

# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 1 (2001)

Труды IV Международной конференции  
«Современные проблемы теории чисел и ее приложения»

---

УДК 511.217

## О ФОРМУЛАХ СУММИРОВАНИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ <sup>1</sup>

А. В. Устинов

### 1 Введение

Известно, что числа Бернулли  $B_n$  и полиномы Бернулли  $B_n(x)$  возникают в самых разных вопросах теории чисел и приближенного анализа (см. [1]–[5]). Одним из важных приложений является формула суммирования Эйлера:

$$\sum_{\nu=a}^{b-1} f(\nu) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{\nu=1}^n \frac{B_\nu}{\nu!} f^{(\nu-1)}(x) \Big|_a^b - R_n[f], \quad (1)$$

где

$$R_n[f] = \int_a^b \frac{B_n(1-\{x\})}{n!} f^{(n)}(x) dx = (-1)^n \int_a^b \frac{B_n(\{x\})}{n!} f^{(n)}(x) dx.$$

Здесь и далее предполагается, что функция  $f(x)$  является достаточно „гладкой“, то есть все ее производные, входящие в формулы, существуют и являются непрерывными функциями.

Другим применением полиномов Бернулли является формула для представления функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[0; 1]$ :

$$f(x) = \int_0^1 f(y) dy + \sum_{\nu=1}^n \frac{B_\nu(x)}{\nu!} \left( f^{(\nu-1)}(y) \Big|_0^1 \right) - R_n[f], \quad (2)$$

где

$$R_n[f] = \int_0^1 \frac{B_n(\{x-y\})}{n!} f^{(n)}(y) dy = (-1)^n \int_0^1 \frac{B_n(1-\{x-y\})}{n!} f^{(n)}(y) dy$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке фонда РФФИ, грант N 01-01-00738

(см., например, [4], лемма 30).

Если производные функции  $f(x)$  неизвестны, то при практическом использовании подобных формул возникает необходимость приближать производные конечными разностями.

В работе [3] Н. М. Коробовым были введены специальные числа  $P_n$  и специальные полиномы  $P_n(x)$ , которые можно назвать дискретными аналогами чисел Бернулли  $B_n$  и полиномов Бернулли  $B_n(x)$ . Аналогия заключается в том, что свойства полиномов  $B_n(x)$  превращаются в свойства полиномов  $P_n(x)$  при замене непрерывных объектов на дискретные: производных — на конечные разности, интегралов — на конечные суммы, рядов Фурье — на конечные ряды Фурье.

В той же работе [3] были изучены основные свойства специальных полиномов и доказана формула, связывающая их с полиномами Бернулли. Там же для периодических функций многих переменных при помощи полиномов  $P_n(x)$  были построены интерполяционные формулы, которые не нуждаются в знании производных данной функции, а используют лишь ее значения.

В статье [6] были получены дискретные аналоги формул (1) и (2).

В настоящей работе вводятся полиномы  $K_n(x)$ , которые отличаются от специальных полиномов  $P_n(x)$  постоянным множителем:  $K_n(x) = n! P_n(x)$ . Для таких полиномов проще прослеживаются аналогии с полиномами Бернулли. В дальнейшем полиномы  $K_n(x)$  будем называть полиномами Коробова.

В разделе 3 данной работы в терминах  $K_n(x)$  переформулируются свойства специальных полиномов  $P_n(x)$ , доказанные в работе [3]. Затем доказывается ряд новых свойств, аналогичных известным свойствам полиномов Бернулли.

В разделе 4 рассматриваются многочлены  $Q_n(x) = K_n(x + n/2 - 1)$ , которые оказываются более удобными при изучении геометрических свойств полиномов  $K_n(x)$ .

В разделе 5 приводятся различные формулы суммирования и интерполяции с участием полиномов  $K_n(x)$  и  $Q_n(x)$ .

В разделе 6 доказанные свойства полиномов  $K_n(x)$  и  $Q_n(x)$  применяются для оценки остаточных членов в формулах суммирования.

## 2 Обозначения

Будем обозначать через  $E^a$  оператор сдвига  $E^a f(x) = f(x + a)$  и через  $\Delta_a = E^a - 1$  — оператор конечной разности  $\Delta_a f(x) = f(x + a) - f(x)$ . Если  $a = 1$ , то индекс 1 будем опускать ( $E^1 = E$ ,  $\Delta_1 = \Delta$ ). Разностный оператор  $\Delta$  является конечным аналогом производной. Кроме него в исчислении конечных разностей также используются оператор разности „назад“  $\nabla = 1 - E^{-1}$ :  $\nabla f(x) = f(x) - f(x - 1)$  и оператор центральной конечной разности  $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$ :

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

В дальнейшем через  $x^{\underline{n}}$ ,  $x^{\overline{n}}$  и  $x^{[n]}$  будем обозначать убывающие, возрастающие и центральные факториальные степени:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)};$$

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)};$$

$$x^{[n]} = x \cdot \left(x + \frac{n}{2} - 1\right) \left(x + \frac{n}{2} - 2\right) \dots \left(x - \frac{n}{2} + 1\right) = x \frac{\Gamma\left(x + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(x - \frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Под  $x^{[n]-1}$  будем понимать  $x^{[n]} \cdot x^{-1}$ . Факториальные степени по отношению к операторам  $\Delta$ ,  $\nabla$  и  $\delta$  играют ту же роль, что и функция  $x^n$  по отношению к обычной производной. Нетрудно проверить, что для факториальных степеней справедливы следующие аналоги равенства  $(x^n)' = nx^{n-1}$ :

$$\Delta x^{\underline{n}} = n x^{\underline{n-1}}, \quad \nabla x^{\overline{n}} = n x^{\overline{n-1}}, \quad \delta x^{[n]} = n x^{[n-1]}, \quad \delta x^{[n+1]-1} = n x^{[n]-1}.$$

### 3 Числа и полиномы Коробова

Напомним, что числа и полиномы Бернулли определяются равенствами

$$B_0 = 1, \quad \sum_{\nu=0}^n C_n^{\nu} B_{\nu} = B_n \quad (n \geq 2); \quad (3)$$

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^n C_n^{\nu} B_{\nu} x^{n-\nu} \quad (n \geq 0), \quad (4)$$

которые удобно записывать в символическом виде:

$$B_0 = 1, \quad (B+1)^n = B^n \quad (n \geq 2); \quad B_n(x) = (B+x)^n \quad (n \geq 0).$$

В этих соотношениях, после разложения по формуле бинома, следует  $B^{\nu}$  заменять на  $B_{\nu}$ , после чего они совпадут с равенствами (3) и (4).

