С. И. Алишаускас, П. П. Кулиш, Спектральное разложение $SU(3)$-инвариантных решений уравнения Янга–Бакстера, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1985, том 145, 3–21

С.И.Алишаускас, П.П.Кулиш

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ $SU(3)$- ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА

I. Введение

В работах [I, 2] был исследован класс решений уравнения Янга-Бакстера (R - матриц), инвариантных относительно группы $SU(N)$. Определенная в тензорном произведении двух векторных пространств $V_a \otimes V_b$, где действуют представления π_a и π_b группы G , матрица R_{ab} называется G - инвариантной [I] , если

$$\pi_a(g) \otimes \pi_b(g) R_{ab} = R_{ab} \pi_a(g) \otimes \pi_b(g), \quad g \in G. \qquad (I.I)$$

Уравнение Янга-Бакстера записывается в тензорном произведении трех пространств $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ и имеет вид

$$R_{12}(u) R_{13}(u+v) R_{23}(v) = R_{23}(v) R_{13}(u+v) R_{12}(u), \qquad (I.2)$$

где вообще говоря различные матрицы $R_{ab}(u)$ нетривиально действуют в $V_a \otimes V_b$, в третьем пространстве V_c действуют как единичная матрица и аналитически зависят от (спектрального) параметра u .

Для случая группы $G = SU(N)$ инвариантные R матрицы параметризуются старшими весами Λ_a, Λ_b неприводимых представлений $SU(N)$, действующих в V_a, V_b [I, 2] . Пространство представления $V_a \otimes V_b$ группы $SU(N) \otimes SU(N)$ раскладывается в ряд Клебша-Гордана (КГ)

$$V_a \otimes V_b = \sum_k V(\Lambda_k) \qquad (I.3)$$

по НП диагональной подгруппы $SU(N) \subset SU(N) \otimes SU(N)$. Матрица $R_{ab}(u)$ будучи инвариантной также допускает представление вида

$$R_{ab}^{\Lambda_a \Lambda_b}(u) = \sum_k \rho_k(u) P_{\Lambda_k}, \qquad (I.4)$$

где P_{Λ_k} - проектор на подпространство НП $V(\Lambda_k)$, а $\rho_k(u)$ - скалярный относительно $SU(N)$ оператор. Разложение (I.4) называется спектральным. Оно было вычислено при $N = 2$ и для большого класса представлений Λ_a, Λ_b при $N = 3$ [I, 2] .

Цель данной работы – вычисление разложения (I.4) в случае общих конечномерных НП группы $SU(3)$, когда в ряде КГ (I.3) появляются кратные НП и соответствующие им в (I.4) $\rho_k(u)$ становятся $r \times r$ – матрицами, где r – кратность соответствующего НП со старшим весом Λ_k.

Скалярный оператор $\rho_k(u)$ является функцией операторов Казимира трех групп цепочки $SU(N)\otimes SU(N)\supset SU(N)$, а также других $SU(N)$ – скалярных операторов, построенных из генераторов этих групп. В ряде случаев показано (см., например, [3]) что число функционально независимых и отличных от операторов Казимира скалярных операторов диагональной подгруппы в обертывающей алгебре в два раза больше размерности дополнительного индекса кратных НП подгруппы. Так в [3] рассмотрены все случаи, когда индекс кратности одномерен и, в частности, показано, что для разложения $SU(3)\otimes SU(3)\supset SU(3)$ имеются два таких оператора – полиномы генераторов третьей и четвертой степени. Эти операторы между собой не коммутируют, а любой классифицирующий кратные НП оператор выражается как их функция.

Вообще оператор $\rho_k(u)$ целесообразно представить в матричном виде

$$\rho^{\omega}_{\Lambda_k}{}_{\omega'}(u), \tag{I.5}$$

где ω и ω' индексы кратных НП. Так как аналитическими методами обычно удается построить только неортонормированные системы базисов кратных НП, мы применяем верхние и нижние индексы, которые соответствуют биортогональным системам состояний (см., например, [4]).

