С. В. Керов, Реализации представлений полугруппы Брауэра,

Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1987, том 164, 189–193

https://www.mathnet.ru/znsl5482

С.В.Керов

РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУГРУППЫ БРАУЭРА

Теория полиномиальных представлений полных линейных групп $GL(m)$ тесно связана с теорией представлений симметрических групп $\mathfrak{S}_n$. Обе группы действуют в пространстве $(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$, порождая взаимные коммутанты. Эта теорема И.Шура позволяет строить представления $GL(m)$, используя гармонический анализ на конечной группе $\mathfrak{S}_n$.

Р.Брауэр [I], развив и упростив результат Г.Вейля, получил аналогичную теорему взаимности для ортогональной и симплектической групп. В обоих случаях роль группы $\mathfrak{S}_n$ играла конечная полугруппа $\mathfrak{B}_n$. С полугруппой Брауэра $\mathfrak{B}_n$ связано семейство алгебр $B_n(v)$, представления которых и порождают коммутанты к n-ым тензорным степеням векторных представлений групп $O(m)$ и $Sp(2m)$ при $v=m$, $v=-2m$, соответственно.

Совсем недавно Бирман и Венцль [2], в связи с анализом нового инварианта зацеплений - многочлена Кауфмана, построили деформацию $BW_n(u,v)$ алгебры $B_n(v)$. Эти алгебры участвуют в теореме взаимности с квантовыми аналогами ортогональной и симплектической групп.

Как показал Венцль [3], при нецелых значениях параметра v алгебры $B_n(v)$ полупросты и изоморфны. Ниже дано прямое элементарное описание неприводимых представлений этих алгебр.

Автор благодарен А.М.Вершику за внимание к работе, Н.Ю.Решетихину за полезные обсуждения и А.В.Зелевинскому за указание на связь с работой А.А.Клячко [4].

I. Полугруппа Брауэра

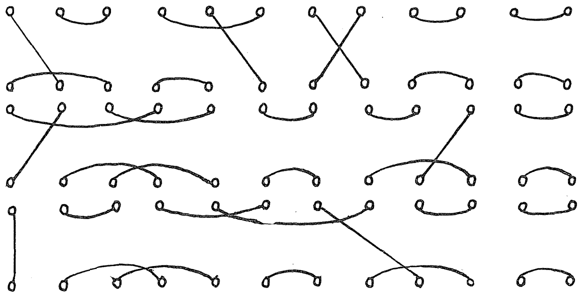
Рассмотрим две последовательности из n предметов (входных и выходных "гнезд").

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произвольное разбиение всей совокупности $2n$ предметов на пары назовем <u>чипом</u> *) с $2n$ ножками.

Чипы изображаются графами (рис. I) дуги которых делятся на <u>вертикали</u>, связывающие входные гнезда с выходными и <u>горизонтали</u>, соединяющие гнезда одного типа.

---

*) Чипами называют интегральные микросхемы, составляющие элементную базу современной электроники.


$=b$

$=a$

$=ab$

Рис.I

Соединим дугами входные гнезда чипа a с соответствующими выходными гнездами чипа b. Вся совокупность $4n$ гнезд распадается на нити – максимальные последовательности различных гнезд $(p_1, p_2, \dots p_N)$, в которых соседние гнезда p_i, p_{i+1} связаны дугой, $1 \le i < N$. Концы незамкнутых нитей располагаются на выходных гнездах чипа a и входных гнездах b и задают композицию ab (см.рис.I, взятый из [I]). Замкнутые нити – петли – в определении композиции не участвуют.

ЗАМЕЧАНИЯ.

I) Полугруппа чипов с $2n$ ножками $\mathfrak{D}_n$ введена Р.Брауэром [I].

2) $|\mathfrak{D}_n| = (2n-1)!!$

3) Подгруппа обратимых чипов в $\mathfrak{D}_n$ отождествляется с симметрической группой $\mathfrak{S}_n$.

4) На полугруппе $\mathfrak{D}_n$ имеется инволютивный антиавтоморфизм $*$, совпадающий на $\mathfrak{S}_n$ со взятием обратной подстановки. По определению, чип a^* получается из a, если считать входные ножки выходными и обратно.

