\beta]\in T_\mu([a,b])\}$. Примером системы типа $T_\mu(\Pi)$ является система вида $T_k(\Pi)$: для $k\in\overline{1,n}$ положим $T_k([a,b])\equiv\{[a,\beta]\subset[a,b]\mid\ \beta^i=b^i,\ \ i=\overline{k+1,n}\}$, $T_k(\Pi)\equiv\{\Pi\cap[a,\beta]\mid [a,\beta]\in T_k([a,b])\}$. Заметим, что систему типа $T_\mu(\Pi)$ линейной заменой переменных t ($t\to t'$: $t'^i=t^i-a^i$ $(i\notin\nu)$, $t'^i=b^i-t^i$ $(i\in\nu)$) и перенумерацией координат всегда можно привести к системе типа $T_k(\Pi)$ так, чтобы $\Pi\subset[0,b']$.

Вернемся к общей ситуации. Систему множеств $\mathcal{T}=\{H_0,\ldots,H_k\}\subset\Sigma$, линейно упорядоченную по вложению ($H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_k$) и такую, что $H_0=\varnothing$, $H_k=\Pi$, назовем конечной цепочкой. Если при этом $G\in V(\mathcal{T})$, то будем говорить, что $\mathcal{T}$ — вольтерровская цепочка оператора G. Ниже вводится понятие δ-цепочки и слабой δ-цепочки оператора G. Пусть $\delta>0$ — некоторое число. Конечную цепочку $\mathcal{T}=\{H_0,\ldots,H_k\}$ назовем слабой δ-цепочкой л.о.о. $G:E\to E$, если $\rho(P_{H_i\setminus H_{i-1}}GP_{H_i\setminus H_{i-1}})<\delta$, $i=\overline{1,k}$. Обозначим через $\Psi_{\text{сл}}(G)$ множество всех таких положительных чисел δ, для каждого из которых существует вольтерровская слабая δ-цепочка оператора G *). Обобщением леммы 1 является

Теорема 1. *Для л.о.о.* $G:E\to E$ *спектральный радиус* $\rho(G)$ *конечен тогда и только тогда, когда* $\Psi_{\text{сл}}(G)\neq\varnothing$. *В этом случае* $\rho(G)=\inf\Psi_{\text{сл}}(G)$.

Будем говорить, что оператор $G:E\to E$ удовлетворяет δ-условию на множестве $H\in\Sigma$, если $\|P_HGP_H\|<\delta$. Конечную цепочку $\mathcal{T}=\{H_0,\ldots,H_k\}$ назовем δ-цепочкой оператора $G:E\to E$, если G удовлетворяет δ-условию на каждой разности $H_i\setminus H_{i-1}$, $i=\overline{1,k}$. Имеет место обобщение леммы 2

Теорема 2. *Если л.о.о.* $G:E\to E$ *удовлетворяет условию:*

$$\forall\delta>0\ \ \textit{существует вольтерровская } \delta\textit{-цепочка оператора } G, \tag{4}$$

то $\rho(G)=0$.

В рассматриваемом нами случае, когда E — б.и.п. измеримых функций, теорема 2 обобщает относящуюся к случаю банаховых пространств лемму 3. В самом деле, сравним условие (4) с условием леммы 3. Заметим, что если $\mathcal{T}\equiv\{H_0,H_1,\ldots,H_k\}$ — вольтерровская цепочка л.о.о. $G:E\to E$, то $\mathcal{E}\equiv\{P_iE:\ 0\le i\le k\}$, где $P_i\equiv P_{\Pi\setminus H_i}E$, — конечная система инвариантных подпространств л.о.о. G, линейно упорядоченная по вложению. Условие (4) означает, что $\forall\delta>0$ существует своя конечная система $\mathcal{E}_\delta$ указанного вида со свойством: $\max\limits_{1\le i\le k}\|(P_i-P_{i-1})G(P_i-P_{i-1})\|\le\delta$. Таким образом, условие (4) является более слабым по форме, чем условие леммы 3, проверка которого требует отыскания, вообще говоря, бесконечной линейно упорядоченной по вложению системы $\mathcal{E}$ инвариантных подпространств л.о.о. G со свойством (3). Действительно, условие (3) означает, что семейство $\mathcal{E}$ обладает свойством: $\forall\delta>0\ \ \exists\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}\}:\ \max\limits_{1\le i\le m}\|(P_{\lambda_i}-P_{\lambda_{i-1}})F(P_{\lambda_i}-P_{\lambda_{i-1}})\|\le\delta$, где $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_m=1$. В то время как все конечные системы подпространств $\{P_{\lambda_i}E\}_{i=0}^m$ принадлежат одной и той же линейно упорядоченной по вложению системе $\mathcal{E}$, связанные с условием (4) системы подпространств $\mathcal{E}_\delta=\{P_iE\}_{i=0}^k$, отвечающие всевозможным $\delta>0$, такому требованию удовлетворять не обязаны. Более того, для операторов, действующих в пространствах функций нескольких переменных, естественные способы построения δ-цепочек часто как раз приводят к семействам подпространств $\{\mathcal{E}_\delta\}_{\delta>0}$, не являющимся линейно упорядоченными по вложению. Пример такого построения содержится в доказательстве формулируемой ниже теоремы 3, посвященной распространенному случаю $G\in V(T_\mu)$.

