Л. А. Аксентьев, И. А. Зорин, Классы многолистных аналитических функций, решающих задачу Гильберта,
Тр. сем. по краев. задачам, 1992, выпуск 27, 22–37

Л.А.Аксентьев, И.А.Зорин

КЛАССЫ МНОГОЛИСТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РЕШАЮЩИХ ЗАДАЧУ ГИЛЬБЕРТА

Анализ геометрических свойств решений краевых задач развит в статье [I] одного из авторов данной работы и продолжен в статье [2]. Мы дополняем статьи [I] и [2], опираясь, главным образом, на геометрический смысл решения задачи Гильберта в наиболее простых вариантах. В частности, доказаны теоремы 5 и 6, сформулированные в [2].

I. Решением задачи Гильберта является аналитическая функция, отображающая единичный круг, вообще говоря, неоднолистно на некоторую область, свойства которой полностью определяются поведением коэффициентов, входящих в краевое условие. Поэтому между решениями задачи Гильберта и классами многолистных функций, обладающих определенными геометрическими свойствами, можно установить соответствие.

Рассмотрим вначале в круге $E=\{z:|z|<1\}$ задачу Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\operatorname{Im}[e^{-i\gamma_k} f(e^{i\theta})] = c_k\,,\ \theta\in(\varphi_k,\varphi_{k+1})\,,\ k=\overline{1,n}\,, \tag{I}$$

$\varphi_{n+1}=\varphi_1+2\pi$; γ_k, c_k – постоянные величины. Обозначим через $h(a_1,\dots,a_s)$ класс решений этой задачи, ограниченных в точках $a_k=e^{i\varphi_k}$, $k=\overline{1,s}\le n$, и не ограниченных в остальных $n-s$ точках стыка.

Для доказательства теорем из статьи [2], показывающих зависимость листности решения задачи (I) от индекса, сформулируем и обоснуем предварительное утверждение.

<u>Лемма I.</u> Решением задачи (I) в классе $h(a_1,\dots,a_s)$ является

$$f(z)=C_1\int_0^z \prod_{k=1}^{q}(z-b_k)(1-\bar b_k z)\prod_{k=1}^{m}(z-e^{i\alpha_k})\prod_{k=1}^{n}(z-e^{i\varphi_k})^{\delta_k-1}dz+C_2\,, \tag{2}$$

причем индекс задачи и параметры, входящие в выражение (2), связаны соотношением

$$\varkappa = 2-n+2q+m\,; \tag{3}$$

C_1, C_2, b_k – комплексные параметры; $|b_k|<1$, $k=\overline{1,q}$; $0<\delta_k\le 1$, $k=\overline{1,s}$; $-1<\delta_k\le 0$, $k=\overline{q,n}$, и δ_k зависит от γ_{k-1}, γ_k; $\gamma_0=\gamma_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решением задачи (I) является функция, отображающая круг E на область, ограниченную прямыми с уравнениями $Im(e^{-i\gamma_k}w)=c_k$, $k=\overline{1,n}$, или их частями. Поэтому функцию, решающую задачу Гильберта (I), можно записать при помощи обобщенного интеграла Кристоффеля – Шварца, отображающего E на многолистный многоугольник. Точки $a_k=e^{i\varphi_k}$, $k=\overline{1,n}$, должны отображаться в угловые точки. Обозначим через b_k, $k=\overline{1,q}$, нули производной $f'(z)$, т.е. прообразы точек ветвления, внутри круга E и через $e^{i\alpha_k}$ – нули производной $f'(z)$ на ∂E.

Показатели степеней у множителей $(z-a_k)^{\delta_k-1}$ определяются таким образом: $0<\delta_k\le 1$, если ищется решение, ограниченное в окрестности точки a_k, и $-1<\delta_k\le 0$, если ищется решение, которое неограничено в окрестности a_k. Из условия (I) после дифференцирования по θ и из сравнения его с видом функции $f'(z)$ из (2) получим

$$\delta_k=(\gamma_{k-1}-\gamma_k)/\pi-\text{æ}_k\,, \tag{4}$$

где æ_k – целое число, положительное или отрицательное, или 0. Тем самым для $f(z)$ получено представление (2).

Это представление не всегда будет отображать круг на область с прямолинейными границами. Действительно, для обеспечения прямолинейности границ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{d}{d\theta}\arg(e^{i\theta}f'(e^{i\theta}))=0$ для всех θ, лежащих на интервалах, которые не содержат точек φ_k и α_k. Так как

$$(e^{i\theta}-b_k)(1-\bar{b}_k e^{i\theta})=e^{i\theta}\left|1-b_k e^{-i\theta}\right|^2,\quad e^{i\theta}-e^{i\varphi_k}=2i\sin\frac{\theta-\varphi_k}{2}\,e^{i\frac{\theta+\varphi_k}{2}},$$

то

$$\arg(e^{i\theta}f'(e^{i\theta}))=(q+1)\theta+m\theta/2+\sum_{k=1}^{n}(\delta_k-1)\theta/2+A(\theta),$$

причем функция $A(\theta)$ является кусочно-постоянной, т.е. в точках дифференцируемости $A'(\theta)=0$. Поэтому

$$\frac{d}{d\theta}\arg[e^{i\theta}f'(e^{i\theta})]=0\Leftrightarrow q+1+m/2+\Big(\sum_{k=1}^{n}\delta_k-n\Big)/2=0\,.$$

Так как $\sum_{\kappa=1}^{n} \varkappa_\kappa = \varkappa$ – индекс задачи и $\sum_{\kappa=1}^{n}(\gamma_{\kappa-1} - \gamma_\kappa) = 0$, то с учетом (4) получим (3). Лемма доказана.