Введем числа  $K_n$  и полиномы  $K_n(x)$  при помощи равенств, аналогичных (3) и (4), заменяя при этом обычные степени на убывающие факториальные.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Для фиксированного действительного  $p$ , отличного от 0, зададим числа  $K_n$  и полиномы  $K_n(x)$  при помощи равенств

$$K_0 = 1, \quad \sum_{\nu=0}^n C_n^{\nu} K_{\nu} p^{n-\nu} = K_n \quad (n \geq 2); \quad (5)$$

$$K_n(x) = \sum_{\nu=0}^n C_n^{\nu} K_{\nu} x^{n-\nu} \quad (n \geq 0). \quad (6)$$

Заметим, что формула бинома остается справедливой и в том случае, когда обычные степени заменяются на убывающие, возрастающие или центральные факториальные. Так, например, для убывающих факториальных степеней справедливо равенство

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^n C_n^\nu a^\nu b^{n-\nu} \quad (n \geq 0). \quad (7)$$

Поэтому определения (5) и (6) можно записать в виде символических равенств

$$K_0 = 1, \quad (K + p)^n = K^n \quad (n \geq 2); \quad K_n(x) = (K + x)^n \quad (n \geq 0),$$

в которых после раскрытия скобок по формуле (7) следует заменять  $K^\nu$  на  $K_\nu$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [3] рассматривались числа  $P_n$  и полиномы  $P_n(x)$ , определяемые равенствами

$$P_0 = 1, \quad C_p^1 P_n + \dots + C_p^{n+1} P_0 = 0 \quad (n \geq 1);$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = P_0 C_x^n + \dots + P_{n-1} C_x^1 + P_n \quad (n \geq 1).$$

Из определений вытекает, что числа  $K_n$  и полиномы  $K_n(x)$  связаны с  $P_n$  и  $P_n(x)$  равенствами

$$K_n = n! P_n, \quad K_n(x) = n! P_n(x).$$

Новое определение дано в связи с тем, что многочлены  $K_n(x)$  оказываются более удобными. Формулы с  $K_n(x)$  обретают большее сходство с аналогичными формулами для многочленов Бернулли. Кроме этого, нахождение новых равенств с полиномами  $K_n(x)$  упрощается из-за возможности записывать их в символическом виде.

Пользуясь определениями (5) и (6) нетрудно вычислить первые числа и полиномы Коробова:

$$K_1 = -\frac{p-1}{2}, \quad K_2 = \frac{p^2-1}{6}, \quad K_3 = -\frac{p^2-1}{4},$$

$$K_1(x) = x - \frac{p-1}{2}, \quad K_2(x) = x^2 - px + \frac{p^2-1}{6},$$

$$K_3(x) = x^3 - \frac{3(p+1)}{2}x^2 + \frac{p(p+3)}{2}x - \frac{p^2-1}{4}.$$

В дальнейшем, если окажется важна зависимость от параметра  $p$ , для полиномов  $K_n(x)$  будем использовать обозначение  $K_n(p, x)$ . Через  $\bar{K}_n(x)$  будем обозначать периодизированный полином  $K_n(x)$ :

$$\bar{K}_n(x) = K_n \left( p \left\{ \frac{x}{p} \right\} \right).$$

Отметим некоторые свойства чисел  $K_n$  и полиномов  $K_n(x)$ , полученные в работе [3]<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Свойства изменены с учетом новых определений (5) и (6).

$$1^\circ. K_n(0) = K_n \quad (n \geq 0).$$

$$2^\circ. \Delta K_n(x) = n K_{n-1}(x) \quad (n \geq 1).$$

$$3^\circ. K_n(p) - K_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, n \geq 0; \\ p, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

$$4^\circ. \text{ При целых } p \geq 2, x \geq 0$$

$$\sum_{z=0}^{x-1} K_n(z) = \frac{K_{n+1}(x) - K_{n+1}}{n+1} \quad (n \geq 0), \quad \sum_{z=0}^{p-1} K_n(z) = 0 \quad (n \geq 1).$$

$$5^\circ. \sum_{v=0}^{n-1} C_n^v K_v(x) p^{n-v} = p n x^{n-1} \quad (n \geq 1).$$

$$6^\circ. \text{ При целых } p \geq 2, x \in [0; p+n-2]$$

$$K_n(x) = -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}} \quad (n \geq 0).$$

В той же работе с указанием идеи доказательства были помещены формулы для производящих функций последовательностей  $\{K_n\}$  и  $\{K_n(x)\}$ :

$$7^\circ. \text{ При всех вещественных } p \neq 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{n!} z^n = \frac{pz}{(z+1)^p - 1}, \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} z^n = \frac{pz(z+1)^x}{(z+1)^p - 1}. \quad (9)$$

Причем при целых  $p$ ,  $|p| \geq 2$  радиус сходимости этих рядов равен  $R = 2 \sin \frac{\pi}{|p|}$ .

Описанные выше свойства являются аналогами известных свойств полиномов Бернулли (см., например, [1], [5]):

$$\begin{aligned}
B_n(0) &= B_n \quad (n \geq 0); & B'_n(x) &= n B_{n-1}(x) \quad (n \geq 1); \\
B_n(1) - B_n(0) &= \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, n \geq 0; \\ 1, & \text{если } n = 1; \end{cases} \\
\int_0^x B_n(z) dz &= \frac{B_{n+1}(z)}{n+1} \Big|_0^x \quad (n \geq 0), & \int_0^1 B_n(z) dz &= 0 \quad (n \geq 1); \\
\sum_{\nu=0}^n C_{n+1}^\nu B_\nu(x) &= (n+1)x^n \quad (n \geq 0); \\
B_n(\{x\}) &= -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{|m|>0} \frac{e^{2\pi i m x}}{m^n} \quad (n \geq 1), \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!} &= \frac{t}{e^t - 1}, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x) t^n}{n!} &= \frac{te^{tx}}{e^t - 1}.
\end{aligned}$$