Для вычисления $\rho_k(u)$ из уравнения Янга-Бакстера было получено уравнение [I, 2]

$$\left[R^{\Lambda_a\Lambda_b}_{ab}(u), u d_{ij}-\frac{1}{2}d^{\{2\}}_{ij}\right]=\frac{1}{4}\left\{\left[C_2(p^a+p^b),d_{ij}\right],R^{\Lambda_a\Lambda_b}_{ab}(u)\right\}, \tag{I.6}$$

где $[\,,\,]$ – коммутатор, $\{\,,\,\}$ – антикоммутатор, p^a_{ij}, p^b_{ij} генераторы алгебр Ли $su_a(N)$ и $su_b(N)$

$$[p^a_{ij}, p^b_{kl}]=\delta^{ab}(p^a_{il}\delta_{jk}-p^a_{kj}\delta_{il}), \tag{I.7}$$

оператор Казимира $C_2(p)=\sum_{i,j} p_{ij}\,p_{ji}$ и введены обозначения

$$d_{ij}=p^a_{ij}-p^b_{ij},\quad d^{\{2\}}_{ij}=\frac{1}{2}\sum_k (d_{ik}d_{kj}+d_{kj}d_{ik}). \tag{I.8}$$

Беря матричный элемент (I.6) между состояниями дуальных базисов НП Λ_k и Λ_l, имеем

$$\sum_{\omega'_k} \rho^{\omega_k}_{\Lambda_k \omega'_k}(u)\Big(\langle{}^{\omega'_k}\Lambda_k|d_{ij}|_{\omega_l}\Lambda_l\rangle\big(u-\tfrac{1}{4}C_2(\Lambda_k)+\tfrac{1}{4}C_2(\Lambda_l)\big)- -\tfrac{1}{2}\langle{}^{\omega'_k}\Lambda_k|d^{\{2\}}_{ij}|_{\omega_l}\Lambda_l\rangle\Big)=\sum_{\omega'_l}\Big(\langle{}^{\omega_k}\Lambda_k|d_{ij}|_{\omega'_l}\Lambda_l\rangle\times \times\big(u+\tfrac{1}{4}C_2(\Lambda_k)-\tfrac{1}{4}C_2(\Lambda_l)\big)-\tfrac{1}{2}\langle{}^{\omega_k}\Lambda_k|d^{\{2\}}_{ij}|_{\omega'_l}\Lambda_l\rangle\Big)\rho^{\omega'_l}_{\Lambda_l\,\omega_l}. \tag{I.9}$$

Вектора с верхними и нижними индексами дуальны (при совпадении остальных базисных индексов, которые мы опускаем)

$$\langle{}^{\omega}\Lambda|_{\omega'}\Lambda\rangle=\delta_{\omega\omega'}. \tag{I.10}$$

При $\Lambda_k \neq \Lambda_l$ матричные элементы в (I.9) можно заменить приведенными матричными элементами, но появление кратных НП для приведения $\Lambda_k \otimes [10\ldots0{-}1]_N \to \Lambda_k$ не позволяет этого делать при $\Lambda_l=\Lambda_k$ ($[10\ldots0{-}1]_N$ – присоединенное представление $SU(N)$). В этом случае матрицы $\rho^{\omega_k}_{\Lambda_k\omega'_k}$ и $\langle{}^{\omega_k}\Lambda_k|u\,d_{ij}-\tfrac{1}{2}d^{\{2\}}_{ij}|_{\omega'_k}\Lambda_k\rangle$ коммутируют между собой. Вместо того, чтобы разбираться с зависимостью матричных элементов последней матрицы от базисных индексов состояний НП группы $SU(N)$, умножим исходное уравнение (I.6) справа на операторы