С использованием леммы докажем несколько более общее утверждение, чем сформулированная в [2]теорема 5. Предварительно напомним определения некоторых классов многолистных функций, которые ввел Стайер [3].

<u>Определение I</u>. Функция $f(z)$ принадлежит классу $S_w(p)$ – слабо звездных функций порядка p , если $f(z)$ регулярна в E, и существует регулярная функция $h(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, однолистная, звездная и такая, что

$$f(z) = h^p(z) \prod_{\kappa=1}^{p} \varphi(z, z_\kappa) ,$$

где $\varphi(z, z_\kappa) = (z - z_\kappa)(1 - \bar{z}_\kappa z)/z$, $|z_\kappa| \le 1$, $\kappa = \overline{1, p}$.

<u>Определение 2.</u> Регулярная в E функция $F(z)$, $F(0) = 0$, принадлежит классу $K_w(p)$ слабо почти выпуклых функций порядка p, если существует функция $f(z) \in S_w(p)$, $f(0) = 0$, такая, что $Re\,(z F'(z)/f(z)) > 0$, $z \in E$.

<u>Теорема I</u>. Решение $f(z)$ задачи Гильберта (I) принадлежит классу $K_w(p)$, где $p = [(\varkappa + n)/2]$, $[\alpha]$ – целая часть числа α . Если $\varkappa + n = 2$, то $f(z) \in S^o(1)$ – классу однолистных выпуклых функций; при $\varkappa + n = 3$ решение $f(z)$ принадлежит классу $K(1)$ однолистных почти выпуклых функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы I решением задачи (I) является функция (2) с условием (3) на параметры функции и индекс задачи. При отрицательном индексе решение должно удовлетворять $-\varkappa - 1$ условиям разрешимости, при положительном – существует $\varkappa + 1$ линейно независимых решений.

Решением задачи является функция, отображающая круг E на прямолинейный n -угольник, возможно, с m разрезами и q точками ветвления. Некоторые из вершин могут лежать на ∞ . Для существования такой функции достаточно выполнения $-\varkappa - 1 = n - 3 - m - 2q$ условий разрешимости. С другой стороны, теорема Римана дает $n - 3$ условий разрешимости. Разница в числе условий объясняется тем, что заранее не фиксируются значения точек ветвления и концов разрезов. За счет подбора $m + 2q$ действительных параметров часть условий естественным образом снимается.

Из формулы (3) следует, что $\varkappa+n \geq 2$. В связи с этим изучим последовательно 4 случая: $\varkappa+n=2$, $\varkappa+n=3$, $\varkappa+n$ - четное и ≥ 4 , $\varkappa+n$ - нечетное и $\geq$ 5.

Случай I. Пусть $\varkappa+n=2$. Тогда в силу (3) получим $q=m=0$. Решение задачи будет иметь вид

$$f(z)=C_1\int_0^z \prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\delta_k-1}dz+C_2 .$$

Функция $g(z)=zf'(z)=C_1 z\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\delta_k-1}$ удовлетворяет условию

$$\arg g(e^{i\theta})=\theta+\sum_{k=1}^{n}(\delta_k-1)\theta/2+A(\theta)=A(\theta)$$

(так как $\sum_{k=1}^{n}\delta_k-n+2=-\varkappa-n+2=0$), где $A(\theta)$ постоянна при $\theta\in(\varphi_k,\varphi_{k+1})$, $k=\overline{1,n}$. Поэтому $g(E)$ является плоскостью с n радиальными разрезами. В силу известной связи

$$g(z)=zf'(z)\in S(1)\Leftrightarrow f(z)\in S^{\circ}(1)$$

получим выпуклость и однолистность функции $f(z)$.

Случай 2. Пусть $\varkappa+n=3$. Формула (3) дает m = I, q = 0 и функция (2) принимает вид

$$f(z)=C_1\int_0^z (z-e^{i\alpha})\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\delta_k-1}dz+C_2$$

и соответственно $zf'(z)=C_1 z(z-e^{i\alpha})\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\delta_k-1}$.

Рассмотрим два возможных варианта. В первом варианте все значения $\delta_k\in(0,1)$, $k=\overline{1,n}$. Предположим, что $a_k\neq e^{i\alpha}$ $k=\overline{1,n}$. Так как $\sum_{k=1}^{n}\delta_k=n-3$, то существует такой набор $\{\sigma_k\}_{k=1}^{n}$, что $\delta_k<\sigma_k\leq 1$ и $\sum_{k=1}^{n}\sigma_k=n-2$. Так же, как и $g(z)$ в случае I, функция $g_1(z)=z\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\sigma_k-1}\in S(1)$ звездная. Функция

$$g_2(z)=(z-e^{i\alpha})\Big/\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\sigma_k-\delta_k}$$

отображает E на полуплоскость с n разрезами, так как

$0 < \sigma_k - \delta_k < 1$, $k = \overline{1,n}$ и $\sum_{k=1}^{n} (\sigma_k - \delta_k) = 1$. В частности, можно положить $\sigma_k - 1 = 2(\delta_k - 1)/3$ и $\delta_k - \sigma_k = (\delta_k - 1)/3$.