Числа и полиномы Бернулли обладают и рядом других свойств. Перечислим некоторые из них:

$$\begin{aligned}
B_n(x+y) &= \sum_{\nu=0}^n C_n^\nu x^\nu B_{n-\nu}(y) \quad (n \geq 0) \quad (\text{формула сложения аргументов}); \\
B_n(mx) &= m^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} B_n\left(x + \frac{\nu}{m}\right) \quad (n \geq 0) \quad (\text{формула умножения}); \\
B_n(1-x) &= (-1)^n B_n(x) \quad (n \geq 0) \quad (\text{формула дополнения}); \\
\Delta B_n(x) &= n x^{n-1} \quad (n \geq 1); & B_n(1/2) &= (2^{1-n} - 1) B_n \quad (n \geq 0).
\end{aligned}$$

Если  $g(x)$  — многочлен степени  $n$ , то уравнение в конечных разностях  $\Delta f(x) = g'(x)$  с неизвестным многочленом  $f(x)$  имеет решением функцию

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{B_\nu}{\nu!} g^{(\nu)}(x).$$

Причем при любых вещественных  $x$  и  $h$  выполняется равенство

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^n \frac{B_\nu(h)}{\nu!} g^{(\nu)}(x).$$

Кроме того, для любого многочлена  $g(x)$  степени  $n$  справедлива формула Эйлера–Маклорена

$$g'(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu(h)}{\nu!} \Delta g^{(\nu)}(x).$$

Все эти свойства имеют свои аналоги и для полиномов Коробова.

$$8^\circ. K_n(x+y) = \sum_{v=0}^n C_n^v x^v K_{n-v}(y) \quad (n \geq 0).$$

9°. При  $p = p_1 p_2$  ( $p_1, p_2 \geq 2$ )

$$\sum_{v=0}^{p_1-1} K_n(p, x + v p_2) = p_1 K_n(p_2, x) \quad (n \geq 0).$$

$$10^\circ. K_n(p-x) = (-1)^n K_n(x+n-2), \quad \bar{K}_n(p-x) = (-1)^n \bar{K}_n(x+n-2) \quad (n \geq 0).$$

$$11^\circ. \frac{\Delta_p K_n(x)}{p} = n x^{n-1} \quad (n \geq 1).$$

$$12^\circ. K_n\left(p, \frac{n}{2} - 1\right) + K_n\left(p, \frac{p}{2} + \frac{n}{2} - 1\right) = 2K_n\left(\frac{p}{2}, \frac{n}{2} - 1\right) \quad (n \geq 0).$$

13°. Пусть  $g(x)$  — многочлен степени  $n$ . Тогда уравнение в конечных разностях

$$\frac{\Delta_p f(x)}{p} = \Delta g(x) \quad (10)$$

с неизвестным многочленом  $f(x)$  имеет решением функцию

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{K_v}{v!} \Delta^v g(x). \quad (11)$$

Причем при любых  $x$  и  $h$  выполняется равенство

$$f(x+h) = \sum_{v=0}^n \frac{K_v(h)}{v!} \Delta^v g(x). \quad (12)$$

14°. Для любого многочлена  $g(x)$  степени  $n$  справедлива формула

$$\Delta g(x+h) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{K_v(h)}{v!} \cdot \frac{\Delta^v \Delta_p g(x)}{p}.$$

Докажем справедливость свойств 7°–14°.

7°. Пусть  $F_K(z)$  — экспоненциальная производящая функция последовательности  $\{K_n\}$ :

$$F_K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{n!} z^n.$$

Определение чисел  $K_n$  (5) в терминах производящих функций переписывается в виде

$$F_K(z) (1+z)^p = F_K(z) + pz.$$

Отсюда следует равенство (8).

Если обозначить через  $F_K(x, z)$  — производящую функцию последовательности полиномов  $\{K_n(x)\}$

$$F_K(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} z^n,$$

то равенство (6) в терминах производящих функций означает, что

$$F_K(x, z) = F_K(z) \cdot (1+z)^x,$$

поэтому

$$F_K(x, z) = \frac{pz(z+1)^x}{(z+1)^p - 1}.$$

Если  $p$  — целое число и  $|p| \geq 2$ , то особыми точками функций  $F_K(z)$  и  $F_K(x, z)$  будут нули знаменателя

$$z_\nu = e^{2\pi i \frac{\nu}{p}} - 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots, |p| - 1).$$

Отсюда находится радиус сходимости рядов (8) и (9):

$$R = \min_{1 \leq \nu < |p|} |z_\nu| = 2 \sin \frac{\pi}{|p|}.$$

Свойство 8° получается, если в интерполяционную формулу Ньютона для многочлена  $f(x)$  степени  $n$

$$f(x+y) = \sum_{\nu=0}^n \frac{x^\nu}{\nu!} \Delta^\nu f(y) \quad (13)$$

подставить  $f(x) = K_n(x)$ .

9°. Докажем сначала, что свойство 9° выполняется для всех целых  $x$  из отрезка  $[0, p_2 + n - 2]$ . Согласно свойству 6°, при таких  $x$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p_1-1} K_n(p, x + jp_2) &= -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} \sum_{j=0}^{p_1-1} e^{2\pi i \frac{m(x+jp_2)}{p_1 p_2}} = \\ &= -p_1 n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p_1 p_2}} \delta_{p_1}(m) = p_1 K_n(p_2, x). \end{aligned}$$

Так как  $p_2 + n - 1 \geq n + 1$ , то два многочлена степени  $n$  принимают равные значения по крайней мере в  $n + 1$  точке. Значит они равны.

10°. Вновь воспользуемся разложением полинома  $K_n(x)$  в конечный ряд Фурье. Для целых  $x$  из отрезка  $[2 - n; p]$

$$K_n(p - x) = -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{m(p-x)}{p}} = -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m(1-x)}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n}.$$

Домножим в каждом слагаемом числитель и знаменатель на  $e^{-2\pi i \frac{mn}{p}}$  и заменим  $m$  на  $p - m$ :

$$K_n(p - x) = -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m(1-n-x)}{p}}}{(1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}})^n}.$$

Вынося из знаменателя сомножитель  $(-1)^n$ , приходим к нужному равенству:

$$K_n(p - x) = -(-1)^n n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{m(x+n-2)}{p}} = (-1)^n K_n(x + n - 2).$$

Вновь получилось, что два многочлена степени  $n$  совпадают по крайней мере в  $n + 1$  точке. Поэтому они равны.

