

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. B. Baskov, È. G. Platonov, G. A. Sokolov,
Deformation of a Thermal Marker in a Liquid, Moving
in Flat or Cylindrical Channels,
TVT, 1980, Volume 18, Issue 4, 841–845

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt10188>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you
have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

May 20, 2025, 03:21:27



УДК 536.22

ДЕФОРМАЦИЯ ТЕПЛОВОЙ МЕТКИ В ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ПЛОСКОМ ИЛИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛАХ

Басков В. Б., Платонов Э. Г., Соколов Г. А.

Приводится обобщение теории и расчета меточных тепловых преобразователей для плоского и цилиндрического каналов с единых методологических позиций. Предложен эффективный метод построения простых по своей структуре приближенных решений уравнения переноса теплового импульса потоком. Произведена проверка теоретических результатов с данными эксперимента.

При неконтактном измерении расхода и исследовании динамики потоков жидкости в трубопроводах различного сечения находят широкое применение тепловые метки, генерируемые в потоке путем импульсного воздействия на него электромагнитного излучателя [1, 2].

Известный метод расчета деформации тепловой метки в потоке жидкости с учетом ее аксиальной и радиальной теплопроводности основан на решении уравнения нестационарной теплопроводности методом разделения переменных Фурье [3]. Сходимость рядов, в форме которых представляется решение, существенным образом зависит от временного интервала, в течение которого рассматривается нестационарный процесс деформирования метки. При кратковременных импульсных источниках тепловой энергии анализ и практическое использование такого решения крайне затруднительны.

Предложен обобщенный метод расчета нестационарного деформирования тепловой метки в ламинарном потоке жидкости, транспортируемой в плоском или цилиндрическом тонкостенных каналах, основанный на использовании интегральных преобразований Лапласа и Фурье [4] и метода асимптотически эквивалентных функций Лобышева — Яковлева [5].

Перенос и деформация тепловой метки потоком жидкости, движущимся в канале произвольного сечения, описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + \frac{2v + 1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \delta(\tau) \sigma_0 \left(\frac{l}{R} - \zeta \right) \quad (1)$$

при нулевых начальных и следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \zeta = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0; \quad \rho = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = 0; \\ \zeta \rightarrow \infty, \quad \theta = 0; \quad \rho = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \lambda \theta = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\theta = \frac{T(x, r, t) - T_{\text{вн}}}{T_0 - T_{\text{вн}}}, \quad \tau = \frac{at}{R^2}, \quad \zeta = \frac{x - v_0 t}{R}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad \lambda = \frac{\lambda_2 R}{\lambda_1 \delta}, \quad (3)$$

где $T(x, r, t)$ — температура потока жидкости; T_0 — начальная температура теплового импульса; $T_{\text{вн}}$ — температура окружающей внешней среды;

R, δ — внутренний радиус и толщина стенки трубопровода; a — коэффициент температуропроводности жидкости; λ_1, λ_2 — коэффициенты теплопроводности жидкости и материала трубопровода; v_0 — средняя по высоте сечения канала скорость потока жидкости; x, r — продольная и радиальная координаты; t — время; $2l$ — начальная длина теплового импульса; v — трассер: $v=1/2$ соответствует плоскому каналу, $v=0$ — цилиндрическому; $\delta(\tau), \sigma_0(l/R-\xi)$ — обобщенные функции Дирака, Хевисайда. Решение уравнения (1) ищется в виде [6]

$$\theta(\xi, \rho, \tau) = \theta_1(\xi, \tau)\theta_2(\rho, \tau), \quad (4)$$

где каждая из функций θ_1, θ_2 определяется одномерными уравнениями типа

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} + \delta(\tau)\sigma_0\left(\frac{l}{R} - \xi\right), \quad (5)$$

причем $\tau=0, \theta_1=0, \xi=0, \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi}=0, \xi \rightarrow \infty, \theta_1=0,$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \rho^2} + \frac{2v+1}{\rho} \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} + \delta(\tau)\sigma_0(\rho), \quad (6)$$

$$\tau=0, \theta_2=0; \rho=0, \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho}=0; \rho=1, \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} + \lambda \theta_2 = 0.$$

Уравнение (5) описывает переносное движение тепловой метки с учетом аксиальной теплопроводности, а уравнение (6) описывает ее деформацию в радиальном направлении.

Применяя к уравнению (5) интегральные преобразования Лапласа и косинус-Фурье, нетрудно получить

$$\theta_1(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\xi + (l/R)}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi - (l/R)}{2\sqrt{\tau}} \right) \right]. \quad (7)$$

Значительно большую трудность представляет отыскание решения уравнения (6). После преобразования Лапласа в пространстве изображений будем иметь

$$\tilde{\theta}_2'' + [(2v+1)/\rho] \tilde{\theta}_2' - s\tilde{\theta}_2 = -1; \quad \rho=0, \tilde{\theta}_2'=0; \quad \rho=1, \tilde{\theta}_2' + \lambda \tilde{\theta}_2 = 0. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (8) хорошо известно и может быть записано в виде

$$\tilde{\theta}_2(\rho, s) = (\rho\sqrt{s})^{-v} [AJ_v(\rho\sqrt{s}) + BK_v(\rho\sqrt{s})] + 1/s, \quad (9)$$

где J_v, K_v — модифицированные функции Бесселя.