Если для некоторого $k = k_0$ $a_{k_0} = e^{i\alpha}$, то полагая $\sigma_{k_0} = 1$, видим, что функция

$$g_2(z) = (z - a_{k_0})^{\delta_{k_0}} \Big/ \prod_{k=1,\, k \neq k_0}^{n} (z - a_k)^{\sigma_k - \delta_k}$$

отображает E на угол раствора $\delta_{k_0}\pi < \pi$ с радиальными разрезами. Поэтому существует такое $\gamma \in (-\pi, \pi]$, что $Re(e^{-i\gamma} g_2(z)) > 0$, $z \in E$. Следовательно,

$Re(e^{-i\gamma} z f'(z)/C_1 g_1(z)) > 0$, т.е. $f(z) \in K(1)$. (5)

Образом единичного круга $\mathcal{D} = f(E)$ является при $a_k \neq e^{i\alpha}$ многоугольник с внутренними углами, меньшими π , и единственным прямолинейным разрезом. При $a_{k_0} = e^{i\alpha}$ имеем многоугольник, все внутренние углы которого, за исключением одного, меньше π . Величина угла при вершине $A_{k_0} = f(a_{k_0})$ равна $(\delta_{k_0} + 1)\pi > \pi$.

Во втором варианте существует хотя бы одно δ_{k_1} из промежутка (-I, 0]. Полагаем $g_1(z) = C_1 z \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\delta_k - 1} \cdot (z - a_{k_1})$ и $g_2(z) = (z - e^{i\alpha})/(z - a_{k_1})$. В силу того, что $g_1(z) \in S(1)$, получаем при некотором γ повторение (5).

С л у ч а й 3. Считаем $\varkappa + n$ четным и $\geqslant$ 4. Из (3) будет следовать, что m - четное число или 0.

Выберем из множества значений $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$ попарно совпадающие: $2\{\alpha_{k1}\}_{k=1}^{m_1}$, оставшееся подмножество разобьем на две части $\{\alpha_{k2}\}_{k=1}^{m_2}$, $\{\alpha_{k3}\}_{k=1}^{m_2}$ так, чтобы выполнялось условие $\alpha_{k3} < \alpha_{k2} < \alpha_{(k+1)3}$, $k = \overline{1, m_2}$, $\alpha_{(m_2+1)3} = \alpha_{13} + 2\pi$. В трех подмножествах окажется $2m_1 + m_2 + m_2 = m$ - четное число элементов. Отсюда $m_1 + m_2 = m/2$.

Функция $g_2(z) = C_1 \prod_{k=1}^{m_2} (z - e^{i\alpha_{k3}}) / (z - e^{i\alpha_{k2}})$

отображает круг E на m_2 -листную полуплоскость, поэтому существует такое $\gamma \in (-\pi, \pi]$, что $Re(e^{i\gamma} g_2(z)) > 0$. Учитывая, что $\varphi(z, 0) = 1$, функцию $g_1(z) = z f'(z)/g_2(z)$ представим в виде

$$g_1(z)=z^p\prod_{k=1}^{q}\frac{(z-b_k)(1-\bar b_k z)}{z}\prod_{k=1}^{m_1}\frac{(z-e^{i\alpha_{k1}})^2}{z}\prod_{k=1}^{m_2}\frac{(z-e^{i\alpha_{k2}})^2}{z}\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\delta_k-1}=$$

$$=h^p(z)\prod_{k=1}^{q+m/2+1}\varphi(z,z_k)\ ,$$

причем $h(z)=z\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{(\delta_k-1)/p}$, $p=q+m/2+1=(\varkappa+n)/2$;

$\varphi(z,z_k)$ взяты из определения I и множество $\{z_k\}_{k=1}^{p}, |z_k|\le 1$, состоит из $z_p=0$, $\{b_k\}_{k=1}^{q}$ и $\{e^{i\alpha_{kj}}\}_{k=1}^{m_j}$, j = I, 2. Как и в случае I, можно проверить, что $h(z)\in S(1)$. Следовательно,

$$g_1(z)\in S_w(p)\Rightarrow f(z)\in K_w(p)\ ,\ p=(\varkappa+n)/2\ .$$

С л у ч а й 4. $\varkappa+n=2p+1$ – нечетное число и $\geqslant$ 5. Из (3) следует, что m – нечетное число. Как в случае 2, выделим 2 варианта.

I) $\delta_k\in$ (0,I) для любого k . Аналогично случаю 3 соста – вим пары ($e^{i\alpha_{k3}}$, $e^{i\alpha_{k2}}$), $k=\overline{1,m_2}$, однократных нулей производной $f'(z)$. В силу нечетности m останется еще один нуль производной, за которым сохраним прежнее обозначение $e^{i\alpha_m}$. Предпо – лагаем, что $\alpha_{13}<\alpha_{12}<\ldots<\alpha_{m_2 3}<\alpha_{m_2 2}<\alpha_m<\alpha_{13}+2\pi$. Докажем следую – щий результат.

Без ограничения общности можно считать, что между $e^{i\alpha_m}$ и $e^{i\alpha_{13}}$ (т.е. на дуге с $\alpha_m\le\theta<\alpha_{13}+2\pi$) раполоржены точки a_1 , ..., a_r ($1<r\le n$) из совокупности $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, которые харак – теризуются соотношением

$$\sum_{k=1}^{r}\delta_k\le r-1\ , \tag{6}$$

где δ_k соответствует $a_k=e^{i\varphi_k}$ в представлении (2).