11°. Из свойства 6° следует, что многочлен  $\Delta_p K_n(x) = K_n(p + x) - K_n(x)$  степени  $n - 1$  обращается в ноль в точках  $x = 0, 1, \dots, n$ . Поэтому с точностью до постоянного множителя он должен совпадать с многочленом  $x^{n-1}$ . Этот множитель находится, если сравнить коэффициенты при старших степенях  $x$ . Из определения полиномов  $K_n(x)$  следует, что коэффициент при  $x^n$  у них равен 1. Поэтому

$$K_n(p + x) - K_n(x) = (x + p)^n - x^n + \dots = pnx^{n-1} + \dots$$

(здесь опущены слагаемые, степень которых меньше  $n - 1$ ). Отсюда

$$K_n(p + x) - K_n(x) = pnx^{n-1}.$$

12°. Поскольку функции  $K_n(x)$  являются многочленами от  $p$ , то данное свойство достаточно доказать лишь для четных значений  $p$ . В этом случае достаточно применить свойство 9° с  $K_1 = 2$ ,  $K_2 = \frac{p}{2}$  и  $x = \frac{n}{2} - 1$ .

13°. Применим оператор  $\Delta_p/p$  по переменной  $h$  к правой части равенства (12) и воспользуемся свойством 11°:

$$\sum_{v=0}^n \frac{\Delta^v g(x)}{v!} \cdot \frac{\Delta_p K_v(h)}{p} = \sum_{v=1}^n \frac{\Delta^v g(x)}{v!} v h^{v-1} = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{\Delta^{v+1} g(x)}{v!} h^v$$

Согласно формуле (13), последняя сумма совпадает с  $\Delta g(x + h)$ . Поэтому функция  $f(x)$ , определенная равенством (11), действительно удовлетворяет уравнению (10).

14°. Рассмотрим разностное уравнение (10). По свойству 13° многочлен  $f(x)$  определенный равенством (11) является его решением. Кроме того, для него справедливо и равенство (12). Применим разностный оператор  $\Delta_p/p$  по переменной  $x$  к обеим частям равенства (12):

$$\frac{\Delta_p f(x+h)}{p} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{K_\nu(h)}{\nu!} \cdot \frac{\Delta^\nu \Delta_p g(x)}{p}.$$

После этого остается воспользоваться равенством (10).

## 4 Полиномы $Q_n(x)$ и их геометрические свойства

При оценке остаточного члена в формуле суммирования Эйлера существенно используются геометрические свойства полиномов Бернулли. Известно, что функция  $|B_{2n}(x)|$  на отрезке  $[0; 1]$  наибольшее значение принимает при  $x = 0$ . Поэтому многочлен  $B_{2n}(x) - B_{2n}$  на том же отрезке является знакопостоянной функцией.

С геометрической точки зрения многочлены  $K_{2n}(x)$  отличаются от многочленов Бернулли тем, что наибольшее по модулю значение на отрезке  $[0; p]$  они принимают в точке  $x = \frac{n}{2} - 1$ . Поэтому, для удобства, введем многочлены  $Q_n(x)$ , которые будут получаться из многочленов  $K_n(x)$  при помощи линейной замены переменной.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Для фиксированного действительного  $p$ , отличного от 0, зададим полиномы  $Q_n(x)$  и числа  $Q_n$  при помощи равенств

$$Q_n(x) = K_n\left(x + \frac{n}{2} - 1\right) \quad (n \geq 0); \quad (14)$$

$$Q_n = Q_n(0) \quad (n \geq 0). \quad (15)$$

Отсюда, в частности, имеем:

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = -\frac{p}{2}, \quad Q_2 = \frac{p^2 - 1}{6}, \quad Q_3 = \frac{3p}{8}, \quad Q_4 = -\frac{(p^2 - 1)(p^2 + 11)}{60},$$

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x - \frac{p}{2}, \quad Q_2(x) = x^2 - px + \frac{p^2 - 1}{6},$$

$$Q_3(x) = x^3 - \frac{3px^2}{2} + \left(\frac{p^2}{2} - \frac{3}{4}\right)x + \frac{3p}{8}.$$

Свойства чисел  $Q_n$  и полиномов  $Q_n(x)$  во многом схожи со свойствами чисел и полиномов Коробова. Отличие заключается в том, что убывающие факториальные степени заменяются на центральные, а разностный оператор  $\Delta$  — на центральный разностный оператор  $\delta$ .

При изучении свойств полиномов  $Q_n(x)$  возникает необходимость рассматривать обобщенный биномиальный ряд  $\mathcal{B}_t(z)$ , который определяется равенством

$$\mathcal{B}_t(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(t\nu)^{\nu-1}}{\nu!} z^\nu. \quad (16)$$

Известно, что этот ряд удовлетворяет следующим соотношениям (см. [2], 5.4)

$$\mathcal{B}_t(z) = \mathcal{B}_{1-t}(-z)^{-1}, \quad (17)$$

$$\mathcal{B}_t(z)^{1-t} - \mathcal{B}_t(z)^{-t} = z, \quad (18)$$

$$\mathcal{B}_t(z)^r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(t\nu + r)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{r}{t\nu + r} z^\nu, \quad (19)$$

$$\frac{\mathcal{B}_t(z)^r}{1 - t + t\mathcal{B}_t(z)^{-1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(t\nu + r)^\nu}{\nu!} z^\nu, \quad (20)$$

где  $r$  — произвольное действительное число. Обобщенный биномиальный ряд оказывается важен, потому что при  $t = 1/2$  функция  $\mathcal{B}_t(z)^x$  оказывается производящей функцией для последовательности центральных факториальных степеней числа  $x$ . Равенство (19) может быть переписано в виде

$$\mathcal{B}_{1/2}(z)^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{[\nu]}}{\nu!} z^\nu,$$

а из соотношения (20) следует, что

$$\frac{2\mathcal{B}_{1/2}(z)^{x+\frac{1}{2}}}{1 + \mathcal{B}_{1/2}(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{[\nu+1]-1}}{\nu!} z^\nu.$$

Перечислим свойства полиномов  $Q_n(x)$ . Определениям чисел и многочленов Коробова (5) и (6) соответствуют равенства

1°.

$$\sum_{\nu=0}^n C_n^\nu p^{[\nu]} Q_{n-\nu} = (-1)^n Q_n \quad (n \geq 0),$$

$$\sum_{\nu=0}^n C_n^\nu x^{[\nu]} Q_{n-\nu} = Q_n(x) \quad (n \geq 0).$$

Аналогами свойств 2°–14° полиномов  $K_n(x)$  будут следующие свойства полиномов  $Q_n(x)$ .