Сформулируем удобные в приложениях признаки квазинильпотентности, связанные с условием (4). Начнем с конкретной, часто встречающейся в прикладных задачах ситуации, когда

*) Если вольтерровская цепочка оператора G является одновременно его (слабой) δ-цепочкой, то называем ее вольтерровской (слабой) δ-цепочкой оператора G.

л. о. о. $G : E \to E$ принадлежит классу $V(T_\mu)$, $T_\mu = T_\mu(\Pi)$. Фиксируем некоторый брус $[a, b]$, содержащий Π. Положим $\Phi_G(H) = \sup_{c \in \mathbf{R}^n} \|P_{(H+c)\cap\Pi} G P_{(H+c)\cap\Pi}\|$, $H \in \Sigma([a,b])$.

Теорема 3. *Пусть $G \in V(T_\mu(\Pi))$. Если $\Phi_G([\alpha,\beta]) \to 0$, $\alpha^i \to b^i$ $(i \in \nu)$, $\beta^i \to a^i$ $(i \in \lambda)$, $[\alpha,\beta] \in T_\mu([a,b])$, то условие (4) выполнено и, следовательно, $\rho(G) = 0$.*

Чтобы сформулировать признаки выполнения условия (4) в общей ситуации, когда оператор G не обязательно принадлежит какому-либо классу $V(T_\mu)$, обозначим через $\mathcal{B}(G)$ объединение всех таких систем $T \subset \Sigma$, на каждой из которых оператор G вольтерров. Элементы $\mathcal{B}(G)$ будем называть вольтерровскими множествами оператора G. Обозначим через $\mathcal{B}(G)^{(-)}$ систему всевозможных разностей вольтерровских множеств G. Обобщим понятие вольтерровской δ-цепочки. Конечную подсистему системы $\mathcal{B}(G)^{(-)}$ назовем вольтерровской δ-сетью л. о. о. $G : E \to E$, если она покрывает Π и на каждом элементе этой подсистемы оператор G удовлетворяет δ-условию. Простейший пример вольтерровской δ-сети — система $\{H_i \setminus H_{i-1}\}_{i=1}^k$ последовательных разностей элементов вольтерровской δ-цепочки $\{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$. Таким образом, из существования вольтерровской δ-цепочки оператора следует существование его вольтерровской δ-сети. Обратное менее очевидно.

Теорема 4. *Вольтерровская δ-цепочка л. о. о. $G : E \to E$ существует тогда и только тогда, когда существует вольтерровская δ-сеть этого оператора.*

Непосредственно из теорем 4 и 2 получаем

Следствие. *Условие (4) эквивалентно условию*

$$\forall \delta > 0 \ \text{ существует вольтерровская } \delta\text{-сеть оператора } G. \tag{5}$$

Если л. о. о. $G : E \to E$ удовлетворяет условию (5), то $\rho(G) = 0$.

Следствие позволяет получать аналогичные теореме 3 признаки квазинильпотентности, применимые в ситуациях, когда условие $G \in V(T_\mu)$ не выполняется. Приведем пример подобного признака. Пусть $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — компакт, $B(t,r)$ — открытый шар радиуса r с центром $t \in \Pi$, $D(t,r) \equiv \Pi \cap B(t,r)$. Для л. о. о. $G : E \to E$ положим

$$\Upsilon_G(r) = \sup_{t\in\Pi}\Big\{\inf_{h\in\mathcal{B}(G)^{(-)},\, h\supset D(t,r)} \|P_h G P_h\|\Big\}, \quad \varphi_G(r) = \sup_{t\in\Pi} \|P_{D(t,r)} G P_{D(t,r)}\|,$$

$$v_G(r) = \sup_{t\in\Pi}\Big\{\inf_{h\in\mathcal{B}(G)^{(-)},\, h\supset D(t,r)} \operatorname{diam}(h)\Big\},$$

где $\operatorname{diam}(h)$ — диаметр множества h.

Теорема 5. *Если л. о. о. $G : E \to E$ удовлетворяет одному из условий: 1) $\Upsilon_G(r) \to 0$ при $r \to +0$; 2) $v_G(r) \to 0$, $\varphi_G(r) \to 0$ при $r \to +0$, то имеет место (4) и $\rho(G) = 0$.*

2. Доказательства.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\rho(G) < \infty$. Тогда тривиальная вольтерровская цепочка $\{\varnothing, \Pi\}$ является слабой δ-цепочкой при любом $\delta > \rho(G)$. Это означает, что $\Psi_{\text{сл}}(G) \neq \varnothing$ и $\rho(G) \geq \inf \Psi_{\text{сл}}(G)$. Осталось показать, что в случае $\Psi_{\text{сл}}(G) \neq \varnothing$ выполняется неравенство

