

ИЗМЕНЕНИЕ СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ КРАТНОЙ РЕКУРСИИ

(Результат доложен II ноября 1971 г.)

В работах [1], [2] Лёб и Вайнер расширили классификацию Гегорчика, построив иерархию классов  $C_\alpha$  ( $\alpha$  — ординал) такую, что

- 1) при  $\alpha < \omega$  эта система связана с иерархией Гегорчика соотношением  $C_\alpha = \varepsilon^{\alpha+1}$ ;
- 2)  $\bigcup_{\alpha < \omega} C_\alpha$  совпадает с классом  $M_k$  всех  $k$ -рекурсивных функций ( $k=1, 2, \dots$ ) (см. [2]);
- 3)  $\bigcup_{\alpha < \varepsilon_0} C_\alpha$  совпадает с множеством всех  $\alpha$ -рекурсивных функций с ординалами  $\alpha < \varepsilon_0$  (см. [3]).

Сложность и скорость роста функции из  $C_\alpha$  характеризуются ординалом  $\alpha$ . В настоящей заметке показывается, что сложность и скорость роста функции, получаемой одним применением оператора  $k$ -рекурсии к функциям класса  $C_\alpha$ , характеризуются ординалом  $\alpha + \omega^{k-1}$ . Отсюда следует, что  $M_k$  расслаивается по числу применений  $k$ -рекурсий следующим образом: если обозначить через  $M_k^{(n)}$  класс функций, при построении которых число итераций оператора  $k$ -рекурсии не превосходит  $n$ , то

$$M_k^{(n)} = \bigcup_{\alpha < (n+1)\omega^{k-1}} C_\alpha$$

В частности, для примитивной рекурсии ( $1$ -рекурсии)  $M_1^{(n)} = C_n$  (это было доказано в [4]).

I. Напомним некоторые сведения о классах  $C_\alpha$  (см. [1], [2]). Иерархия строится на основе следующим образом определенных функций  $F_\alpha^n$ :

$$F_0^n(x) = (n+1)(x+1),$$

$$F_{\beta+1}^0(x) = F_\beta^x(x),$$

$$F_\sigma^0(x) = F_{\{\sigma\}}^0(x), \quad \sigma - \text{предельный ординал,}$$

$$F_\gamma^0(x) = F_\gamma^0(F_\gamma^n(x)), \quad \gamma > 0.$$

Здесь используются обозначения из [2], относящиеся к конструктивным ординалам, в частности,  $\{\sigma\}(x)$  обозначает  $x$ -ый член конструктивно заданной строго возрастающей последовательности ординалов, сходящейся к  $\sigma$ .

Класс  $C_\alpha$  определяется так:  $C_\alpha$  есть наименьший класс, содержащий функции  $\lambda x 0$ ,  $\lambda x_1 \dots x_n. x_n$ ,  $\lambda x y (x+y)$ ,  $\{\lambda x F_\beta(x)\}_{\beta < \alpha}$  и замкнутый относительно операций подстановки и ограниченной примитивной рекурсии.

При  $\alpha \geq 2$  это определение эквивалентно такому (см. [3]):  
 $f \in C_\alpha$  тогда и только тогда, когда существуют машина Тьюринга  $T$  и число  $p$  такие, что число ячеек, используемых при вычислении  $f(x_1, \dots, x_n)$  на машине  $T$  не превосходит  $F_\alpha^p(\max(x_1, \dots, x_n))$ . В дальнейшем это определение в терминах машин Тьюринга не используется.

Из свойств функций  $F_\alpha^n$  и классов  $C_\alpha$  нам понадобятся следующие (см. [1]):

- 1) функции  $F_\alpha^n(x)$  строго монотонны по  $x$  и по  $n$ ;
- 2)  $F_\alpha^n(x) > \max(n, x)$ ;
- 3)  $F_\alpha^{n+1}(x) \geq F_\alpha^0(x+n)$ ;
- 4) если  $f \in C_\alpha$ , то найдется  $p$  такое, что для всякого  $X$  выполняется неравенство  $f(X) < F_\alpha^p(|X|)$  (здесь и далее  $X = x_1, \dots, x_k$ ,  $|X| = \max(X)$ ).