2°.  $\delta Q_n(x) = n Q_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$ .

3°.  $Q_n(p) - Q_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ -2Q_n, & \text{если } n \text{ нечетное;} \end{cases}$

$$\mu(Q_n(p) - Q_n(0)) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, n \geq 0, \\ p, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Здесь и далее  $\mu = \frac{1}{2} (E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}})$  — оператор среднего значения:

$$\mu f(x) = \frac{1}{2} \left[ f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) \right].$$

$$4^\circ. \sum_{z=0}^{x-1} Q_n(z) = \frac{1}{n+1} \left[ Q_{n+1}\left(x - \frac{1}{2}\right) - Q_{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) \right] \quad (n \geq 0),$$

$$\frac{1}{2} Q_n(0) + Q_n(1) + \dots + Q_n(p-1) + \frac{1}{2} Q_n(p) = 0 \quad (n \geq 1).$$

$$5^\circ. \sum_{v=0}^{n-1} C_n^v Q_v(x) p^{[n-v]} = p n x^{[n-1]} \quad (n \geq 1).$$

6°. Если номер многочлена четный и равен  $2n$ , то при целом  $x \in [1-n; p+n-1]$

$$Q_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{2^{2n}} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{mx}{p}}}{\sin^{2n} \pi \frac{m}{p}} = \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{2^{2n}} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{\cos 2\pi \frac{mx}{p}}{\sin^{2n} \pi \frac{m}{p}} \quad (n \geq 1).$$

Если же номер многочлена нечетный и равен  $2n+1$ , то для полуцелых  $x \in \left[ \frac{1}{2} - n; p + n - \frac{1}{2} \right]$ ;  $Q_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)!}{2^{2n+1} \cdot i} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{mx}{p}}}{\sin^{2n+1} \pi \frac{m}{p}} =$

$$= \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)!}{2^{2n+1}} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{\sin 2\pi \frac{mx}{p}}{\sin^{2n+1} \pi \frac{m}{p}} \quad (n \geq 0).$$

7°. При всех вещественных  $p \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{n!} z^n = \frac{2p}{1 + \mathcal{B}_{1/2}(z)} \cdot \frac{\mathcal{B}_{1/2}(z) - 1}{\mathcal{B}_{1/2}(z)^p - 1} = \frac{2pz}{\sqrt{z^2 + 4}} \cdot \frac{1}{\mathcal{B}_{1/2}(z)^p - 1}, \quad (21)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{n!} z^n = \frac{2p \mathcal{B}_{1/2}(z)^x}{1 + \mathcal{B}_{1/2}(z)} \cdot \frac{\mathcal{B}_{1/2}(z) - 1}{\mathcal{B}_{1/2}(z)^p - 1} = \frac{2pz}{\sqrt{z^2 + 4}} \cdot \frac{\mathcal{B}_{1/2}(z)^x}{\mathcal{B}_{1/2}(z)^p - 1}, \quad (22)$$

где  $\mathcal{B}_t(z)$  — обобщенный биномиальный ряд (16), который при  $t = 1/2$  совпадает с функцией

$$\left( \frac{z + \sqrt{z^2 + 4}}{2} \right)^2.$$

Причем при целых  $p$ ,  $|p| \geq 2$  радиус сходимости рядов (21) и (22) равен  $R = 2 \sin \frac{\pi}{|p|}$ .

$$8^\circ. Q_n(x+y) = \sum_{\nu=0}^n C_n^\nu x^{[\nu]} Q_{n-\nu}(y) \quad (n \geq 0).$$

$$9^\circ. \text{ При } p = p_1 p_2 \quad (p_1, p_2 \geq 2)$$

$$\sum_{\nu=0}^{p_1-1} Q_n(p, x + \nu p_2) = p_1 Q_n(p_2, x) \quad (n \geq 0).$$

$$10^\circ. Q_n(p-x) = (-1)^n Q_n(x), \quad \bar{Q}_n(p-x) = (-1)^n \bar{Q}_n(x) \quad (n \geq 0),$$

где  $\bar{Q}_n(x) = Q_n(p\{x/p\})$  — периодизированный полином  $Q_n(x)$ .

$$11^\circ. \frac{\Delta_p Q_n(x)}{p} = n x^{[n]-1} \quad (n \geq 1).$$

$$12^\circ. Q_n(p, 0) + Q_n\left(p, \frac{p}{2}\right) = 2Q_n\left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad (n \geq 0).$$

13°. Пусть  $g(x)$  — многочлен степени  $n$ . Тогда уравнение в конечных разностях

$$\frac{\Delta_p f(x)}{p} = \delta g(x)$$

с неизвестным многочленом  $f(x)$  имеет решением функцию

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{Q_\nu}{\nu!} \delta^\nu \mu g(x).$$

Причем при любых  $x$  и  $h$  выполняется равенство

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^n \frac{Q_\nu(h)}{\nu!} \delta^\nu \mu g(x).$$

14°. Для любого многочлена  $g(x)$  степени  $n$  справедлива формула

$$\delta g(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{Q_\nu(h)}{\nu!} \cdot \frac{\delta^\nu \mu \Delta_p g(x)}{p}.$$

Приведем доказательство свойства 7°. Все остальные свойства проверяются либо при помощи определений (14) и (15), либо при помощи свойства 7° и соотношений (17)–(20).