Действительно, если $m_2=0$, т.е. однократный нуль у $f'(z)$ является единственным, то берем весь набор $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, причем для него неравенство (6) выполняется: $\sum_{k=1}^{n}\delta_k=n-2p-1<n-1$.

При условии, что однократных нулей будет $2m_2+1>1$, рассмотрим $2m_2+1$ дуг l_j, следующих друг за другом, с концами в этих нулях. Начальную точку l_j причислим к ней, конечную точку l_j отнесем к l_{j+1}. Это значит, что $\bigcup_{j=1}^{2m_2+1} l_j = \partial E$ без перекрытий и без пропусков. Пусть на дуге l_j расположено n_j точек $\{a_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j} \subset \{a_k\}_{k=1}^{n}$ и на каждой дуге l_j выполняется неравенство, противоположное (6), т.е.

$$\sum_{k=1}^{n_j} \delta_k^{(j)} > n_j - 1 .$$

Просуммировав эти неравенства по j, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k > n - 1 - 2m_2 .$$

Но $2m_2+1 \leq m < 2p+1$, следовательно, $n - \sum_{k=1}^{n} \delta_k < 2p+1$. Этого не может быть, так как $\varkappa + n = 2p+1$ и $\varkappa = -\sum_{k=1}^{n} \delta_k$.

Значит, хотя бы для одной дуги l_j будет выполняться нужное неравенство вида (6). Выполнения самого неравенства (6) добьемся переобозначением наборов $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{e^{i\alpha_k}\}$.

Опираясь на доказанный результат, возьмем для представления $zf'(z) = g_1(z)\, g_2(z)$ функцию

$$g_2(z) = C_1 \prod_{k=1}^{m} \frac{z - e^{i\alpha_{k3}}}{z - e^{i\alpha_{k2}}} \cdot \frac{z - e^{i\alpha_m}}{\prod_{k=1}^{r} (z - a_k)^{\sigma_k - \delta_k}} .$$

Вторая дробь в этом произведении строится так же, как и в первом варианте случая 2.

Функция $g_2(z)$ отображает E на риманову поверхность, состоящую из m_2 полуплоскостей и одного сектора с углом при вершине $\leq \pi$ и радиальными разрезами. Поэтому существует такое $\sigma \in (-\pi, \pi]$, что $Re(e^{i\sigma} g_2(z)) > 0$, $z \in E$.

Функцию $g_1(z) = zf'(z) / g_2(z)$ представим в виде

$$g_1(z)=z^{\rho}\prod_{k=1}^{q}\frac{(z-b_k)(1-\bar{b}_k z)}{z}\prod_{k=1}^{m_1}\frac{(z-e^{i\alpha_{k1}})^2}{z}\prod_{k=1}^{m_2}\frac{(z-e^{i\alpha_{k2}})^2}{z}\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\delta_k-1}=$$

$$=h^{\rho}(z)\prod_{k=1}^{q+(m-1)/2+1}\varphi(z,z_k),$$

причем $h(z)=z\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{(\delta_k-1)/\rho}$, $\rho=q+(m-1)/2+1=[(\varkappa+n)/2]$.

Можно проверить, что $h(z)\in S(1)$, поэтому $g_1(z)=S_W([(\varkappa+n)/2])$ и, следовательно, $f(z)\in K_W([(\varkappa+n)/2])$.

2) Если существует хотя бы одно значение $\delta_{k_0}\in(-1,0]$, то полагая $g_2(z)=C_1\prod_{k=1}^{m_2+1}(z-e^{i\alpha_{k3}})/(z-e^{i\alpha_{k2}})$, где $exp(i\alpha_{(m_2+1)2})=a_{k_0}$, и проводя рассуждения, как и в преды-дущем случае, получим утверждение теоремы. Теорема полностью доказана.

Задача (I), когда γ_k поочередно равно 0 и $\pi/2$, а число участков является четным ($n=2m$), называется смешанной крае-вой задачей. Для такой задачи получим из теоремы I

Следствие. Решение смешанной краевой задачи, имеющей $2m$ точек стыка $\{a_k, b_k\}$, $k=\overline{1,m}$, с постоянными коэффициентами c_k, будет ρ-листной функцией, причем величина ρ не превышает следующих значений:

I) $[m/2]$ для решения, ограниченного во всех точках стыка,

2) m для решения, ограниченного в окрестности точек a_k и неограниченного в окрестности точек b_k, $k=\overline{1,m}$;

3) $[3m/2]$ для решения, неограниченного в окрестности всех точек $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{m}$.

Доказательство основано на том, что максимальный порядок листности по теореме I равен $[(\varkappa+2m)/2]$. Индекс $\varkappa$ задачи в трех отмеченных вариантах равен соответственно $-m$, 0, m. Поэтому для оценки порядка листности имеем числа $[m/2]$, m и $[3m/2]$.