2. ЛЕММА. Пусть функции  $g$  и  $h$  принадлежат классу  $C_\alpha$ , и  $f$  получается из  $g$  и  $h$  по схеме примитивной рекурсии. Тогда  $f \in C_{\alpha+1}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия леммы. Тогда

$$\begin{aligned} f(u, 0) &= g(u) \\ f(u, y+1) &= h(u, y, f(u, y)), \end{aligned}$$

$g, h \in C_\alpha$ . Следовательно найдутся  $p_1$  и  $p_2$  такие, что  $g(X) < F_\alpha^{p_1}(|X|)$  и  $h(Y) < F_\alpha^{p_2}(|Y|)$ . Положим  $p = \max(p_1, p_2, 1)$  и докажем индукцией по  $y$ , что  $f(u, y) < F_\alpha^{p(y+1)+y}(u, y)$ .

Пользуясь свойствами функций  $F_\alpha^n$ , имеем:

$$\begin{aligned} f(u, 0) &= g(u) < F_\alpha^{p_1}(|u|) \leq F_\alpha^{p(0+1)+0}(u, 0); \\ f(u, y+1) &= h(u, y, f(u, y)) < \\ &< F_\alpha^p(\max\{u, y, F_\alpha^{p(y+1)+y}(u, y)\}) = \\ &= F_\alpha^p(F_\alpha^{p(y+1)+y}(u, y)) = F_\alpha^{p(y+2)+y+1}(u, y), \end{aligned}$$

и требуемое неравенство доказано.

Далее,

$$\begin{aligned} f(u, y) &< F_\alpha^{p(y+1)+y}(u, y) < F_\alpha^{p(|u, y|+1)+y}(p(|u, y|+1)+y) = \\ &= F_\alpha^0(p(|u, y|+1)+y), \end{aligned}$$

так что  $f$  мажорируется функцией из класса  $C_{\alpha+1}$ . Таким образом,  $f \in C_{\alpha+1}$ , так как  $f$  строится из  $g, h$  и  $F_\alpha^0$ .

операцией ограниченной примитивной рекурсии.

Лемма доказана.

3. Будем рассматривать  $k$ -рекурсию в нормальной форме ( $k = 2, 3, \dots$ ). Обозначим через  $R_k$  оператор  $k$ -рекурсии, ставящий в соответствие функциям  $g, h_1, \dots, h_{k-1}$  функцию  $f = R_k g h_1 \dots h_{k-1}$  такую, что

$$f(x_1, \dots, x_k) = 0, \quad \text{если } x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k = 0$$

$$f(x'_1, \dots, x'_k) = g(x_1, \dots, x_k, f^1, \dots, f^k) \text{ в противном случае,}$$

где  $f^k = f(x'_1, \dots, x'_{k-1}, x_k)$ , а при  $1 \leq i < k$

$$f^i = f(x'_1, \dots, x'_{i-1}, x_i, h_1^i(x_1, \dots, x_k, f^k), \dots, h_{k-i}^i(x_1, \dots, x_k, f^k)).$$

Под  $R_1$  мы понимаем оператор примитивной рекурсии.

Мы хотим доказать, что если  $f$  получается в результате одного применения оператора  $R_k$  к функциям класса  $C_\alpha$ , то при  $k=1$  имеем  $f \in C_{\alpha+1}$ , а при  $k>1$  функция  $f$  примитивно рекурсивна над  $C_{\alpha+\omega^{k-1}}$ . Точнее, имеет место

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $\alpha < \omega^\omega$  и функции  $g, h_1, h_2, \dots, h_{k-1}$  принадлежат  $C_\alpha$ . Тогда

1) функция  $f = R_1 g h$  может быть построена из начальных функций класса  $C_{\alpha+1}$  операциями подстановки и ограниченной примитивной рекурсии;

2) при  $k>1$  функция  $f = R_k g h_1 \dots h_{k-1}$  может быть построена из начальных функций класса  $C_{\alpha+\omega^{k-1}}$  операциями подстановки и примитивной рекурсии.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** теоремы проведем индукцией по  $k$ . При  $k=1$  наше утверждение есть лемма из пункта 2. Пусть  $k>1$  и  $f = R_k g h_1 \dots h_{k-1}$ . Будем рассматривать "срезки"

$f_n = \lambda x_2 \dots x_k f(n, x_2, \dots, x_k)$  функции  $f$ . Легко видеть, что каждая "срезка"  $f_n$  получается из функций класса  $C_\alpha$  с помощью  $n$ -кратного применения оператора  $R_{k-1}$ .

