Л. Д. Пустыльников, О строгом обосновании возможности неограниченного роста энергии частиц в одной задаче ядерной физики,
Докл. АН СССР, 1985, том 283, номер 3, 550–553

Теорема 6. *В условиях теоремы 4 при* $-1 < x < 1$

$$|u^*(x) - u^*_{n-1}(x)| \leqslant C(\alpha, r, \lambda, \mu) n^{-r-\mu}(\rho^{-1}(x) L^{(-\alpha,-\beta)}_{n-1}(x) + \rho^*_{-\alpha,-\beta}(x) \ln n).$$

5. Аналогичным образом метод коллокации обосновывается для решений уравнения (2) в классах $h(-1)$, $h(1)$ и $h(-1, 1)$.

Автор выражает благодарность проф. В.А. Ильину и А.А. Бабаеву за ценные обсуждения.

Азербайджанский государственный университет
им. С.М. Кирова
Баку

Поступило
19 VI 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, с. 512. 2. *Бабенко К.И.* Об одном подходе к оценке качества вычислительных алгоритмов. Препринт ИПМ АН СССР, 1974, № 7, с. 68. 3. *Tsamasphyros G., Theocaris P.* – Computing, 1981, vol. 27, № 1, p. 71–80. 4. *Elliott D.* – SIAM J. Numer. Anal., 1982, vol. 19, № 4, p. 816–836. 5. *Ioakimidis N., Theocaris P.* – Ibid., 1980, vol. 17, № 1, p. 115–118. 6. *Лифанов И.К., Саакян Л.В.* – ПММ, 1982, т. 46, вып. 3, с. 494–501. 7. *Шешко М.А.* – Изв. вузов. Матем., 1976, № 12, с. 108–118. 8. *Мусаев Б.И.* – Докл. АН АзербССР, 1978, т. 34, № 10, с. 3–7; № 11, с. 3–7. 9. *Paget D., Elliott D.* – Math. Comp., 1979, vol. 33, № 145, p. 301–309. 10. *Хведелидзе Б.В.* Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГССР, 1957, т. 23, с. 3–158. 11. *Корнейчук А.А.* В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интеральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1972, с. 64–74. 12. *Paget D., Eloott D.* – Numer. Math., 1972, vol. 19, № 5, p. 313–385. 13. *Натансон Г.И.* – Изв. вузов. Матем., 1967, № 11, с. 67–74.

УДК 517.93 + 539.076

МАТЕМАТИКА

Л.Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

О СТРОГОМ ОБОСНОВАНИИ ВОЗМОЖНОСТИ НЕОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 27 VI 1984)

Рассмотрим на плоскости $Z = 0$ трехмерного пространства X, Y, Z релятивистскую заряженную частицу, на которую действует постоянное магнитное поле перпендикулярно плоскости $Z = 0$ и переменное периодическое электрическое поле вдоль плоскости $Z = 0$. Движение такой частицы описывается уравнением Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\varphi} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}],$$

где $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ – вектор импульса частицы, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор скорости частицы, связанный с вектором $\mathbf{p}$ равенством

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}}, \qquad |\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

$\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0)$ – вектор электрического поля, $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ – вектор магнитного поля, e – заряд частицы, m – масса частицы, φ – время, c – скорость света.

Далее будем считать, что выполнены следующие предположения.

а) $E_1 \equiv 0$,

б) $E_2 = E_2(X, Y, \varphi)$ — аналитическая функция, имеющая по φ период 2π,

в) $$\frac{eE_2}{mc} = \begin{cases} E(\varphi), & \text{если } (X, Y) \in \hat{\Pi}, \\ 0, & \text{если } (X, Y) \bar{\in} \hat{\Pi}, \end{cases}$$

где $\hat{\Pi}$ — прямоугольник на плоскости $Z = 0$.

$$\hat{\Pi} = \{X, Y\colon\ ca' \leqslant X \leqslant ca'',\ cb' \leqslant Y \leqslant cb''\}$$

(a', a'', b', b'' — заданные числа, удовлетворяющие условиям $a' < a''$, $b' < b''$),

г) $$\frac{eH}{mc} = \Omega = \text{const} > 0,$$

д) в начальный момент времени $v_3 = 0$ (благодаря этому условию частица всегда будет находиться на плоскости $Z = 0$ и всегда $v_3 = 0$).