2. Проективные представления $\mathfrak{D}_n$.

Обозначим через $L(a,b)$ число петель, возникающих при перемножении чипов a,b и пусть

$$g_v(a,b) = v^{L(a,b)}, \tag{I}$$

где $v \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – параметр.

ЛЕММА I. Справедливо тождество.

$$g_v(a,bc)\, g_v(b,c) = g_v(a,b)\, g_v(ab,c), \tag{2}$$

т.е. g_v – коцикл на полугруппе $\mathfrak{D}_n$.

Определим в пространстве формальных комплексных линейных комбинаций элементов $\mathfrak{D}_n$ умножение, полагая $a * b =$

$= g_v(a,b)ab$. Построенная алгебра $B_n(v)$, согласно лемме I, ассоциативна.

Проективные представления полугруппы $\mathfrak{D}_n$, т.е. семейства операторов $\pi(a)$, $a \in \mathfrak{D}_n$, для которых

$$\pi(a)\pi(b) = g_v(a,b)\,\pi(ab) \tag{3}$$

естественно отождествляются с обычными представлениями алгебры Брауэра $B_n(v)$.

ПРИМЕР: пусть $\xi_1,\dots,\xi_m$ - базис в $\mathbb{C}^m$ и $V = \mathbb{C}^m \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^m$ (n сомножителей). Последовательности $i = (i_1,\dots,i_n)$ отвечает базисный вектор $\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_n}$ в пространстве V . Положим $M^{i_1,\dots,i_n}_{j_1,\dots,j_n}(a) = 1$, если в каждой паре связанных чипом a мест значения индексов совпадают и $M^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n}(a) = 0$ в противном случае. Тогда матрицы $M(a) = \{M^i_j(a)\}$ задают проективное представление $\mathfrak{D}_n$ с параметром $v = m$

ТЕОРЕМА (Брауэр [I]). Операторы $M(a)$ и операторы тензорного представления группы $O(m)$ в пространстве V порождают взаимные коммутанты.

3. Реализации представлений $\mathfrak{D}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соединением назовем последовательность из n предметов ("гнезд"), некоторые из которых связаны в пары (горизонтали).

Обозначим множество соединений с ℓ горизонталями через $\mathfrak{X}_{n,\ell}$; ясно, что $|\mathfrak{X}_{n,\ell}| = C_n^{2\ell}(2\ell-1)!!$

Свяжем дугами гнезда соединения $x \in \mathfrak{X}_{n,\ell}$ с соответствующими входными гнездами чипа $a \in \mathfrak{D}_n$. Совокупность всех $3n$ гнезд как и в п.I распадается на нити. Назовем соединение x допустимым для чипа a , если каждая нить с концами в гнездах соединения x совпадает с горизонталью этого соединения. Иначе говоря, нить, ведущая из изолированного в x гнезда, должна заканчиваться в выходном гнезде чипа a . Нити с обоими концами в выходных гнездах чипа a задают новое соединение $y = ax \in \mathfrak{X}_{n,\ell}$, результат действия a на x .

Если соединение x допустимо для чипа a , то определена подстановка $\sigma(a,x) \in \sigma_{n-2\ell}$, переводящая $(n-2\ell)$ изолированных гнезд x в изолированные гнезда соединения y (принимается во внимание только относительное положение гнезд в каждом ряду). Кроме того, обозначим через $L(a,x)$ число петель и положим

$$f_v(a,x)=v^{L(a,x)}, \tag{4}$$

где $v \in \mathbb{C}^*$. На рис.2 $L(a,x)=2$ и $\sigma(a,x)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$