$$P_{ji},\quad P^{\{2\}}_{ji}=\frac{1}{2}\sum_k(P_{jk}P_{ki}+P_{ki}P_{jk})$$

и т.д., обычно применяемые при построении операторов Казимира и просуммируем по индексам i и j, учитывая, что $\rho_{\Lambda_k}(u)$ и P_{ji} коммутируют. Таким путем на месте d и $d^{\{2\}}$ появляются $SU(N)$- инвариантные операторы, диагональные по Λ_k и всем базисным индексам $SU(N)$. Легко убедиться, что в случае умножения на первую степень генератора P_{ji} появляются только операторы Казимира, не дающие никакой информации о свойствах оператора $\rho_{\Lambda_k}(u)$. Во втором случае получаем оператор

$$A(u)\equiv u\sum_{ij}d_{ij}P^{\{2\}}_{ji}-\frac{1}{2}\sum_{ij}d^{\{2\}}_{ij}P^{\{2\}}_{ji}, \tag{I.11}$$

не тривиальный уже в $SU(3)$ случае и эквивалентный линейной комбинации классификационных операторов, указанных в [3]. По крайней мере для $SU(3)$ оператор (I.II) имеет разные собственные значения, поэтому оба оператора (I.5) и (I.II) одновременно приводятся к диагональному виду и имеют общие системы собственных векторов. Собственные значения классификационного оператора (I.II) как правило иррациональны и в случае кратностей НП, превышающих четыре, могут быть найдены только численно (см. например, случаи операторов третьей степени для $SU(3)$, обсуждаемые в [5 - 9]. Оператор $\rho_{\Lambda_k}(u)$ в полупространстве кратного неприводимого представления $V(\Lambda_k)$ можно однозначно представить в виде полинома от оператора $A(u)$

$$\rho_{\Lambda_k}(u) = \sum_{i=0}^{r-1} x_i(u) A^i(u). \qquad (I.I2)$$

Коэффициенты этого представления $x_i(u)$ - рациональные функции параметров НП и спектрального параметра u, находятся из системы r линейных уравнений, которая следует из (I.9) после подстановки туда матричных элементов оператора (I.I2). Таким образом нахождение спектрального разложения (I.4) сводится к задаче линейной алгебры, если известны матричные элементы классификационного оператора $A(u)$ и операторов (I.8) в базисе $SU(N)\otimes SU(N)\supset SU(N)$.

Следующий раздел содержит вычисления необходимых матричных элементов при $N=3$. В разделе 3 приведены явные формулы спектрального разложения (I.4) при различных кратностях. Пока не ясно, насколько элементарно в вычислительном отношении обобщение приведенных результатов для $N>3$, когда оператор A может быть вырожденным на подпространствах кратных НП и необходимо использовать свертки операторов (I.8) с более высокими степенями генераторов p_{ij}.

Авторы признательны Н.Ю.Решетихину и Е.К.Склянину за плодотворные обсуждения.

2. Матричные элементы операторов d_{ij}, $d_{ij}^{\{2\}}$ и классификационных операторов в $SU(3)\otimes SU(3)\supset SU(3)$ базисе

Операторы d_{ij} дополняют до алгебры Ли группы $SU(3)\otimes$ $\otimes SU(3)$ алгебру Ли генераторов p_{ij} диагональной подгруппы $SU(3)$ и образуют второй $SU(3)$ - неприводимый тензор среди генераторов $SU(3)\otimes SU(3)$. Оба набора операторов d_{ij} и $d_{ij}^{\{2\}}$ преобразуются по присоединенному представлению группы $SU(3)$ Матричные элементы этих операторов, как и классифицирующего кратные НП оператора четвертой степени в литературе пока не рассматривались. Хотя матричные элементы разных вариантов классификационного оператора третьей степени вычислялись в [5 - 9], важнейшие их закономерности не выявлены, кроме определенных правил отбора по индексу кратных НП. Поэтому мы не будем пользоваться имеющимися там вариантами базисов и операторов.