Рассматриваемая система типичная в теории ускорителей [1–3]. Основной вопрос, который при этом исследуется, состоит в нахождении таких начальных данных, при которых энергия частицы $W = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}}$ неограниченно возрастала.

В приближенном случае, когда $b' = b''$ (резонатор бесконечно малой толщины) и действие электрического поля сводится к δ-толчку, эта задача изучена в работе [2], где показана возможность неограниченного роста энергии частицы для открытого двумерного множества начальных данных (см. также [3]).

В общем случае, когда $b' < b''$ (резонатор конечной толщины), несмотря на качественные рассуждения [3] строгого обоснования дано не было. Цель этой работы состоит в том, чтобы дать строгое доказательство возможности неограниченного роста энергии в случае резонатора конечной толщины. Далее будет сформулирована теорема 1, из которой следует, что для широкого класса функций $E(\varphi)$ в пятимерном расширенном фазовом пространстве X, Y, p_1, p_2, φ существует открытое множество начальных данных, при которых энергия частицы стремится к бесконечности. Этот класс функций $E(\varphi)$ содержит открытое множество в пространстве аналитических 2π-периодических функций. Он содержит также функции вида $E(\varphi) = h \sin n\varphi$, где h принадлежит открытому множеству на прямой, а $n \neq 0$ — целое число.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что функция $E(\varphi)$ удовлетворяет следующим условиям. Существуют целое $k > 0$ и вещественное φ_0 такие, что*:

1) $$\int_{\varphi_0 - b'' + b'}^{\varphi_0} E(\tau)d\tau = \Omega k,\quad 0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi,\quad -\frac{\Omega}{\pi} < \frac{1}{2}(E(\varphi_0) - E(\varphi_0 - b'' + b')) = \beta < 0;$$

2) $$\beta \neq -\frac{\Omega}{2\pi} + \frac{\Omega}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi m'}{n}\right),\quad \text{где } m' = 0, \pm 1, \ldots, \pm n;\ n = 1, 2, \ldots, 262;$$

3) $$a_0(\beta)(\ddot{E}(\varphi_0) - \ddot{E}(\varphi_0 - b'' + b')) + a_1(\beta)(\dot{E}(\varphi_0) - \dot{E}(\varphi_0 - b'' + b'))^2 \neq 0,$$ *где* $a_0(s)$, $a_1(s)$ *— некоторые фиксированные функции, не зависящие от вида функции $E(\varphi)$, причем $a_1(\beta) \neq 0$.*

Тогда в расширенном фазовом пространстве X, Y, p_1, p_2, φ существует открытое множество начальных данных, при которых энергия частицы стремится к бесконечности.

Число 262 в п. 2 теоремы можно заменить на 28.

Движения, найденные в теореме 1, относятся к классу так называемых осциллирующих движений. Движение называется осциллирующим, если в конфигурационном пространстве оно неустойчиво по Лагранжу (т.е. замыкание соответствующей полутраектории некомпактно), но и не стремится к бесконечности. В большинстве случаев, где были найдены осциллирующие движения, множество соответствующих начальных данных имеет лебегову меру ноль, причем в двумерном фазовом пространстве [4–6]. В работе [7] в одной задаче динамики в трехмерном расширенном фазовом пространстве найдено множество бесконечной лебеговой меры начальных данных, порождающих осциллирующие движения. В рассматриваемой здесь задаче множество начальных данных, порождающих осциллирующие движения, имеет бесконечную лебегову меру в пятимерном расширенном фазовом пространстве.

Наметим путь доказательства теоремы 1. Введем новые переменные:

$$x = \frac{X}{c}, \quad y = \frac{Y}{c}, \quad v = \frac{v_1}{c}, \quad u = \frac{v_2}{c}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}.$$

В этих переменных движение частицы будет описываться с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{d\varphi} = v, \\ &\frac{dy}{d\varphi} = u, \\ (1)\qquad &\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) = -\Omega v + \hat{E}(x, y, \varphi), \\ &\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) = \Omega u, \end{aligned}$$

где функция $\hat{E}(x, y, \varphi)$ имеет вид

$$\hat{E}(x, y, \varphi) = \begin{cases} E(\varphi), & \text{если} \quad (x, y) \in \Pi, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \bar{\in} \Pi, \end{cases}$$

а $\Pi = \{x, y\colon a' \leqslant x \leqslant a'',\ b' \leqslant y \leqslant b''\}$.