$$\rho(G) \leq \inf \Psi_{\text{сл}}(G). \tag{6}$$

Пусть $\mathcal{E}(H)$ — комплексификация пространства $E(H)$, $H \in \Sigma$; $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(\Pi)$. Спектральный радиус $\rho(G)$ равен спектральному радиусу $\rho(\mathcal{G})$ комплексного расширения $\mathcal{G} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ оператора G [20, гл. 13]. Очевидно, оператор $\mathcal{G}$ обладает тем же свойством вольтерровости, что и G: $\mathcal{P}_H \mathcal{G} \mathcal{P}_H = \mathcal{P}_H \mathcal{G}$, $H \in \mathcal{B}(G)$, где $\mathcal{P}_H$ — комплексное расширение P_H. Дословно повторяя соответствующие определения п. 1, введем понятия вольтерровской цепочки и слабой δ-цепочки оператора $\mathcal{G}$, а также множество $\Psi_{\text{сл}}(\mathcal{G})$ — аналог множества $\Psi_{\text{сл}}(G)$. Так как $\forall H \in \Sigma$ комплексным расширением оператора $P_H G P_H$ является оператор $\mathcal{P}_H \mathcal{G} \mathcal{P}_H$, то $\Psi_{\text{сл}}(\mathcal{G}) = \Psi_{\text{сл}}(G)$. Таким образом, неравенство (6) эквивалентно неравенству

$$\rho(\mathcal{G}) \leq \inf \Psi_{\text{сл}}(\mathcal{G}). \tag{7}$$

Для доказательства (7) (используем схему доказательства теоремы 1 из [7]) достаточно установить, что уравнение

$$\lambda z - \mathcal{G}[z] = g, \quad z \in \mathcal{E}, \tag{8}$$

имеет единственное в $\mathcal{E}$ решение для любых $g \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| > \inf \Psi_{сл}(\mathcal{G})$. Произвольно фиксируем $\lambda \in \mathbf{C}$ и $\delta \in \Psi_{сл}(\mathcal{G})$ такие, что $\inf \Psi_{сл}(\mathcal{G}) \leq \delta < |\lambda|$.

Пусть: $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$ — вольтерровская слабая δ-цепочка оператора $\mathcal{G}$, $\Pi_i \equiv H_i \setminus H_{i-1}$ ($i = \overline{1,k}$). Для $H \in \Sigma$ определим $\mathcal{Q}_H: \mathcal{E}(H) \to \mathcal{E}$ — оператор продолжения нулем: $\mathcal{Q}_H[z](t) = \{z(t),\ t \in H;\ 0,\ t \in \Pi \setminus H\}$, $t \in \Pi$, $z \in \mathcal{E}(H)$.

Пусть: $\mathcal{G}_i: \mathcal{E}(\Pi_i) \to \mathcal{E}(\Pi_i)$ — оператор, задаваемый формулой $\mathcal{G}_i[z] \equiv \{\mathcal{G}\mathcal{Q}_{\Pi_i}[z]\}|_{\Pi_i}$, $z \in \mathcal{E}(\Pi_i)$, $i = \overline{1,k}$. Для $z \in \mathcal{E}$ через z_i обозначим сужение $z|_{\Pi_i}$, являющееся элементом $\mathcal{E}(\Pi_i)$. Каждая функция $z \in \mathcal{E}$ однозначно определяется набором $\{z_i\}_{i=1}^k$: $z = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\Pi_i}[z_i]$. Так как $\mathcal{T}$ — вольтерровская цепочка для $\mathcal{G}$, то для любого $i = \overline{1,k}$ при $t \in \Pi_i \subset H_i$ имеем

$$\mathcal{G}[z](t) = \mathcal{G}\left[\sum_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\Pi_i}[z_i]\right](t) = \sum_{j=1}^{i} \mathcal{G}\mathcal{Q}_{\Pi_j}[z_j](t).$$

Уравнение (8) перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$\lambda z_i(t) - \mathcal{G}_i[z_i](t) = g_{(i)}(t), \quad t \in \Pi_i, \quad z_i \in \mathcal{E}(\Pi_i), \quad i = \overline{1,k}, \tag{9}$$

где $g_{(i)}(t) \equiv g(t) + \sum\limits_{j=1}^{i-1} \mathcal{G}\mathcal{Q}_{\Pi_j}[z_j](t)$, $t \in \Pi_i$, — функция из $\mathcal{E}(\Pi_i)$, $i = \overline{1,k}$. Совокупность соотношений (9), рассматриваемая как система относительно $z_1, z_2, \ldots, z_k$, обладает следующим свойством: любые первые m уравнений из (9) не содержат функций $z_{m+1}, \ldots, z_k$ ($m = \overline{1,k-1}$). Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться, что спектральные радиусы $\rho(\mathcal{G}_i)$ операторов $\mathcal{G}_i$ подчиняются неравенствам

$$\rho(\mathcal{G}_i) < \delta, \quad i = \overline{1,k}. \tag{10}$$

Действительно, в этом случае $\rho(\mathcal{G}_i) < |\lambda|$, $i = \overline{1,k}$, и система (9) разрешима единственным образом (последовательно, от первого уравнения к k-му).