Замечание. Можно найти и наименьшее число листов для реше-ния в вариантах I) – 3). Такими числами будут I и $[m/2]+\delta(m/4)$, где

$\delta(\beta)=\{0,\ \beta=q$ – целое число; $1,\ \beta\neq q\}$.
Достижение I в первом случае обосновывается примером задачи с однолистным решением. В двух оставшихся вариантах наименьшее число листов определяется из характера поведения решения в окрестности ∞. Действительно, во втором случае самое большее 2 из четырех последовательных вершин могут лежать на ∞ и при этом располагаться на одном листе. Всех листов окажется $m/2$ при четном m и $[m/2]+1$ – при нечетном m. Аналогично и в варианте 3.

2. В структурные формулы классов многолистных функций входят множители вида $z-a_k$, $|a_k|\leq 1$, характеризующие либо нули функции, либо нули ее производной. Поэтому, чтобы установить соответствие между решением задачи Гильберта и некоторым классом многолистных функций, необходимо знать возможное число нулей решения.

Рассмотрим краевую задачу Гильберта для единичного круга

$$Jm\left[e^{-i\omega(\theta)}f(e^{i\theta})\right]=c(\theta),\quad \theta\in[0,2\pi],\tag{7}$$

с разрывными кусочно-гёльдеровыми коэффициентами. Пусть функции, входящие в краевое условие (7), имеют разрывы первого рода: $\omega(\theta)$ в точках $\theta=\varphi_k$, $k=\overline{1,n}$; $c(\theta)$ в точках $\theta=\psi_k$, $k=\overline{1,m}$.

Обозначим через $\varkappa_H$ индекс задачи (7) в классе неограниченных (по возможности) в точках стыка функций [4], пусть $\varkappa_0=[\varkappa_H/2]$. Обозначим через $N(E)$ число нулей решения задачи (7), лежащих в E. Пусть $f(z)=\prod\limits_{k=1}^{n}(z-e^{i\varphi_k})^{\delta_k}P(z)F_0(z)$, где $\delta_k\in(-1;1)$, $k=\overline{1,n}$; $P(z)$ – некоторый многочлен; $F_0(z)\neq 0$ для любого $z\in\bar{E}$. Тогда через $N(\partial E)$ обозначим количество нулей многочлена $P(z)$, лежащих на ∂E.

Лемма 2. Если существует конечное число точек, в которых $c(\theta)$ обращается в 0, причем при переходе через $2n_c$ нулей или точек разрыва $c(\theta)$ меняет знак, то $N(E)\leq\varkappa_0+n_c$. Если $c(\theta)\neq 0$, когда θ пробегает интервал $[0,2\pi]$, то $N(E)=\varkappa_0+n_c$. Для однородной задачи выполняется равенство $2N(E)+N(\partial E)=\varkappa$.

Замечания. I. Если $\varkappa$ – индекс задачи в искомом классе функций – отрицательное число, то лемма будет верна при выполнении $-\varkappa-1$ условий разрешимости.

2. Если коэффициенты задачи удовлетворяют условию Гельдера, то значение $\varkappa_H$ в формулировке леммы надо заменить на $\varkappa$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Рассмотрим случай, когда решение не обращается в 0 на границе, т.е. $N(\partial E)=0$.

а) Решением задачи Шварца $\operatorname{Im}[f(e^{i\theta})]=c(\theta), \theta\in[0,2\pi]$, которая является частным случаем задачи (7) при $\omega(\theta)\equiv 0$, будет аналитическая функция, имеющая логарифмические особенности в точках разрыва $c(\theta)$,

$$f(z)=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\theta)\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta+c_0\equiv iS(c(\theta),z)+c_0,$$

где c_0 – произвольная действительная постоянная. Отсюда, применяя формулу для предельных значений интеграла Шварца, получим:

$$f(e^{i\varphi})=ic(\varphi)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\theta+c_0,\varphi\neq\varphi_k,\ k=\overline{1,m}\ . \quad (8)$$

Образ $f(E)$ под действием постоянной c_0 будет перемещаться параллельно вещественной оси, заметая некоторую полосу. Если бы у $f(z)$ при каком-то значении c_0 число нулей $N(E)$ было больше n_c, то по принципу аргумента число витков вокруг начала координат кривой с уравнением (8) превысило бы n_c. Следовательно, в этом случае число точек смены знака функции $c(\varphi)$ должно быть больше $2n_c$, то противоречит условию теоремы. Поэтому $N(E)\leq n_c$.

Если $c(\theta)\neq 0$, когда θ пробегает интервал $[0,2\pi]$, но при этом существует $2n_c$ точек, при переходе через которые $c(\theta)$ меняет знак, то это означает, что действительная ось покрывается областью $f(E)$ ровно n_c раз. В этом случае $N(E)=n_c$.

б) Решением неоднородной задачи, по возможности неограниченным в точках стыка, является функция

$$f(z)=z^{\varkappa_0}e^{i\gamma(z)}\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\delta_k}\varphi(z), \quad (9)$$

где $\delta_k=[\omega(\varphi_k-0)-\omega(\varphi_k+0)]/\pi-\varkappa_k$, $\delta_k\in(-1,0]$, $k=2,n$,