Из граничных условий находим

$$A = -\frac{\lambda}{s} \frac{(V\sqrt{s})^v}{\lambda J_v(V\sqrt{s}) + V\sqrt{s} J_{v+1}(V\sqrt{s})}, \quad B = 0. \quad (10)$$

С учетом выражений (10) значение функции $\tilde{\theta}_2$ на поверхности трубопровода равно

$$\tilde{\theta}_2(s) = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{\lambda}{V\sqrt{s}} \frac{J_v(V\sqrt{s})}{J_{v+1}(V\sqrt{s})} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Обращение полученного изображения возможно на основе теоремы разложения, но оригинал в этом случае представляется в виде ряда. Это неудобно для практических приложений. Однако для небольшого интервала времени можно указать иной способ обращения, основанный на асимптотическом разложении изображения (11) при $s \rightarrow \infty$

$$\tilde{\theta}_2(s) = (1/s) 1/(\sqrt{s} + \lambda). \quad (12)$$

Оригиналом данного изображения является функция

$$\theta_2(\tau) = e^{\lambda\tau} \operatorname{erfc}(\lambda\sqrt{\tau}). \quad (13)$$

Нетрудно заметить, что для малых промежутков времени $\tau \ll 1$ геометрическая форма сечения трубопровода не успевает повлиять на характер изменения функции $\theta_2(\tau)$. Полученное решение уравнения (6) находит наилучшее приложение при рассмотрении деформации тепловой метки в жидких средах с относительно малым коэффициентом температуропроводности, когда временной интервал имеет порядок $\tau \sim 10^{-3}$. С увеличением коэффициента температуропроводности среды, например для расплавов жидких металлов, возникает настоятельная необходимость в расширении временного интервала, в течение которого получаемое решение справедливо. Воспользуемся для этого методом [5], широко практикуемым в нестационарной гидроупругости оболочек [7]. Указанный метод базируется на идее замены лапласового изображения $f(s)$ некоторой асимптотически эквивалентной функцией комплексного переменного $f_*(s)$, содержащей те же особенности, что и аппроксимируемая функция. При этом должны быть выполнены условия асимптотической эквивалентности функций

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f_*(s)}{f(s)} = 1, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_*(s)}{f(s)} = 1, \quad (14)$$

а также условия их соответствия на вещественной оси $\operatorname{Re} s$. Для улучшения этого соответствия в структуру функции $f_*(s)$ вводятся свободные параметры, определяемые из условий равенства обеих функций в точках сопряжения.

Пусть в качестве асимптотически эквивалентной функции для $\bar{\theta}_2(s)$ будет выбрана функция

$$\bar{\theta}_2(s) = (s+a_1)/(s^2+a_2s+a_3), \quad (15)$$

где a_i ($i=1, 2, 3$) — свободные параметры, определяемые из системы алгебраических уравнений

$$\bar{\theta}_2(0) = \bar{\theta}_2(0), \quad \bar{\theta}_2(1) = \bar{\theta}_2(1), \quad \bar{\theta}_2(10) = \bar{\theta}_2(10). \quad (16)$$

Из ее решения находим:

а) для плоского канала

$$a_1 = 20, \quad a_2 = 20 + 7,5\lambda, \quad a_3 = 20\lambda, \quad (17)$$

б) для цилиндрического канала

$$a_1 = 14,35, \quad a_2 = 14,35 + 5,53\lambda, \quad a_3 = 28,7\lambda. \quad (18)$$

Оригинал изображения (15) нетрудно определить разложением его на простейшие дроби с последующим их обращением с помощью теории вычетов. В результате получим

$$\theta_{2*}(\tau) = \frac{s_1[(s_2/\lambda) - 1]}{s_2 - s_1} e^{-s_1\tau} + \frac{s_2[1 - (s_1/\lambda)]}{s_2 - s_1} e^{-s_2\tau}, \quad (19)$$

где величины $s_{1,2}$ — корни характеристического уравнения $s^2 - a_2s + a_3 = 0$, равные

$$s_{1,2} = (a_2/2) \pm \sqrt{(a_2/2)^2 - a_3}. \quad (20)$$

Для оценки погрешности решения (19) может быть использован один из численных методов обращения преобразования Лапласа, например метод Дюбнера — Эбата [8]. В его основе лежит идея замены интеграла Меллина в формуле обращения рядом Фурье.