7°. Так как  $B_{1/2}(0) = 1$ , то достаточно доказать формулу для производящей функции последовательности  $\{Q_n(x)\}$ . Обозначим эту функцию через  $F_Q(x, z)$ :

$$F_Q(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{n!} z^n. \quad (23)$$

Согласно свойству 8° полиномов  $K_n(x)$

$$Q_n(x) = K_n\left(\frac{n}{2} - 1 + x\right) = \sum_{\nu=0}^n C_n^\nu \left(\frac{n}{2} - 1\right)^\nu K_{n-\nu}(x).$$

Подставим это соотношение в формулу (23) и преобразуем полученную двойную сумму:

$$\begin{aligned} F_Q(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\nu=0}^n C_n^\nu \left(\frac{n}{2} - 1\right)^\nu K_{n-\nu}(x) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{z^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \left(\frac{n}{2} - 1\right)^\nu K_{n-\nu}(x) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} \left(\frac{n+\nu}{2} - 1\right)^\nu z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} z^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{n+\nu}{2} - 1\right)^\nu \frac{z^\nu}{\nu!}. \end{aligned}$$

Упрощая последнюю сумму по формуле (20), приходим к равенству

$$F_Q(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} z^n \frac{2\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{n}{2}-1}}{1 + \mathcal{B}_{1/2}(z)^{-1}} = \frac{2}{1 + \mathcal{B}_{1/2}(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} \left(z \mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}\right)^n.$$

Последняя сумма представляет собой производящую функцию последовательности  $\{K_n(x)\}$  с аргументом  $z \mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}$ . Отсюда,

$$F_Q(x, z) = \frac{2}{1 + \mathcal{B}_{1/2}(z)} \cdot \frac{p z \mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}} \left(1 + z \mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}\right)^x}{\left(1 + z \mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}\right)^p - 1}.$$

Из формулы (18) следует, что

$$1 + z \mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{B}_{1/2}(z). \quad (24)$$

Поэтому можно записать более простое представление для функции  $F_Q(x, z)$ :

$$F_Q(x, z) = \frac{2p \mathcal{B}_{1/2}(z)^x}{1 + \mathcal{B}_{1/2}(z)} \cdot \frac{\mathcal{B}_{1/2}(z) - 1}{\mathcal{B}_{1/2}(z)^p - 1}. \quad (25)$$

Равенство (24) можно рассматривать как квадратное уравнение с неизвестной  $\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}$ . Решая его, получаем явный вид функции  $\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}$ :

$$\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}} = \frac{z + \sqrt{z^2 + 4}}{2}. \quad (26)$$

(Перед корнем необходимо выбрать знак +, поскольку  $\mathcal{B}_{1/2}(0)^{\frac{1}{2}} = 1$ .) Подставляя формулу (26) в (25), приходим к нужному равенству для функции  $F_Q(x, z)$ .

Нетрудно проверить, что при целых  $p$  ( $|p| \geq 2$ ) особыми точками функции  $F_Q(x, z)$  будут числа  $z_\nu = 2i \sin \frac{\nu\pi}{p}$  ( $1 \leq \nu < |p|$ ). Поэтому радиус сходимости ряда для функции  $F_Q(x, z)$  будет равен  $2 \sin \frac{\pi}{|p|}$ , то есть будет тем же, что и для функции  $F_K(x, z)$ .

С геометрической точки зрения многочлены  $Q_n(x)$  оказываются более близкими к многочленам Бернулли. Как уже отмечалось ранее, геометрическим свойством многочленов Бернулли четного порядка является знакопостоянство функции  $B_{2n}(x) - B_{2n}$  на отрезке  $[0; 1]$ . Аналогичное свойство справедливо и для многочленов  $Q_n(x)$  с четными номерами. Функция  $Q_{2n}(x)$  раскладывается в конечный ряд Фурье по косинусам с положительными коэффициентами. Поэтому среди целых точек отрезка  $[0; p]$  эта функция принимает наибольшее по модулю значение в нуле:

$$Q_{2n}(0) = Q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{\sin^{2n} \frac{\pi m}{p}} \quad (n \geq 1). \quad (27)$$

Отсюда следует, что функции вида  $Q_{2n}(x) - Q_{2n}$  сохраняют знак в целых точках отрезка  $[0; p]$ . Кроме этого, многочлены  $Q_{2n}(x) - Q_{2n}$  и  $Q_{2n+2}(x) - Q_{2n+2}$  имеют разные знаки на отрезке  $[0; p]$ .

Одним из геометрических свойств многочленов Бернулли нечетного порядка является то, что они обращаются в ноль в точках  $0, 1/2$  и  $1$ :

$$B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1/2) = B_{2n+1}(1) = 0 \quad (n \geq 0). \quad (28)$$

Для многочленов  $Q_n(x)$  это свойство немного изменяется из-за того, что многочлен  $Q_{2n+1}(x)$  принимает в точке  $0$  ненулевое значение. Из свойств  $10^\circ$  и  $11^\circ$  многочленов  $Q_n(x)$  следует, что

$$Q_{2n+1}(0) = p \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{4n+1}} C_{2n}^n \quad (n \geq 0).$$

Поэтому аналогом свойства (28) будет равенство

$$\mu Q_{2n+1}(0) = Q_{2n+1}(p/2) = \mu Q_{2n+1}(p) = 0 \quad (n \geq 0),$$

которое следует из свойств  $3^\circ$  и  $10^\circ$  многочленов  $Q_n(x)$ .

## 5 Формулы суммирования и интерполяции

В работе [6] были доказаны дискретные аналоги формул (1) и (2).

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $n, h, x$  — целые числа,  $p \geq 2$ ,  $n \geq 1$  и  $h \leq \frac{x}{p} < h + 1$ .