$\delta_1=[\omega(\varphi_1-0)-\omega(\varphi_1+0)]/\pi-\varkappa_1+\delta(\varkappa_H/2)$,

$$\delta(\beta)=\{0,\ \beta=q\text{ – целое};\ 1,\ \beta\neq q\},$$

$\delta_1\in(-1,0]$, если $\varkappa_H$ – четное, $\delta_1\in(0,1]$, если $\varkappa_H$ – нечетное;

$$\gamma(z) = S\left[\omega(\theta) - \rho\theta - \sum_{k=1}^{n} \delta_k \arg(e^{i\theta} - a_k), z\right],$$

$$\omega_1(\theta) = \operatorname{Im} \gamma(e^{i\theta}),$$

$$Q(z) = iS\left[e^{\omega_1(\theta)} c(\theta) \prod_{k=1}^{n} |e^{i\theta} - a_k|^{\delta_k}, z\right] +$$

$$+ a_0 + i b_0 \delta(\varkappa_H/2)(z + a_1)/(z - a_1) + \sum_{k=1}^{\varkappa_0} (c_k z^k + \bar{c}_k z^{-k}),$$

$$a_0, b_0 \in \mathbb{R}, \quad c_0 = a_0 + i b_0, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1, \varkappa_0}.$$

При изменении значений параметров c_k, $k = \overline{0, \varkappa_0}$, граничные точки области $\mathcal{D} = Q(E)$ будут перемещаться параллельно вещественной оси.

Пусть индекс $\varkappa_H$ – неотрицательное число, тогда число полюсов функции $Q(z)$, расположенных в 0, не превышает величины $\tau = \max\{k : c_k \neq 0\}$, а число $N(E)$ нулей не превышает n_c в силу рассуждений из предыдущего пункта. Следовательно, разность между N_Q нулей функции $Q(z)$ и числом P_Q ее полюсов будет удовлетворять неравенству $-\varkappa_0 \leq N_Q - P_Q \leq n_c$. Если $\varkappa_H$ – нечетное число, то функция $Q(z)$ имеет полюс первого порядка на границе в точке $z = a_1$, но за счет множителя $(z - a_1)^{\delta_1}$, $\delta_1 \in (0,1)$ получим, что $f(z)$ в точке $z = a_1$ имеет особенность порядка $1-\delta_1$.

Так как $\Delta_{\partial E(1-\varepsilon)} \arg(z - a_k)^{\delta_k} = 0$, где $\partial E(1-\varepsilon) = \{z : |z| = 1 - \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$, $k = \overline{1, n}$, то для нулей функции (9) имеем оценки $0 \leq N(E) \leq \varkappa_0 + n_c$.

Решение задачи, ограниченное в точках стыка, можно рассматривать как частный случай функции вида (9), когда некоторые точки множества $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ являются корнями уравнения $Q(z) = 0$ соответствующей кратности. При этом происходит уменьшение числа действительных параметров, от которых зависит решение, но оценка $0 \leq N(E) \leq \varkappa_0 + n_c$, очевидно, сохранится.

Если теперь индекс задачи $\varkappa_H$ – отрицательное число, то в представлении (9) $Q(z) = iS\left[e^{\omega_1(\theta)} c(\theta) \prod_{k=1}^{n} |e^{i\theta} - a_k|^{\delta_k}, z\right] + a_0 + i b_0 \delta\left(\frac{\varkappa_H}{2}\right) \frac{z + a_1}{z - a_1}$.

Все предыдущие рассуждения будут иметь место. Условие $\varkappa_0 + n_c \geq 0$ можно рассматривать как необходимое условие разрешимости.

2. Пусть решение обращается в 0 в некоторой точке границы, т.е. существует такое значение $z_0 = e^{i\theta_0}$, что $Q(z_0) = 0$. Так как пересечением граничной кривой, уравнение которой $w = Q(e^{i\theta})$, с действительной осью является конечное множество точек, то в плоскости w существует такая окрестность 0, что ни через одну точку этой окрестности (за исключением 0) не проходит граничная кривая. Поэтому для функций

$$f_M(z) = z^{\varkappa_0} e^{i\gamma(z)} \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\delta_k} (Q(z)+\varepsilon_M) ,$$

где $0 < \varepsilon_M < \varepsilon$, ε – радиус окрестности, которые являются решением задачи (6), выполняются утверждения теоремы. Значит, $N(E) \leq \varkappa_0 + n_c$ для $f_M(z)$ при любом M. Последовательность функций $f_M(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ внутри E при $\varepsilon_M \to 0$. Поэтому для $f(z)$ также будет выполняться неравенство $N(E) \leq \varkappa_0 + n_c$.

3. Пусть $c(\theta) \neq 0$. Используя принцип аргумента для функции $Q(z)$, получим $N_Q - P_Q = n_c$. Поэтому для функции $f(z)$: $N(E) = \varkappa_0 + n_c$. В частном случае, когда $c(\theta) > 0$ $(c(\theta) < 0)$, $N(E) = \varkappa_0$. Для задачи Шварца $N(E) = n_c$.

4. Представим решение однородной задачи $(c(\theta) \equiv 0)$ в виде $f(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\delta_k} f_0(z)$. Функция $f_0(z)$ является решением некоторой однородной задачи с гельдеровыми коэффициентами, причем индекс этой задачи равен индексу задачи (7) в искомом классе функций. Для функции $f_0(z)$, а следовательно, и для $f(z)$ выполняется равенство $2N(E) + N(\partial E) = \varkappa$ ([5], с.197). Лемма доказана.