Заметим, что $\forall H \in \Sigma$ оператор $\mathcal{P}_H$ обладает следующими очевидными свойствами:

1) $(\mathcal{P}_H)^2 = \mathcal{P}_H$;

2) $\mathcal{P}_H = \mathcal{Q}_H \mathcal{S}_H$, где $\mathcal{S}_H: \mathcal{E} \to \mathcal{E}(H)$ — оператор сужения, определяемый формулой $\mathcal{S}_H[x](t) = x(t)|_{t \in H}$, $t \in H$, $x \in \mathcal{E}$;

3) каков бы ни был л.о.о. $\mathcal{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, совпадают нормы оператора $\mathcal{P}_H\mathcal{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ и оператора $\mathcal{S}_H\mathcal{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}(H)$, а также нормы оператора $\mathcal{A}\mathcal{P}_H: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ и оператора $\mathcal{A}\mathcal{Q}_H: \mathcal{E}(H) \to \mathcal{E}$.

Поэтому, каково бы ни было $i = \overline{1,k}$, для любого $m = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\|(\mathcal{G}_i)^m\| = \|\underbrace{(\mathcal{S}_{\Pi_i}\mathcal{G}\mathcal{Q}_{\Pi_i})(\mathcal{S}_{\Pi_i}\mathcal{G}\mathcal{Q}_{\Pi_i})\cdots(\mathcal{S}_{\Pi_i}\mathcal{G}\mathcal{Q}_{\Pi_i})}_{m}\| =$$

$$= \|\mathcal{S}_{\Pi_i}\underbrace{(\mathcal{G}\mathcal{P}_{\Pi_i})(\mathcal{G}\mathcal{P}_{\Pi_i})\cdots(\mathcal{G}\mathcal{P}_{\Pi_i})}_{m-1}\mathcal{G}\mathcal{Q}_{\Pi_i}\| = \|(\mathcal{P}_{\Pi_i}\mathcal{G}\mathcal{P}_{\Pi_i})^m\|.$$

Таким образом, $\rho(\mathcal{G}_i) = \rho(\mathcal{P}_{\Pi_i}\mathcal{G}\mathcal{P}_{\Pi_i})$, $i = \overline{1,k}$, откуда, поскольку $\mathcal{T}$ — слабая δ-цепочка оператора $\mathcal{G}$, следует (10). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\Psi(G)$ — множество всех таких неотрицательных чисел δ, для каждого из которых существует вольтерровская δ-цепочка оператора G. Очевидно, что $\Psi(G) \subset \Psi_{сл}(G)$. Следовательно, непосредственно из теоремы 1 получаем оценку $\rho(G) \leq \inf \Psi(G)$. В силу (4) $\inf \Psi(G) = 0$. Теорема 2 доказана.

Нам понадобятся два простых вспомогательных утверждения, первое из которых является почти очевидным следствием нашего определения вольтерровости [4, с. 15]. Пусть $G: E \to E$

— л.о.о. Обозначим через $\delta(G)$ систему всех элементов Σ, на каждом из которых оператор G удовлетворяет δ-условию.

Лемма 4. *Система множеств $\mathcal{B}(G)$ замкнута относительно конечных объединений и пересечений.*

Лемма 5. *Если* $H \in \delta(G)$, $h \subset H$, $h \in \Sigma$, *то* $h \in \delta(G)$.

Для доказательства леммы 5 достаточно заметить, что $P_h G P_h = P_H P_h G P_h P_H$ и $\|P_h\| \le 1$.

Доказательство теоремы 3. В соответствии с замечанием, сделанным в п. 1, достаточно рассмотреть случай, когда $T_\mu(\Pi)$ имеет вид $T_k(\Pi)$, $\Pi \subset [0,b]$. Зафиксируем произвольно $\delta > 0$. Построим вольтерровскую δ-цепочку оператора G. По условию существует $s \in \mathbf{N}$ такое, что брус $h = [0,\beta] \in T_k([0,b])$, определяемый равенствами $\beta^i = s^{-1}b^i$, $i = \overline{1,k}$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi_G(h) < \delta. \tag{11}$$

Фиксируем такое s. Пусть: целые числа $j_1, \ldots, j_k$ меняются независимо от 0 до $s-1$; $c_{j_1\ldots j_k} \in \mathbf{R}^n$ — вектор с компонентами $c^i_{j_1\ldots j_k} = \{j_i s^{-1} b^i,\ i=\overline{1,k};\ 0,\ i=\overline{k+1,n}\}$; $h_{j_1\ldots j_k} = h + c_{j_1\ldots j_k}$. Упорядочим систему брусов $\{h_{j_1\ldots j_k}\}$, присвоив брусу $h_{j_1\ldots j_k}$ номер $j = j_1 + sj_2 + \ldots + s^{k-1}j_k$. Упорядоченная система имеет номера от 0 до $M = s^k - 1$; брус с номером j обозначим через h_j. Имеем $h_0 = h$, $\Pi = \bigcup\limits_{j=0}^{M}(h_j \cap \Pi)$. В силу (11)

$$\|P_{h_j\cap\Pi} G P_{h_j\cap\Pi}\| < \delta, \quad j = \overline{0,M}. \tag{12}$$

По лемме 4 каждое множество $H_i \equiv \bigcup\limits_{j=0}^{i}(h_j \cap \Pi)$ принадлежит системе $\mathcal{B}(G)$, $i = \overline{0,M}$. В силу (12) система множеств $\mathcal{T} \equiv \{H_0, H_1, \ldots, H_M\}$ является вольтерровской δ-цепочкой оператора G. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. В соответствии с замечанием перед формулировкой теоремы нам достаточно показать, что из существования вольтерровской δ-сети следует существование вольтерровской δ-цепочки. Предположим, что для некоторого $\delta > 0$ существует вольтерровская δ-сеть оператора G.