Из этого замечания и индукционного предположения вытекает, что для любого  $n$  функции  $f_n$  могут быть построены из начальных функций класса  $C_{\alpha+n\omega^{k-2}}$  операциями подстановки и примитивной рекурсии. По лемме имеем:

$$f_n \in C_{\alpha+n\omega^{k-2}+s} \subset C_{\alpha+\omega^{k-1}}$$

а это означает, что для всякого  $n$  найдется  $\tau$  такое, что

$$f_n(x_2, \dots, x_k) = f(n, x_2, \dots, x_k) < F_{\alpha+\omega^{k-1}}^\tau(n, x_2, \dots, x_k).$$

Докажем, что  $f$  мажорируется функцией класса  $C_{\alpha+\omega^{k-1}}$ . Это будет установлено, если мы убедимся, что числа  $\tau$  растут не слишком быстро при увеличении  $n$ , точнее, что  $\tau$  можно задать

примитивно рекурсивной функцией от  $n$ .

Рассмотрим гедделевскую нумерацию  $\vee$  функций из класса

$$\bigcup_{\alpha < \omega} \omega C_\alpha$$

и построим примитивно рекурсивную функцию  $\tau$  такую, что если

$$n = \vee q \quad \text{и} \quad q \in C_\beta, \quad \text{то}$$

$$q(X) < F_\beta^{\tau(n)}(|X|)$$

Для определенности в качестве  $\vee$  возьмем нумерацию, определяемую следующим образом:

$$\vee \sigma = 2^1,$$

$$\vee (x+y) = 2^2,$$

$$\vee J_\kappa^n = 2^3 \cdot 3^n \cdot 5^\kappa,$$

$$\vee F_\alpha^0 = 2^4 \cdot 3^{a_0} \cdot \dots \cdot p_{m+3}^{a_m} \quad (\alpha = a_0 + a_1 \omega + \dots + a_m \omega^m),$$

$$\vee S\varphi_1 \dots \varphi_\kappa = 2^5 \cdot 3^{\vee \varphi_1} \cdot \dots \cdot p_{\kappa+3}^{\vee \varphi_\kappa},$$

$$\vee \bar{R}\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = 2^6 \cdot 3^{\vee \varphi_1} \cdot 5^{\vee \varphi_2} \cdot 7^{\vee \varphi_3},$$

где  $\sigma$ ,  $x+y$ ,  $J_\kappa^n$ ,  $F_\alpha^0$  - начальные функции,  $S$  и  $\bar{R}$  - операторы подстановки и ограниченной примитивной рекурсии.

Определим теперь функцию  $\tau$ .

1) Если  $n$  равно одному из чисел  $\vee \sigma$ ,  $\vee (x+y)$ ,  $\vee J_\kappa^n$ , то положим  $\tau(n) = 1$ . Для любых  $x$ ,  $y$ ,  $\beta$  и  $X$  выполняются неравенства

$$\sigma, x+y, J_\kappa^n < F_\beta^1(|X|)$$

2) Пусть  $n = \vee F_\alpha^0$  и  $\alpha = a_0 + a_1 \omega + \dots + a_m \omega^m$ . Положим  $\tau(n) = \max(a_0, \dots, a_m) + 3$ .