<u>Замечание</u>. Равенство (3) в лемме I можно получить, используя лемму 2. Перейдя от краевого условия (I) к краевому условию для функции $g(z) = izf'(z)$,

$$\operatorname{Im}[e^{-i\gamma_k} g(e^{i\theta})] = 0 , \qquad (10)$$

где решение ищется в классе функций, имеющих особенности порядка не выше второго, заметим, что индексы задач (I) и (10) связаны соотношением $\varkappa_f = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_k = \sum_{k=1}^{n} (\varkappa_k + 1) - n = \varkappa_g - n$. В силу леммы 2 для однородной задачи (10) имеем равенство $\varkappa_g = 2(q+1) + m$, где q – число нулей $f'(z)$, лежащих в E, m – число нулей $f'(z)$, лежащих на ∂E. Отсюда сразу получаем равенство (3).

Используя доказанную лемму, сформулируем условия на коэффициенты задачи Гильберта, при выполнении которых устанавливается принадлежность решения задачи некоторому классу многолистных функций.

Обозначим через $\mathcal{M}$ класс функций $\omega(\theta)$, имеющих конечное число точек разрыва первого рода, неубывающих, гёльдеровых между точками разрыва. Справедлива следующая

Теорема 2. Решение однородной задачи Гильберта

$$\operatorname{Im}\left[e^{-i\omega(\theta)} f(e^{i\theta})\right] = 0 \;, \quad \theta \in [0, 2\pi] \;,$$

принадлежит классу $S_W(\varkappa)$ – слабо звездных функций порядка $\varkappa$, где $\varkappa$ – индекс задачи, если $\omega(\theta) \in \mathcal{M}$.

Решением задачи Гильберта

$$\operatorname{Im}\left[e^{-i\omega(\theta)} f'(e^{i\theta})\right] = c(\theta) \;, \quad \theta \in [0, 2\pi] \;,$$

является слабо почти выпуклая функция порядка $\varkappa + 1$ если $c(\theta) > 0$ ($c(\theta) < 0$) и $\omega(\theta) + \theta \in \mathcal{M}$. Если $c(\theta) \equiv 0$, то $f(z) \in \overset{0}{S_W}(\varkappa + 1)$, т.е. слабо выпуклая порядка $\varkappa + 1$ при условии, что $\omega(\theta) + \theta \in \mathcal{M}$.

В работе [2] была сформулирована теорема о конечнолистной разрешимости задачи Гильберта с разрывными коэффициентами, доказательство которой мы сейчас приведем.

Естественным обобщением класса однолистных функций, выпуклых в n направлениях [6], является класс $K(p,n)$, p-листных выпуклых в n направлениях функций.

Определение 3. Функция $F(z)$ принадлежит классу $K(p,n)$, если существует функция $h(z) \in S(1)$, отображающая единичный круг E на плоскость с n радиальными разрезами такая, что

$$F(z) = \int_0^z \frac{h^p(t)}{t} \prod_{k=1}^{p} \varphi(t, z_k)\, p_0(t)\, dt \;,$$

где $\varphi(z, z_k) = (z - z_k)(1 - \bar{z}_k z)/z$, $|z_k| < 1$, $k = \overline{1,p}$, функция $p_0(z)$, $p_0(0) = 1$, регулярна в E и удовлетворяет условию $\operatorname{Re} e^{i\sigma} p_0(z) > 0$ с некоторым $\sigma \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге E, непрерывно продолжима на границу, за исключением конечного числа точек, в которых она имеет порядок роста, меньший единицы, и удовлетворяет условию

$$Im[e^{-i\gamma_k} f(e^{i\theta})] = c_k(\theta) \ , \ \theta \in (\varphi_k, \varphi_{k+1}) \ , \tag{11}$$

$0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < 2\pi, \ \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$; γ_k – постоянные величины, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 3. Решение задачи (10) в классе функций, ограниченных в точках стыка или имеющих там особенности с порядками, меньшими $\delta_k = (\gamma_k - \gamma_{k-1})/\pi, \ k = \overline{2,n}$, $\delta_1 = (\gamma_1 - \gamma_n + 2\pi p)/\pi$, будет не более чем p – листным в круге E, если $0 \le \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n < 2\pi p$, $\gamma_k - \gamma_{k-1} < \pi$, $k = \overline{2,n}$, $\gamma_1 - \gamma_n < \pi - 2\pi p$ и $c_k(\theta)$ – возрастающие дифференцируемые по θ функции.

Доказательство. Покажем, что решение принадлежит классу выпуклых в n направлениях порядка p функций. По лемме 2 решение задачи

$$Im[e^{-i\gamma_k + i\pi/2} e^{i\theta} f'(e^{i\theta})] = c_k'(\theta) \ , \ \theta \in (\varphi_k, \varphi_{k+1}) \ , \tag{12}$$

полученной дифференцированием краевого условия (11) по параметру θ, имеет $\varkappa_H$ нулей. В нашем случае $\varkappa_H = p$.

При построении решения используем функцию

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^{p} \varphi(z, z_k) \prod_{k=1}^{n} (1 - \bar{a}_k z)^{-(\gamma_k - \gamma_{k-1})/\pi} \ ,$$

отображающую круг на p –листную область, внешность прямолинейных разрезов, проведенных под углами $\gamma_k \pi$ к положительному направлению действительной оси. Нули функции $\Psi(z)$ должны совпадать с нулями функции $z f'(z)$. Умножим (12) на $|\Psi(e^{i\theta})|^{-1}$. Учитывая граничное поведение $\Psi(z)$, имеем

$$Re[e^{i\theta} f'(e^{i\theta}) / \Psi(e^{i\theta})] = c_k'(\theta) / |\Psi(e^{i\theta})| \ .$$

Функция $f(z)$ аналитична в круге, на границе может иметь особенности порядка не выше первого и $Re[e^{i\theta} f'(e^{i\theta})/\Psi(e^{i\theta})] > 0$. Так как выполняются условия леммы из [7], то $Re[z f'(z)/\Psi(z)] > 0$. Следовательно, $f(z) \in K(p, n)$, и теорема 3 доказана.