Как принято в большинстве физических работ, неприводимые представления (НП) группы $SU(3)$ будем параметризовать $(\lambda\mu)$, а подгруппы $SU(2)\subset SU(3)$ угловым моментом I. Эти параметры связаны с параметрами Гельфанда-Цетлина следующим образом

$$
\begin{gathered}
\lambda = m_{13}-m_{23}, \quad \mu = m_{23}-m_{33}, \\
I=\frac{1}{2}(m_{12}-m_{22}), \quad M=m_{11}-\frac{1}{2}(m_{12}+m_{22}), \qquad (2.1) \\
Z=m_{23}-\frac{1}{2}(m_{12}+m_{22}).
\end{gathered}
$$

Параметры I, M, Z одновременно целые или полуцелые. Запишем также размерность НП группы $SU(3)$

$$
\dim V(\lambda\mu)=\frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1)(\lambda+\mu+2). \qquad (2.2)
$$

Неортонормированный базис для цепочки $SU(3)\otimes SU(3)\supset SU(3)\supset$ $\supset U(2)$ выбираем в виде

$$
P^{(\lambda\mu)}_{(Z)IM;(Z)I\frac{1}{2}(\lambda_1-\mu_2)}\left|\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1)\\ (-\frac{1}{2}\lambda_1)\frac{1}{2}\lambda_1,\frac{1}{2}\lambda_1\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}(\lambda_2\mu_2)\\ (\frac{1}{2}\mu_2)\frac{1}{2}\mu_2,-\frac{1}{2}\mu_2\end{matrix}\right\rangle=
$$

$$
=\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)(\lambda_1\mu_1)(\lambda_2\mu_2)\\ (Z)IM;(Z)\bar{I}\frac{1}{2}(\lambda_1\mu_2)\end{matrix}\right\rangle\!\!\!\Big\rangle = \qquad (2.3)
$$

.

$$
=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\lambda_1 & \frac{1}{2}\mu_2 & \bar{I}\\ \frac{1}{2}\lambda_1 & -\frac{1}{2}\mu_2 & \frac{1}{2}(\lambda_1-\mu_2)\end{bmatrix}\left|\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1)(\lambda_2\mu_2)-,+,\bar{I}\,(\lambda\mu)\\ (Z)IM\end{matrix}\right\rangle= \qquad (2.4)
$$

$$
=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda_1 & \frac{1}{2}\mu_2 & \bar{I} \\ \frac{1}{2}\lambda_1 & -\frac{1}{2}\mu_2 & \frac{1}{2}(\lambda_1-\mu_2) \end{bmatrix} \sum_{\omega} \begin{bmatrix} (\lambda_1\mu_1) & (\lambda_2\mu_2) & {}^{\omega}(\lambda\mu) \\ (-\frac{1}{2}\lambda_1)\frac{1}{2}\lambda_1 & (\frac{1}{2}\mu_2)\frac{1}{2}\mu & (\underline{Z})\bar{I} \end{bmatrix} \sum_{\substack{I_1 I_2 Z_1 Z_2 \\ M_1 M_2}} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} (\lambda_1\mu_1) & (\lambda_2\mu_2) & {}_{\omega}(\lambda\mu) \\ (Z_1)I_1 & (Z_2)I_2 & (Z)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I \\ M_1 & M_2 & M \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} (\lambda_1\mu_1) \\ (Z_1)I_1M_1 \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} (\lambda_2\mu_2) \\ (Z_2)I_2M_2 \end{matrix} \right\rangle \qquad (2.5)
$$