1) Для компактности записи условимся в следующем. Назовем переход от множества $H_1 \in \mathcal{B}(G)$ к множеству $H_2 \in \mathcal{B}(G)$ δ-шагом, если $H_2 \subset H_1$ и на разности $H_1 \setminus H_2$ оператор G удовлетворяет δ-условию. Возможность δ-шага от множества $H_1 \in \mathcal{B}(G)$ к множеству $H_2 \in \mathcal{B}(G)$ будем символически обозначать таким образом: $H_1 \succ H_2$, а возможность перехода за конечное число δ-шагов от множества $H_1 \in \mathcal{B}(G)$ к множеству $H_2 \in \mathcal{B}(G)$ — $H_1 \succ\succ H_2$. В этих обозначениях факт существования вольтерровской δ-цепочки записывается в виде $\Pi \succ\succ \varnothing$. Докажем сначала один вспомогательный результат.

2) Пусть I — некоторое конечное множество. Покажем, что если $M = \bigcup\limits_{i\in I} M_i$, $M' = \bigcup\limits_{i\in I} M'_i$, где $M_i \succ M'_i$ ($i \in I$), то $M \succ\succ M'$. Без ограничения общности можно предполагать, что $I = \{1,2,\ldots,m\} \subset \mathbf{N}$. Положим $P_j \equiv (\bigcup\limits_{i=1}^{j} M'_i) \bigcup (\bigcup\limits_{i=j+1}^{m} M_i)$, $j = \overline{0,m}$. Имеем $M = P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_m = M'$, $P_j \setminus P_{j+1} \subset M_{j+1} \setminus M'_{j+1}$ ($j = \overline{0,m-1}$). По лемме 4 $P_j \in \mathcal{B}(G)$ ($j = \overline{0,m}$). Так как $M_{j+1} \setminus M'_{j+1} \in \delta(G)$, то по лемме 5 $P_j \setminus P_{j+1} \in \delta(G)$ ($j = \overline{0,m-1}$). Следовательно, $P_j \succ P_{j+1}$ ($j = \overline{0,m-1}$), что и означает $M \succ\succ M'$.

3) Пусть $\{h_1, \ldots, h_k\}$ — δ-сеть оператора G, существование которой мы предположили. Это означает, что $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{k} h_i$, причем $h_i = H_i \setminus H'_i$, $H_i \succ H'_i$ ($i = \overline{1,k}$). Таким образом, $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{k} H_i$ и, применяя результат 2) к системам множеств $\{M_i = H_i\}$, $\{M'_i = H'_i\}$ при $I = \{1,2,\ldots,k\}$, получаем

$$\Pi \succ\succ \bigcup_{i=1}^{k} H'_i. \tag{13}$$

Далее для любого множества $M \in \Sigma$ положим $M^{(i)} \equiv M \bigcap H_i'$ $(i = \overline{1,k})$. Здесь $H_i' = \bigcup\limits_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{k} H_j^{(i)}$, $i = \overline{1,k}$, так как $h_i^{(i)} = \varnothing$ $(i = \overline{1,k})$ и

$$H_i' = H_i' \cap \Pi = H_i' \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} h_j\right) = \bigcup_{j=1}^{k} h_j^{(i)} = \bigcup_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{k} h_j^{(i)} \subset \bigcup_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{k} H_j^{(i)} \subset H_i', \quad i = \overline{1,k}.$$

Таким образом, (13) можно записать в виде

$$\Pi \succ\succ \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{k} H_j^{(i)}. \tag{14}$$

4) Для $s \in \{2,3,\ldots,k\}$ обозначим через I_s набор всевозможных s-векторов $j = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$ с целочисленными координатами j_i, принимающими попарно различные значения из множества $\{1,2,\ldots,k\}$. Положим *) $K_j \equiv (H_{j_s})^{(j_1)\ldots(j_{s-1})}$, $j \in I_s$, $s = \overline{2,k}$; $\Pi_s \equiv \bigcup\limits_{j\in I_s} K_j$, $s = \overline{2,k}$. Заметим, что все множества K_j и Π_s принадлежат классу $\mathcal{B}(G)$ по лемме 4. Правая часть (14) есть множество Π_2, т.е. соотношение (14) переписывается в виде $\Pi \succ\succ \Pi_2$. Покажем, что

$$\Pi \succ\succ \Pi_k. \tag{15}$$

Ввиду (14) и очевидной транзитивности отношения $\succ\succ$ достаточно показать, что

$$\Pi_s \succ\succ \Pi_{s+1}, \quad s = \overline{2,k-1}. \tag{16}$$

Положим $K_j' \equiv (H_{j_s}')^{(j_1)\ldots(j_{s-1})}$, $j \in I_s$, $s = \overline{2,k}$. Очевидно, что $K_j \setminus K_j' = (h_{j_s})^{(j_1)\ldots(j_{s-1})} \subset h_{j_s}$, $K_j' \subset K_j$ $(j \in I_s,\ s = \overline{2,k})$, поэтому

$$K_j \succ K_j', \quad j \in I_s, \quad s = \overline{2,k}.$$

Применяя результат 2) к системам множеств $\{M_j = K_j\}$, $\{M_j' = K_j'\}$ при $I = I_s$, получаем

$$\Pi_s \succ\succ \Pi_s' \equiv \bigcup_{j\in I_s} K_j', \quad s = \overline{2,k}. \tag{17}$$