Используя лемму 5.2 из [2], легко доказать индукцией по  $i$  неравенство

$$F_{a_0 + \dots + a_m \omega^m}^0(x) < F_{(a_i+1)\omega^i + \dots + a_m \omega^m}^0(|x, a|),$$

где  $a = \max(a_0, \dots, a_m) + 2$ . Рассмотрим  $\beta$  вида  $b_0 + b_1 \omega + \dots + b_m \omega^m$  такое, что  $\alpha < \beta$ . В этом случае найдется  $l$  такое, что  $a_l < b_l$  и  $a_{l+i} = b_{l+i}$  ( $i = 1, \dots, m-l$ ). Имеем:

$$\begin{aligned} F_\alpha^0(x) &< F_{(a_l+1)\omega^l + \dots + a_m \omega^m}^0(|x, a|) \leq \\ &\leq F_{b_l \omega^l + \dots + b_m \omega^m}^0(|x, a|) \leq F_\beta^0(|x, a|) \leq \\ &\leq F_\beta^0(x+a) < F_\beta^{a+1}(x). \end{aligned}$$

Значит, можно считать, что  $\tau(n) = a+1 = \max(a_0, a_1, \dots, a_m) + 3$ .

3) Если  $f = S\varphi_1 \dots \varphi_\kappa$  и  $n = \vee f$ , то положим

$$\tau(n) = \tau(\vee\varphi) + \max_i \{ \tau(\vee\varphi_i) \} + 1.$$

Легко видеть, что

$$f(X) = \varphi(\varphi_1(X), \dots, \varphi_k(X)) < F_{\alpha}^{\tau(\vee\varphi)}(\max_i \{ F_{\alpha}^{\tau(\vee\varphi_i)}(|X|) \}) = F_{\alpha}^{\tau(n)}(|X|)$$

4) Если  $f = \bar{R}\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ , то можно взять  $\tau(\vee f) = \tau(\vee\varphi_3)$ , так как

$$f(X) < \varphi_3(X) < F_{\alpha}^{\tau(\vee\varphi_3)}(|X|).$$

5) В остальных случаях положим  $\tau(n) = 0$ .

Из построения ясно, что  $\tau$  — примитивно рекурсивная функция.

Продолжим доказательство теоремы. Как было замечено, "срезка"  $f_n$  функции  $f = R_k g h_1 \dots h_{k-1}$  может быть построена из начальных функций класса  $C_{\alpha+n\omega^{k-2+s}}$ . Зафиксируем способ построения, тогда  $\vee f_n$  примитивно рекурсивно зависит от  $n$ . Поэтому  $\tau(\vee f_n)$  — примитивно рекурсивная функция от  $n$  (обозначим ее через  $\tau'$ ).

Теперь докажем, что  $f$  мажорируется функцией из  $C_{\alpha+\omega^{k-1}}$ . По определению  $\tau'$  и индукционному предположению имеем:

$$\begin{aligned} f(X) &= f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f_{x_1}(x_2, \dots, x_k) < F_{\alpha+x_1\omega^{k-2+s}}^{\tau'(x_1)}(|X|) \leq \\ &\leq F_{\alpha+x_1\omega^{k-2+s}}^{\tau'(x_1)+|X|}(\tau'(x_1)+|X|) = F_{\alpha+x_1\omega^{k-2+s+1}}^{\circ}(\tau'(x_1)+|X|) < \\ &< F_{\alpha+\omega^{k-1}}^{\circ}(\tau'(x_1)+|X|). \end{aligned}$$

Таким образом,  $f$  ограничена функцией из  $C_{\alpha+\omega^{k-1}}$ .

Как доказала Петер (см. [5]), ограниченная  $k$ -рекурсия сводима к примитивной рекурсии. Следовательно,  $f$  может быть построена из начальных функций класса  $C_{\alpha+\omega^{k-1}}$  операциями подстановки и примитивной рекурсии.

Теорема доказана.

Автор признателен Г.Е.Минцу за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Löb M.H., Wainer S.S. Hierarchies of number-theoretic functions I. "Arch.math.Logik und Grundlagenf.", 1970, 13, № 1-2.
2. Löb M.H., Wainer S.S. Hierarchies of number-theoretic functions II. "Arch.math.Logik und Grundlagenf." 1970, 13, № 3-4.

3. Wainer S.S., A classification of the ordinal recursive functions", "Arch.math.Logik und Grunlagenf.", 1970, I3, № 3-4.
4. Parsons C., Hierarchies of primitive recursive functions," Z. math.Logik und Grundl.Math.", 1968, I4, 357-376.
5. Peter R. Recursive Funktionen. Budapest, 1951, (перевод: Петер Р., Рекурсивные функции, М., 1954).