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведены результаты вычислений функции $\theta_2(\tau)$ по формуле (19) и по методу [8]. Здесь же показан и рас-

чет по асимптотической формуле (13). Из рис. 1 видно, что вычисления по решению (19) практически совпадают с данными численного обращения изображения (11). Асимптотическая формула (13) оказывается справедливой лишь в малом интервале времени $0 \leq \tau \leq 0,4$, где она полностью совпадает с предыдущими результатами.

Полезно отметить, что с увеличением параметра λ можно указать еще один путь асимптотического обращения изображения (11). Например,

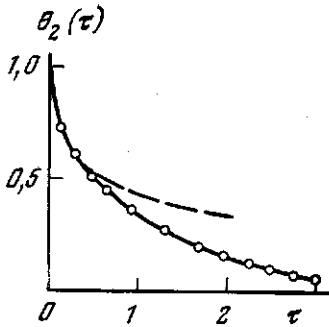


Рис. 1

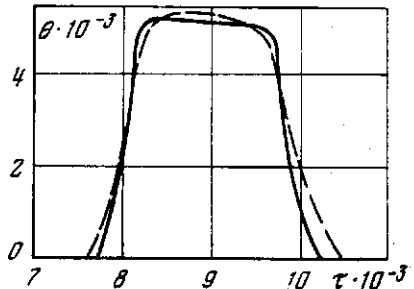


Рис. 2

Рис. 1. Деформация тепловой метки в плоском канале на границе раздела сред $\rho=1$ при $\lambda=1$. Сплошная кривая — расчет по методу [8]; точки — расчет по (19); штриховая кривая — расчет по (13)

Рис. 2. Изменение температуры тепловой метки в цилиндрическом канале на границе раздела сред $\rho=1$ при $\lambda=310$, $v_0=0,1$ м/с, $x=0,1$ м, $R=4 \cdot 10^{-3}$, $\delta=2 \cdot 10^{-3}$ м. Сплошная кривая — теоретический расчет; штриховая — эксперимент

в случае плоского канала $\nu=-1/2$ из (11) получаем

$$\tilde{\theta}_2(s) = (1/s) [1 + (\lambda/\sqrt{s}) \operatorname{cth} \sqrt{s}]^{-1}. \quad (21)$$

При $\lambda \gg 10$ отсюда вытекает асимптота

$$\tilde{\theta}_2(s) \approx \operatorname{th} \sqrt{s} / \lambda \sqrt{s}. \quad (22)$$

Нетрудно отыскать оригинал данного изображения в виде

$$\theta_2(\tau) \approx \frac{2}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi^2(k+1/2)^2 \tau}. \quad (23)$$

Поскольку этот ряд при всех $\tau > 0$ быстро сходится, то для практических целей в нем достаточно удержать только первый член

$$\theta_2(\tau) = \frac{2}{\lambda} e^{-\pi^2 \tau / 4}. \quad (24)$$

В связи с этим появляется реальная возможность сравнения полученного результата с результатом, вытекающим из формулы (19) при тех же допущениях

$$\theta_{2*}(\tau) = \frac{2,3}{\lambda} e^{-2,66\tau}. \quad (25)$$

Как видно, оба приводимых выражения близки между собой.

Таким образом, с определением функции $\theta_2(\tau)$ процесс отыскания решения уравнения (1) на границе раздела двух сред $\rho=1$ можно считать законченным. В связи с этим возникает потребность в экспериментальной проверке предлагаемого теоретического решения. На рис. 2 приведено сравнение результатов расчета тепловой метки на границе раздела двух сред в случае цилиндрического канала с данными опытов. Как видно из

рис. 2, наблюдается удовлетворительное совпадение результатов теоретического прогноза и эксперимента.

Таким образом, получено обобщение теории решения меточных преобразователей для плоского и цилиндрического трубопроводов с единых методологических позиций; указан эффективный метод построения простых по своей структуре приближенных решений уравнения переноса теплового импульса и проведено сопоставление теоретических результатов с данными экспериментов.

Технологический институт
имени Ленсовета
г. Ленинград

Поступила в редакцию
12 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Е. Кириллов, П. А. Обновленский, Г. А. Соколов. ТВТ, 15, 5, 1122, 1977.
2. С. Е. Кириллов, В. Б. Басков, П. А. Обновленский, Г. А. Соколов. Изв. вузов. Приборостроение, 20, № 19, 124, 1977.
3. А. И. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1951.
4. В. А. Диткин, А. П. Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление. ГИФМЛ, 1951.
5. В. Л. Лобысев, Ю. Я. Яковлев. В сб. Проблемы механики твердого деформированного тела. «Судостроение» Л., 1970.
6. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. «Высшая школа», 1967.
7. Е. В. Мнев, А. К. Перцев. Гидроупругость оболочек. «Судостроение». Л., 1970.
8. H. Dubner, J. Abate. JASCM, 15, № 1, 1968.