Имеем

$$\Pi_s' = \Pi_{s+1}, \quad s = \overline{2,k-1}. \tag{18}$$

Действительно, для любого $j \in I_s$ $K_j' = \Pi^{(j_1)\ldots(j_s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} h_i^{(j_1)\ldots(j_s)} = \bigcup\limits_{\substack{i=1\\(i\notin j)}}^{k} h_i^{(j_1)\ldots(j_s)}$, где $i \notin j$ — сокращенное обозначение для $(i \neq j_1, \ldots, j_s)$. Так как $h_i^{(j_1)\ldots(j_s)} \subset H_i^{(j_1)\ldots(j_s)} \equiv (H_i \cap H_{j_s}')^{(j_1)\ldots(j_{s-1})} \subset K_j'$, то $K_j' = \bigcup\limits_{\substack{i=1\\(i\notin j)}}^{k} H_i^{(j_1)\ldots(j_s)}$, $j \in I_s$, $s = \overline{2,k}$. Таким образом, можно записать

$$\Pi_{s+1} \equiv \bigcup_{j\in I_{s+1}} K_j = \bigcup_{i=1}^{k}\left(\bigcup_{\substack{j\in I_s\\(i\notin j)}} H_i^{(j_1)\ldots(j_s)}\right) = \bigcup_{j\in I_s}\left(\bigcup_{\substack{i=1\\(i\notin j)}}^{k} H_i^{(j_1)\ldots(j_s)}\right) = \bigcup_{j\in I_s} K_j' = \Pi_s',$$

$s = \overline{2,k-1}$. В силу (18) соотношение (16) совпадает с доказанным соотношением (17). Соотношение (15) доказано.

*) Ниже используем обозначение $M^{(j_1)\ldots(j_s)} \equiv (\ldots(M^{(j_1)})^{(j_2)}\ldots)^{(j_s)}$.

5) Справедливо соотношение

$$\Pi_k \succ\succ S \equiv \bigcap_{i=1}^{k} H_i'. \tag{19}$$

Действительно, как показано в 4), $K_j \succ K_j'$ $(j \in I_k)$. Так как $K_j' = S$ $(j \in I_k)$ (см. определение K_j'), то $\bigcup_{j\in I_k} K_j' = S$. Применяя результат 2) к системам множеств $\{M_j = K_j\}$, $\{M_j' = K_j'\}$ при $I = I_k$, получаем (19).

Соотношения (15) и (19) дают вместе

$$\Pi \succ\succ S. \tag{20}$$

Множество S пусто. В самом деле,

$$S = \bigcup_{i=1}^{k}(S \cap h_i) = \bigcup_{i=1}^{k}\Big(\bigcap_{j=1}^{k}(H_j' \cap h_i)\Big) \subset \bigcup_{i=1}^{k}(H_i' \cap h_i) = \varnothing.$$

Таким образом, соотношение (20) означает, что $\Pi \succ\succ \varnothing$. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть выполняется условие 1). Для любого $r > 0$ существует конечное покрытие $\{B(t_i, r),\ i = \overline{1, k(r)}\}$ компакта Π шарами. Так как $\Pi = \bigcup_{i=1}^{k(r)} D(t_i, r)$, то любая система $\{h_i \in \mathcal{B}(G)^{(-)} : h_i \supset D(t_i, r),\ 1 \le i \le k(r)\}$ покрывает Π. В силу 1) для любого $\delta > 0$ найдутся $r > 0$ и система $\{h_i\}_{i=1}^{k(r)}$ указанного вида такие, что эта система будет δ-сетью оператора G. Применение следствия теоремы 4 завершает доказательство в рассматриваемом случае.

Пусть теперь выполняется условие 2). Возьмем произвольное $\delta > 0$. Имеется $r > 0$ такое, что

$$\|P_{D(t,r)} G P_{D(t,r)}\| < \delta, \quad t \in \Pi. \tag{21}$$

Существует $R > 0$ такое, что $v_G(R) < r$. Найдется конечное покрытие $\{B(t_i, R),\ i = \overline{1, k}\}$ компакта Π. Следовательно, всякая система $\{h_i \in \mathcal{B}(G)^{(-)}\colon\ h_i \supset D(t_i, R),\ \operatorname{diam} h_i < r,\ 1 \le i \le k\}$ покрывает Π. Каждый элемент h_i такой системы можно погрузить в некоторый шар $B(\tau_i, r)$, взяв $\tau_i \in h_i$. В силу (21) и леммы 5 последнее означает, что эта система будет δ-сетью оператора G. Применяя следствие теоремы 4, завершаем доказательство теоремы 5.

3. Случай пространств L_p. Примеры. Проиллюстрируем применение доказанных результатов в весьма важном для приложений случае $E = L_p \equiv L_p(\Pi)$, $p \in [1, \infty]$.