Тогда справедливо равенство

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p} \sum_{y=0}^{p-1} f\left(h + \frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p} \sum_{v=1}^n \frac{\bar{K}_v(x)}{v!} \Delta^{v-1} f\left(h + \frac{y}{p}\right) \Big|_{y=0}^p - R_n[f],$$

где остаток  $R_n[f]$  может быть записан двумя способами:

$$R_n[f] = \frac{1}{p} \sum_{y=0}^{p-1} \frac{\bar{K}_n(p+x-y-1)}{n!} \Delta^n f\left(h + \frac{y}{p}\right), \quad (29)$$

$$R_n[f] = \frac{(-1)^n}{p} \sum_{y=0}^{p-1} \frac{\bar{K}_n(y-x-n-1)}{n!} \Delta^n f\left(h + \frac{y}{p}\right).$$

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $p \geq 2$ ,  $b > a$  и  $n \geq 1$  — целые числа. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{h=a}^{b-1} f(h) = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp-1} f\left(\frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p} \sum_{v=1}^n \frac{K_v}{v!} \Delta^{v-1} f\left(\frac{y}{p}\right) \Big|_{ap}^{bp} - R_n[f], \quad (30)$$

где остаток  $R_n[f]$  может быть записан двумя способами:

$$R_n[f] = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp-1} \frac{\bar{K}_n(p-y-1)}{n!} \Delta^n f\left(\frac{y}{p}\right), \quad (31)$$

$$R_n[f] = \frac{(-1)^n}{p} \sum_{y=ap}^{bp-1} \frac{\bar{K}_n(y+n-1)}{n!} \Delta^n f\left(\frac{y}{p}\right).$$

Полностью аналогично (при помощи преобразования Абеля) доказываются соответствующие формулы и для полиномов  $Q_n(x)$ . Через  $\Sigma^*$  будем обозначать сумму, в которой крайние слагаемые берутся с коэффициентом  $\frac{1}{2}$ :

$$\sum_{v=a}^b {}^* f(x) = \frac{1}{2} f(a) + f(a+1) + \dots + f(b-1) + \frac{1}{2} f(b).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть  $n, h, x$  — целые числа,  $p \geq 2$ ,  $n \geq 1$  и  $h \leq \frac{x}{p} < h + 1$ .

Тогда справедливо равенство

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p} \sum_{y=0}^p * f\left(h + \frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^n \left[ \frac{\mu \bar{Q}_{2\nu-1}(x)}{(2\nu-1)!} \delta^{2\nu-2} f\left(h + \frac{y}{p}\right) + \frac{\bar{Q}_{2\nu}(x)}{(2\nu)!} \delta^{2\nu-1} \mu f\left(h + \frac{y}{p}\right) \right]_{y=0}^p - R_{2n}[f],$$

где

$$R_{2n}[f] = \frac{1}{p} \sum_{y=0}^p * \frac{\bar{Q}_{2n}(y-x)}{(2n)!} \delta^{2n} f\left(h + \frac{y}{p}\right).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть  $p \geq 2$ ,  $b > a$  и  $n \geq 1$  — целые числа. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{h=a}^b * f(h) = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp} * f\left(\frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^n \frac{Q_{2\nu}}{(2\nu)!} \delta^{2\nu-1} \mu f\left(\frac{y}{p}\right) \Big|_{ap}^{bp} - R_{2n}[f], \quad (32)$$

где

$$R_{2n}[f] = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp} * \frac{\bar{Q}_{2n}(y)}{(2n)!} \delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right) = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp} * \frac{\bar{Q}_{2n}(p-y)}{(2n)!} \delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right). \quad (33)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно, что формула Эйлера допускает нестрогий символический вывод, основанный на формальной связи между операторами сдвига, дифференцирования и оператором конечной разности (см. [1], [2], [5]). Ее дискретный аналог (30) также может быть получен при помощи формальных рассуждений (см. [6]). Аналогично формулу (32) без остаточного члена

$$\sum_{h=a}^b * f(h) = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp} * f\left(\frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Q_{2\nu}}{(2\nu)!} \delta^{2\nu-1} \mu f\left(\frac{y}{p}\right) \Big|_{ap}^{bp}$$

можно вывести из символических равенств  $\mathcal{B}_{1/2}(\delta)^{\frac{1}{2}} = E$  и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{2n}}{(2n)!} \delta^{2n} = \frac{p\delta}{2\mu} \cdot \frac{E^p + 1}{E^p - 1}.$$

## 6 Оценки остаточных членов в формулах суммирования

Существуют различные оценки остатка  $R_n[f]$  из формулы суммирования Эйлера (1) (см. [1]). Так как при  $n > 1$   $B_{2n-1} = 0$ , то остатки  $R_{2n-1}[f]$  и  $R_{2n-2}[f]$

совпадают. Для них всегда справедлива оценка

$$|\mathcal{R}_{2n-1}[f]| = |\mathcal{R}_{2n-2}[f]| \leq \frac{(b-a)|B_{2n}|}{(2n)!} \max_{\xi \in [a;b]} |f^{(2n)}(\xi)|. \quad (34)$$

Если же известно, что функции  $f^{(2n)}(x)$  и  $f^{(2n+2)}(x)$  на отрезке  $[a; b]$  знакопостоянны и имеют одинаковый знак, то остатки  $\mathcal{R}_{2n-1}[f]$  и  $\mathcal{R}_{2n-2}[f]$  допускают представление

$$\mathcal{R}_{2n-1}[f] = \mathcal{R}_{2n-2}[f] = \frac{\theta B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(x) \Big|_a^b \quad (-1 \leq \theta \leq 0). \quad (35)$$

Получим оценки для остаточного члена формулы (30). Они будут несколько отличаться от оценок (34) и (35), поскольку многочлены  $K_n(x)$  не повторяют в полной мере геометрические свойства полиномов Бернулли.

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть  $p \geq 2$ ,  $b > a$  и  $n \geq 1$  — целые числа. Тогда остаток (31) допускает оценку

$$|\mathcal{R}_{2n-1}[f]| \leq 2(b-a) \frac{|Q_{2n}|}{(2n)!} \max_{y \in [ap; bp-1]} \left| \Delta^{2n} f \left( \frac{y}{p} \right) \right|.$$

Если известно, что функция  $\Delta f^{2n} \left( \frac{y}{p} \right)$  не меняет знак на отрезке  $[ap; bp-1]$ , то справедливо неравенство

$$\mathcal{R}_{2n-1}[f] = \frac{2\theta Q_{2n}}{p(2n)!} \Delta^{2n-1} f \left( \frac{y}{p} \right) \Big|_{ap}^{bp} \quad (|\theta| < 1).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Запишем остаток  $\mathcal{R}_{2n-1}[f]$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2n-1}[f] &= -\frac{1}{p} \frac{K_{2n}}{(2n)!} \Delta^{2n-1} f \left( \frac{y}{p} \right) \Big|_{ap}^{bp} + \mathcal{R}_{2n}[f] = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp-1} \Delta^{2n} f \left( \frac{y}{p} \right) \frac{\bar{K}_{2n}(p-y-1) - K_{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Первая оценка теоремы получается, если вынести за знак суммы наибольшее значение  $\Delta^{2n} f \left( \frac{y}{p} \right)$  и воспользоваться неравенством  $|\bar{K}_{2n}(p-y-1) - K_{2n}| \leq 2|Q_{2n}|$ .