Пусть в момент времени $\tilde{\varphi}$ $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x(\tilde{\varphi}), y(\tilde{\varphi})) \in \Pi$, $\tilde{y} = b''$, $(\tilde{v}, \tilde{u}) = (v(\tilde{\varphi}), u(\varphi))$, $\tilde{u} > 0$. Предположим, далее, что существует ближайший к $\tilde{\varphi}$ момент времени $\tilde{\varphi}' > \tilde{\varphi}$ такой, что решение системы (1) $(x(\varphi), y(\varphi), v(\varphi), u(\varphi))$ с начальными данными $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{v}, \tilde{u})$, взятыми в момент времени $\tilde{\varphi}$, удовлетворяет условиям

$$(x(\tilde{\varphi}'), y(\tilde{\varphi}')) = (\tilde{x}', \tilde{y}') \in \Pi, \ \tilde{y}' = b'',$$

и определим отображение

$$A\colon (\tilde{\varphi}, \tilde{z}) \to (\tilde{\varphi}' \bmod 2\pi, \tilde{z}'),$$

где $\tilde{z} = z(\tilde{\varphi})$, $\tilde{z}' = z(\tilde{\varphi}')$.

Теорема 1 есть следствие формулируемой ниже теоремы 2.

Теорема 2. *Предположим, что*

$$\left|\tilde{x} - \frac{a' + a''}{2}\right| < \tilde{\epsilon}, \quad \tilde{q} = \frac{\tilde{v}}{\sqrt{1 - \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2}}, \quad l = \varphi_0 \Omega, \quad |\tilde{q} - l| < \kappa,$$

$$z_0 = \tilde{m}\,\Omega, \quad z_n = z_0 + nk\Omega, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $0 < \tilde{\epsilon} < \dfrac{a'' - a'}{2}$, $\kappa > 0$, $\tilde{m}$ *– натуральное число, а* φ_0, k *– числа, удовлетворяющие условию теоремы* 1.

Тогда для любого $\epsilon > 0$ *существуют натуральное число* n_0 *и* $\delta > 0$, *что если точка*

$$(\tilde{\varphi}, \tilde{z}) \in U_\delta^{(n_0)} = \{\varphi, z\colon\ |\varphi - \varphi_0| < \delta,\ |z - z_{n_0}| < \delta\},$$

то для всех $n = 1, 2, \ldots$ *определены точки* $(\tilde{\varphi}^{(n)}, \tilde{z}^{(n)}) = A^n(\tilde{\varphi}, \tilde{z})$, ($A^n$ *– n-я степень* A), *и*

$$(\tilde{\varphi}^{(n)}, \tilde{z}^{(n)}) \in U_\epsilon^{(n_0 + n)} = \{\varphi, z\colon\ |\varphi - \varphi_0| < \epsilon,\ |z - \tilde{z}_{n_0 + n}| < \epsilon\}.$$

Доказательство теоремы 2 существенно использует теорему 1 из [8], § 2.

Всесоюзный государственный проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт "Энергосетьпроект", Москва

Поступило 27 VI 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векслер В.И.* – ДАН, 1944, т. 43, № 8, с. 346–348. 2. *Коломенский А.А.* Канд. дис. М.: ФИАН, 1950. 3. *Капица С.П., Мелехин В.Н.* Микротрон. М.: Наука, 1969. 4. *Ситников К.А.* – ДАН, 1960, т. 133, № 2, с. 303. 5. *Леонтович А.М.* – ДАН, 1962, т. 145, № 3, с. 523. 6. *Алексеев В.М.* Матем. сб., 1968, т. 76 (118), с. 72–134; 1968, т. 77 (119), с. 545–600; 1969, т. 78 (120), с. 3–50. 7. *Пустыльников Л.Д.* Тр. ММО, 1977, т. 34, с. 3–103. 8. *Пустыльников Л.Д.* Там же, 1983, т. 46, с. 187–200.

УДК 517.977.56 **МАТЕМАТИКА**

Д.А. СЕРКОВ

СИНТЕЗ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ И СТОХАСТИЧЕСКИЙ МАКСИМИН

(Представлено академиком Н.Н. Красовским 15 V 1984)

Рассматривается задача оптимального позиционного управления параболической системой. Управление и помеха сосредоточены в конечном числе внутренних точек. Задача формализуется в виде дифференциальной игры [1–3]. Подобные задачи рассматривались в [4–6]. В данной работе на основе метода стохастического программного максимина [4] получено выражение для цены игры (теорема 3) и оптимального позиционного управления (теорема 4).