Пример 1. Положим $n = 2$, $\Pi = [0, b]$. Пусть $y(\cdot)\colon\ [0, b^1] \to \mathbf{R}$ — монотонная абсолютно-непрерывная функция такая, что $y(0) = b^2$, $y(b^1) = 0$. Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения

$$x_{t^1t^2} = g(t, x(t), x_{t^1}(t), x_{t^2}(t)), \quad t \in \Pi, \tag{22}$$

$$x_{t^1}\big|_{t^2=y(t^1)} = \pi(t^1), \quad x_{t^2}\big|_{t^1=y^{-1}(t^2)} = \chi(t^2), \quad x(t_0) = x_0, \tag{23}$$

где $g(\cdot,\cdot) : \Pi \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ — функция типа Каратеодори, $x_0 \in \mathbf{R}$, $t_0 \in \Pi$ $(t_0^2 = y(t_0^1))$, $\pi(\cdot) \in L_\infty[0, b^1]$, $\chi(\cdot) \in L_\infty[0, b^2]$ фиксированы. Решение задачи (22), (23) понимаем в смысле почти всюду и ищем в классе W абсолютно-непрерывных на Π функций с ограниченными первыми и смешанной производными. Формула

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0^1}^{t^1} \pi(\xi)\,d\xi + \int_{t_0^2}^{t^2} \chi(\eta)\,d\eta + \int_{y^{-1}(t^2)}^{t^1} d\xi \int_{y(\xi)}^{t^2} z(\xi, \eta)\,d\eta$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом L_∞ функций $z(\cdot)$ и классом удовлетворяющих условиям (23) функций $x(\cdot)$ из W. Поэтому задача (22), (23) эквивалентна следующему рассматриваемому над L_∞ функциональному уравнению вида (1):

$$z(t) = g(t, \theta(t) + A_1[z](t), \theta'_{t^1}(t) + A_2[z](t), \theta'_{t^2}(t) + A_3[z](t)) \equiv f(t, A[z](t)), \quad t \in \Pi,$$

где

$$\theta(t) = x_0 + \int\limits_{t_0^1}^{t^1} \pi(\xi)\,d\xi + \int\limits_{t_0^2}^{t^2} \chi(\eta)\,d\eta,$$

$$A[\cdot] \equiv \operatorname{col}\{A_1[\cdot], A_2[\cdot], A_3[\cdot]\}, \quad A_1[z](t) = \int\limits_{y^{-1}(t^2)}^{t^1} d\xi \int\limits_{y(\xi)}^{t^2} z(\xi,\eta)\,d\eta,$$

$$A_2[z](t) = \int\limits_{y(t^1)}^{t^2} z(t^1,\eta)\,d\eta, \quad A_3[z](t) = \int\limits_{y^{-1}(t^2)}^{t^1} z(\xi,t^2)\,d\xi \quad (t \in \Pi).$$

Л.о.о. $A : L_\infty(\Pi) \to L^3_\infty(\Pi)$ имеет мажоранту $G : L_\infty \to L_\infty$ вида $G[z](t) \equiv A_1[z](t) + \{\operatorname{sign}(t^2 - y(t^1))\}\{A_2[z](t) + A_3[z](t)\}$, $t \in \Pi$, $z \in L_\infty$. Оператор G квазинильпотентен по теореме 5. Действительно, пусть $\Pi_+ \equiv \{t \in \Pi : t^2 - y(t^1) > 0\}$, $\Pi_- \equiv \{t \in \Pi : t^2 - y(t^1) < 0\}$. Класс вольтерровских множеств $\mathcal{B}(G)$ содержит систему $T_+ \equiv \{[0,\beta] \cap \Pi_+ : \beta \in \Pi_+\}$ и систему $T_- \equiv \{[\beta, b] \cap \Pi_- : \beta \in \Pi_-\}$. Поэтому для любого $D(t,r)$ ($t \in \Pi$, $r > 0$) существует прямоугольник $h \in \mathcal{B}(G)^{(-)}$, содержащий $D(t,r)$ и вложенный в $D(t,2r)$. Это означает, что $v_G(r) \le 4r$. Так как*) $\varphi_G(r) = \sup\limits_{t\in\Pi} \|\chi_{D(t,r)} G[\chi_{D(t,r)}]\|_{L_\infty} \le \pi r^2 + 4r$, то для л.о.о. G выполняется условие 2) теоремы 5. Заметим, что выполняется и условие 1) этой теоремы. В самом деле, используя указанный выше прямоугольник h, получаем оценку $\Upsilon_G(r) \le \sup\limits_{t\in\Pi} \|\chi_h G[\chi_h]\|_{L_\infty} \le \sup\limits_{t\in\Pi} \|G[\chi_{D(t,2r)}]\|_{L_\infty} \le 4\pi r^2 + 8r$.

Пример 2. В конкретных операторных классах достаточному признаку квазинильпотентности 1) из теоремы 5 можно придать более удобный для приложений вид. Пусть, например, $G : L_p \to L_p$ — л.о.о. при некотором $p \in [1, +\infty]$. Положим

$$\sigma_G(r) = \sup_{t\in\Pi}\{\inf_{h\in\mathcal{B}(G)^{(-)},\, h\supset D(t,r)} \operatorname{mes}(h)\}.$$

Теорема 6. *Если некоторая степень оператора G представима в виде интегрального оператора с ограниченным ядром, то для квазинильпотентности оператора G достаточно, чтобы $\sigma_G(r) \to 0$ при $r \to +0$.*

Доказательству теоремы 6 предпошлем следующую лемму.