Если же известно, что величина  $\Delta^{2n} f \left( \frac{y}{p} \right)$  сохраняет знак при  $y \in [ap; bp-1]$ , то остаток может быть записан в виде

$$\mathcal{R}_{2n-1}[f] = \frac{2\theta Q_{2n}}{p(2n)!} \sum_{y=ap}^{bp-1} \Delta^{2n} f \left( \frac{y}{p} \right) = \frac{2\theta Q_{2n}}{p(2n)!} \Delta^{2n-1} f \left( \frac{y}{p} \right) \Big|_{ap}^{bp} \quad (|\theta| \leq 1).$$

Свойства многочленов  $Q_n(x)$  с геометрической точки зрения повторяют свойства многочленов Бернулли. Поэтому для многочленов  $Q_n(x)$  можно доказать два результата полностью аналогичные оценкам (34) и (35).

ТЕОРЕМА 6. Пусть  $p \geq 2$ ,  $b > a$  и  $n \geq 1$  — целые числа. Тогда остаток (33) допускает оценку

$$|R_{2n-2}[f]| \leq 2(b-a) \frac{|Q_{2n}|}{(2n)!} \max_{y \in [ap; bp]} \left| \delta^{2n} f \left( \frac{y}{p} \right) \right|.$$

Если же известно, что функции  $\delta^{2n} f \left( \frac{x}{p} \right)$  и  $\delta^{2n+2} f \left( \frac{x}{p} \right)$  в целых точках отрезка  $[ap; bp]$  знакопостоянны и имеют одинаковый знак, то остаток  $R_{2n-2}[f]$  допускает представление

$$R_{2n-2}[f] = \frac{\theta Q_{2n}}{p(2n)!} \delta^{2n-1} \mu f \left( \frac{x}{p} \right) \Big|_{ap}^{bp} \quad (-1 \leq \theta \leq 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая оценка теоремы является непосредственным следствием формулы (33). Для доказательства второй оценки запишем остаток  $R_{2n-2}[f]$  в виде

$$\begin{aligned} R_{2n-2}[f] &= R_{2n}[f] - \frac{1}{p} \frac{Q_{2n}}{(2n)!} \delta^{2n-1} \mu f \left( \frac{y}{p} \right) \Big|_{ap}^{bp} = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp} \delta^{2n} f \left( \frac{y}{p} \right) \frac{\bar{Q}_{2n}(y) - Q_{2n}}{(2n)!}. \end{aligned} \quad (36)$$

Аналогично

$$R_{2n}[f] = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp} \delta^{2n+2} f \left( \frac{y}{p} \right) \frac{\bar{Q}_{2n+2}(y) - Q_{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

По условию дано, что функции  $\delta^{2n} f \left( \frac{y}{p} \right)$  и  $\delta^{2n+2} f \left( \frac{y}{p} \right)$  в целых точках отрезка  $[ap; bp]$  знакопостоянны и имеют одинаковый знак. Кроме того, функции  $\bar{Q}_{2n}(y) - Q_{2n}$  и  $\bar{Q}_{2n+2}(y) - Q_{2n+2}$  также знакопостоянны, но имеют противоположные знаки. Значит остатки  $R_{2n-2}[f]$  и  $R_{2n}[f]$  имеют противоположные знаки. Теперь утверждение теоремы следует из равенства (36).

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценки остатков, полученные в теоремах 5 и 6 при росте  $p$  асимптотически совпадают с оценками (34) и (35). Действительно, величина  $\Delta^\nu f(y/p)$  приближенно равна  $p^{-\nu} f^{(\nu)}(y/p)$ . А рост чисел  $Q_{2n}$  можно оценить при помощи формулы (27). Из разложения функции  $x^{2n}/\sin^{2n} x$  в ряд Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует, что при  $x \in (0; 1/2)$

$$\frac{1}{\sin^{2n} x} = \frac{1}{x^{2n}} + \frac{3\theta_x n^2}{x^{2n-2}} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2n-2} \quad (0 < \theta_x < 1).$$

Подставляя это равенство в формулу (27), получаем верхнюю оценку на  $Q_{2n}$ :

$$|Q_{2n}| \leq p^{2n} \left( |B_{2n}| + \frac{(2n)!}{p^2} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Выше были изучены многочлены  $K_n(x)$  и  $Q_n(x)$ . Можно было бы также рассмотреть числа  $W_n$  и многочлены  $W_n(x)$ , которые получаются если в определении 1 заменить убывающие факториальные степени на возрастающие:

$$W_0 = 1, \quad \sum_{v=0}^n C_n^v W_v p^{\overline{n-v}} = W_n \quad (n \geq 2);$$

$$W_n(x) = \sum_{v=0}^n C_n^v W_v x^{\overline{n-v}} \quad (n \geq 0).$$

Многочлены  $W_n(x)$  связаны с  $K_n(x)$  равенством  $W_n(p, x) = (-1)^n K_n(-p, -x)$ . При этом для многочленов  $W_n(x)$  справедливы свойства аналогичные свойствам  $1^\circ-14^\circ$  полиномов Коробова. Основные отличия будут в том, что разностный оператор  $\Delta$  заменится на оператор  $\nabla$ , а убывающие факториальные степени — на возрастающие. Для многочленов  $W_n(x)$  можно также доказать утверждения, аналогичные теоремам 1, 2 и 5.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
- [2] Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.
- [3] Коробов Н. М. Специальные полиномы и их приложения. Диофантовы приближения // Мат. записки. 1996. Т. 2. С. 77-89.
- [4] Коробов Н. М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
- [5] Стефенсен И. Ф. Теория интерполяции. М.– Л.: ОНТИ, 1935.
- [6] Устинов А. В. Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера // Мат. заметки (В печати).

Поступило 11.10.2001 г.