3. В п.1 было отмечено, что задача Гильберта (1) с отрицательным индексом $\varkappa$, которая имеет решение при выполнении $-\varkappa-1$ условий разрешимости, в некотором смысле эквивалентна задаче отображения на полигональные области. Знание геометрических свойств решения задачи Гильберта помогает видоизменить задачу так, чтобы она стала корректной.

В связи с этим интересно было бы найти варианты постановки задачи Гильберта (I) или (7) со свободными параметрами, за счет выбора которых задача становится корректно поставленной.

Одно из таких видоизменений дает краевое условие в форме

$$Re(e^{-i\gamma_\kappa}f(e^{i\theta}))=c_\kappa+d_\kappa\ ,\ \theta\in(\varphi_\kappa,\varphi_{\kappa+1})\ ,\ \kappa=\overline{1,n}\ ,$$

причем количество неизвестных параметров d_κ равно $-\varkappa-1$. Для других видоизменений можно привлекать $\{\gamma_\kappa\}$ и $\{\varphi_\kappa\}$.

В заключение обратим внимание на истолкование с точки зрения многолистных функций классов корректности задачи Римана, которые предложены Ф.Д.Гаховым.

В своей монографии ([4], с.188) Ф.Д.Гахов при обсуждении вопросов корректности предлагает переходить от задачи Римана с индексом, отличным от нуля, к задаче Римана с нулевым индексом. Переход осуществляется с помощью функций, которые могут быть локально многолистными и покрывать окрестности конечных точек листами в количестве, равном $\varkappa_+$ для функции $\Phi^+(z)$ и $\varkappa_-$ – для функции $\Phi^-(z)$, причем $\varkappa_++\varkappa_-=\varkappa$ в случае положительного индекса $\varkappa$.

В случае отрицательного индекса количество листов, покрывающих окрестность ∞, будет равно $|\varkappa|=|\varkappa_+|+|\varkappa_-|$, где $|\varkappa_+|$ – порядок листности в ∞ от $\Phi^+(z)$ и $|\varkappa_-|$ – порядок листности в ∞ от $\Phi^-(z)$. Тем самым можно утверждать, что задача Римана оказывается корректно поставленной в классе функций, который состоит из аналитических функций не менее, чем $\varkappa_+$ -листных для $\Phi^+(z)$ и не менее, чем $\varkappa_-$ -листных для $\Phi^-(z)$ $(\varkappa_++\varkappa_-=\varkappa>0)$. Для отрицательного индекса задача Римана оказывается корректно поставленной в расширенном классе аналитических функций с добавлением полярных особенностей, превращающих $\Phi^-(z)$ в не менее, чем $|\varkappa_-|$ -листную функцию и $\Phi^+(z)$ в не менее, чем $|\varkappa_+|$ -листную функцию $(\varkappa_++\varkappa_-=\varkappa<0)$.

Видимо, расширение класса искомых функций с добавлением полярных особенностей с суммарным порядком $-\varkappa-1$, $\varkappa<0$, сделает корректной такую постановку и для задачи Гильберта.

Л и т е р а т у р а

1. А к с е н т ь е в Л. А. Достаточные условия многолистности интегральных представлений // Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1980. - Вып. 17. - С.2 - 17.

2. А к с е н т ь е в Л. А., З о р и н И. А. Условия конечнолистности интегральных представлений // Тр. семин. по краев.задачам. Казань, 1990. - Вып. 25. - С.20 - 31.

3. S t y e r D. Close - to - convex multivalent functions with respect to weakly starlike functions // Trans. Amer. Math. Soc. - 1972. - V.169. - N 7. - P. 105 - 112.

4. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.

5. В е к у а И. Н. Обобщенные аналитические функции. - М.: Наука, 1988. - 509 с.

6. П р о х о р о в Д. В., Р а х м а н о в Б. Н. Об интегральном представлении одного класса однолистных функций // Матем. заметки. - 1976. - Т.19. - № 1. - С.41 - 48.

7. А к с е н т ь е в Л. А. Достаточные условия однолистности решения обратной задачи теории фильтрации // УМН. - 1959. - Т.14. - Вып. 4. - С.133 - 140.

Ф.Х.Арсланов, С.Р.Насыров

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ УСЛОВИЙ ОДНОЛИСТНОСТИ БЕККЕРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $f(z)$ регулярна и локально однолистна в единичном круге $E=\{z : |z|<1\}$. Хорошо известно, что $f(z)$ будет однолистна в E, если выполняется одно из условий [1]:

$$|f''(z)/f'(z)| \leq 1/(1-|z|^2)\ , \quad z\in E\ , \qquad \text{(1)}$$

(или [2])

$$|f''(z)/f'(z)| \leq 3{,}05\ \ldots\ , \quad z\in E\ . \qquad \text{(2)}$$

Естественно поставить вопрос о "соединении" этих двух условий, то есть получении достаточных условий однолистности вида