Лемма 6. *Если $G : E \to E$ — л. о. о., то для $h \in \mathcal{B}(G)^{(-)}$ имеем $P_h G^2 P_h = (P_h G P_h)^2$.*

Доказательство. Ввиду леммы 4 множество $h \in \mathcal{B}(G)^{(-)}$ представимо в виде разности $H_1 \setminus H_2$, где H_1, $H_2 \in \mathcal{B}(G)$, $H_2 \subset H_1$. Так как $P_{H_2} G P_{H_1\setminus H_2} = 0$, то $P_h G P_h = P_{H_1} G P_h - P_{H_2} G P_h = P_{H_1} G P_h$. Поэтому $(P_h G P_h)^2 = P_h G P_h G P_h = P_h P_{H_1} G (P_h G P_h) = P_h (P_{H_1} G P_{H_1}) G P_h = P_h (P_{H_1} G) G P_h = P_h G^2 P_h$. Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 6. Пусть $G^k[z](t) = \int\limits_\Pi R(t,\xi) z(\xi)\,d\xi$, $t \in \Pi$, где ядро R ограничено. Достаточно установить, что $\rho(F) = 0$ для $F \equiv (G^k)^2$. Покажем, что для л.о.о. $F : L_p \to L_p$ выполняется условие 1) теоремы 5. Выберем произвольно $h \in \mathcal{B}(G)^{(-)}$. По лемме 6 $P_h F P_h = P_h G^k P_h G^k P_h$, откуда получаем $\|P_h F P_h\| \le \|R\|^2_{L_\infty(\Pi\times\Pi)} (\operatorname{mes}\Pi)(\operatorname{mes} h) \equiv C(\operatorname{mes} h)$. Так как, очевидно, $\mathcal{B}(G) \subset \mathcal{B}(F)$ и, следовательно, $\mathcal{B}(G)^{(-)} \subset \mathcal{B}(F)^{(-)}$, то $\Upsilon_F(r) \le \sup\limits_{t\in\Pi}\{\inf\limits_{h\in\mathcal{B}(G)^{(-)},\, h\supset D(t,r)} \|P_h F P_h\|\} \le C\sigma_G(r)$. Теорема 6 доказана.

К указанному в этой теореме классу операторов относятся, например, все операторы типа потенциала со слабополярным ядром вида $G[z](t) = \int\limits_\Pi K(t,\xi)|t-\xi|^{-s} z(\xi)\,d\xi$, где $K \in L_\infty(\Pi\times\Pi)$, $s \in (0,n)$. Каждый из них является л.о.о. в любом L_p, $p \in [1,+\infty]$, причем его степень $k > n/(n-s)$ представима в виде интегрального оператора с ограниченным ядром (см. [21, теоремы 8.1, 8.5]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95 — 01 — 00701).

---

*) Для положительного л.о.о. $B : L_\infty \to L_\infty$ норма $\|B\| = \|B[1]\|_{L_\infty}$, где 1 — функция, тождественно равная единице в Π.

Литература

1. *Сумин В. И.* // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, № 5. С. 1056 — 1059.
2. *Сумин В. И.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 12. С. 2097 — 2109.
3. *Тихонов А. Н.* // Бюлл. МГУ. Секция А. 1938. Т. 1, вып. 8. С. 1 — 25.
4. *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч. 1. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Н.Новгород, 1992.
5. *Сумин В. И.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 1. С. 3 — 21.
6. *Сумин В. И.* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 2. С. 295 — 299.
7. *Забрейко П. П.* // Лит. мат. сб. 1967. Т. 7, № 2. С. 281 — 287.
8. *Забрейко П. П., Ломакович А. Н.* // Укр. мат. журн. 1987. Т. 39, № 5. С. 648 — 651.
9. *Забрейко П. П., Ломакович А. Н.* // Укр. мат. журн. 1990. Т. 42, № 9. С. 1187 — 1191.
10. *Гусаренко С. А.* // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295, № 5. С. 1046 — 1049.
11. *Гусаренко С. А.* // Функционально-дифференц. уравнения: Сб. научн. тр. Пермь, 1989. С. 53 — 57.
12. *Жуковский Е. С.* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 9. С. 1599 — 1605.
13. *Жуковский Е. С.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 2. С. 250 — 255.
14. *Сумин В. И., Чернов А. В.* // Современные методы нелинейного анализа: Тез. докл. конф. Воронеж, 1995. С. 91 — 92.
15. *Сумин В. И., Чернов А. В.* // Мат. моделирование и оптимальное управление: Межвуз. сб. научн. тр. Н. Новгород, 1996. С. 32 — 42.
16. *Tonelli L.* // Bull. Calcutta Math. Soc. 1929. Vol. 20. P. 31 — 48.
17. *Corduneanu C.* Integral equations and applications. Cambridge, 1991.
18. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., 1967.
19. *Бухгейм А. Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск, 1983.
20. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., 1977.
21. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.

Нижегородский государственный университет,
Нижегородский государственный технический университет

Поступила в редакцию
17 июля 1996 г.