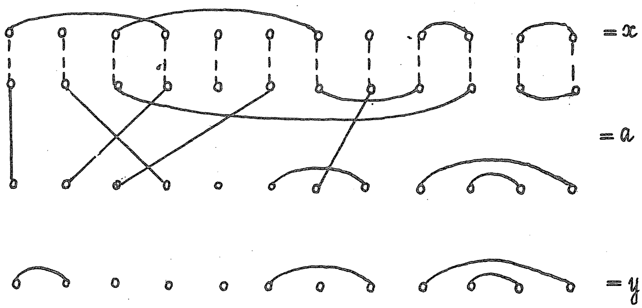


Рис.2

ЛЕММА 2. Пусть $a,b \in \mathfrak{D}_n$, соединение $x \in \mathfrak{X}_{n,\ell}$ допустимо для b и соединение $y=bx$ допустимо для a. Тогда x допустимо для ab и выполняются тождества

$$g_v(a,b)\,f_v(ab,x)=f_v(a,bx)\,f_v(b,x), \tag{5}$$

$$\sigma(ab,x)=\sigma(a,bx)\,\sigma(b,x). \tag{6}$$

Пусть $H_{n,\ell}$ – пространство линейных комбинаций элементов из $\mathfrak{X}_{n,\ell}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Положим

$$\pi_a(x)=f_v(a,x)\,ax, \tag{7}$$

если соединение x допустимо для $a \in \mathfrak{D}_n$ и $\pi_a(x)=0$ иначе.

ТЕОРЕМА 2. Операторы π_a, $a \in \mathfrak{D}_n$, задают проективное представление $\mathfrak{D}_n$ с коциклом g_v в пространстве $H_{n,\ell}$. Если $v \notin \mathbb{Z}$, то представление неприводимо.

Чтобы получить другие неприводимые представления, возьмем диаграмму Юнга λ с $(n-2\ell)$ клетками и пусть H^ℓ – пространство соответствующего представления группы $\sigma_{n-2\ell}$. В пространстве $H^\lambda_{n,\ell}=H^\lambda \otimes H_{n,\ell}$ определим линейные операторы π_a, полагая

$$\pi_a(h\otimes x)=f_v(a,x)\,(\pi^\lambda_{\sigma(a,x)}h \otimes ax), \tag{8}$$

если соединение x допустимо для $a \in \mathfrak{D}_n$ и $\pi_a(h\otimes x)=0$

иначе; здесь $h \in H^\lambda$.

ТЕОРЕМА 3. Операторы π_a, $a \in \mathfrak{D}_n$, задают проективное представление $\mathfrak{D}_n$ с коциклом g_v в пространстве $H^\lambda_{n,l}$ размерности

$$\dim H^\lambda_{n,l} = C_n^{2l}(2l-1)!!\dim H^\lambda. \tag{9}$$

Если $v \notin \mathbb{Z}$, то построенное представление $(\lambda)_l$ неприводимо, представления $(\lambda)_l$, где $0 \leqslant 2l \leqslant n$ и λ – диаграмма Юнга с $n-2l$ клетками составляют полный список неприводимых проективных представлений полугруппы $\mathfrak{D}_n$.

При ограничении на подгруппу $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{D}_n$ проективное представление $(\lambda)_l$ становится обычным и разлагается на неприводимые следующим образом:

$$(\lambda)_l|\mathfrak{S}_n \simeq (\lambda)\circ\theta_l, \tag{10}$$

где $\theta_l = (\emptyset)_l|\mathfrak{S}_{2l}$ и (λ) – неприводимое представление $\mathfrak{S}_{n-2l}$. Представление θ_l имеет размерность $(2l-1)!!$ а его разложение на неприводимые компоненты получено А.А.Клячко [4] :

$$\theta_l = \sum_\mu (\mu), \tag{11}$$

где μ пробегает все диаграммы Юнга с $2l$ клетками и четными длинами строк.

Полученные реализации приводят к простым формулам для характеров представлений $(\lambda)_l$, и характеров предельной полугруппы $\mathfrak{D}_\infty = \varinjlim \mathfrak{D}_n$ финитных чипов. Эти вопросы, как и реализация представлений алгебры $BW_n(u,v)$ будут рассмотрены отдельно.

Литература

1. B r a u e r R. On algebras which are connected with semisimple continuous groups. - Ann. of Math., 1937, v.38, N 4, p. 857-872.
2. B i r m a n J.S., W e n z l H. Braids, link polynomials and a new algebra. - Preprint, 1987.
3. W e n z l H. On the structure of Brauer's centralizer algebras. - Preprint, 1987.
4. К л я ч к о А.А. Централизаторы инволюций и модели симметрической и полной линейной групп. - Исследования по теории чисел.7.Саратов,1978,с.59-64.