Здесь $P^{(\lambda\mu)}$ – проекционный оператор, выделяющий состояния НП$(\lambda\mu)$ $SU(3)$ с указанными справа базисными характеристиками и превращающий их в состояния с левыми характеристиками (его явный вид нам не понадобится). Квадратными скобками обозначены коэффициенты Клебша – Гордана $SU(2)$ и изофакторы $SU(3) \supset U(2)$. Специальные билинейные комбинации изофакторов приведены в [10 – 12, 4]. Кратные НП в прямом произведении выделяют параметр $\bar{I}$, имеющий смысл скрытого углового момента. Для наших целей естественной оказалась нормировка (2.3), а не (2.4), использованная в [10], где приведены также перекрытия этого неортонормированного базиса. Между параметрами имеют место следующие зависимости (s – целое число)

$$
Z = Z_1 + Z_2 + s, \quad \underline{Z} = \frac{1}{2}(\mu_2 - \lambda_1) + s, \qquad (2.6)
$$
$$
s = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \mu_1 + \lambda_2 - \mu_2 - \lambda + \mu).
$$

Интервал изменения $\bar{I}$ определяется свойствами схемы Гельфанда-Цетлина [13] и треугольными условиями (см. [10] (2.3а)), но линейно независимые состояния (2.3)-(2.5) удовлетворяют кроме того неравенствам ([10] (2.3б))

$$
\mu_1 - \mu + \underline{Z} + \bar{I} \geqslant 0, \quad \lambda_2 - \lambda_1 - \underline{Z} + \bar{I} \geqslant 0. \qquad (2.7)
$$

Чтобы выделить приведенные матричные элементы, неприводимые составляющие тензорного оператора d_{ij} представим в следующем виде

$$
d^{(11)}_{000} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(d_{11} + d_{22} - 2d_{33}), \quad d^{(11)}_{011} = -d_{12},
$$
$$
d^{(11)}_{010} = \frac{1}{\sqrt{2}}(d_{11} - d_{22}), \quad d^{(11)}_{01-1} = d_{21}, \qquad (2.8)
$$
$$
d^{(11)}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = d_{13}, \quad d^{(11)}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = d_{23},
$$

$$d^{(11)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = -d_{32}\ , \quad d^{(11)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = d_{31}\,.$$

Аналогично записываются неприводимые составляющие $(d^{\{2\}})^{(11)}_{z_0 I_0 M_0}$, при этом следует использовать зависимость $d_{11}+d_{22}+d_{33}=\overset{\circ}{0}$, имеющую место на базисе НП группы $SU(3)\otimes SU(3)$, и выразить составляющие $d^{\{2\}}$ как билинейную форму восьми операторов (2.8).

Воспользуемся обобщением перестановочных соотношений, примененных в [I2, I5] (см.также [I6],стр. 236, или [ ]), для неприводимых тензорных и проекционных операторов НП группы

$$t^{(\lambda_0\mu_0)}_{z_0 I_0 M_0}\, P^{(\lambda\mu)}_{ZIM;\underline{z}\bar{I}\underline{M}} = \sum_{\lambda'\mu' r} \frac{\dim(\lambda\mu)}{\dim(\lambda'\mu')}\ \times$$

$$\times \sum_{I'Z'M'} \begin{bmatrix} (\lambda\mu) & (\lambda_0\mu_0) & {}_r(\lambda'\mu') \\ (Z)I & (z_0)I_0 & (Z')I' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I_0 & I' \\ M & M_0 & M' \end{bmatrix} \times$$

$$\times \sum_{i_0 z_0 m_0 \bar{I}'} \begin{bmatrix} (\lambda\mu) & (\lambda_0\mu_0) & {}^r(\lambda'\mu') \\ (\underline{z})\bar{I} & (\underline{z}_0)i_0 & (\underline{z}')\bar{I}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I} & i_0 & \bar{I}' \\ \underline{M} & m_0 & \underline{M}' \end{bmatrix} \times$$

$$\times\, P^{(\lambda'\mu')}_{Z'I'M';\,\underline{z}'\bar{I}'\underline{M}'}\ t^{(\lambda_0\mu_0)}_{\underline{z}_0 i_0 m_0}\,. \tag{2.9}$$

Подействуем на (2.3) оператором (2.8). Операторы повышения веса $\overset{a}{\underset{b}{P}}_{13}, \overset{a}{\underset{b}{P}}_{23}, \overset{a}{\underset{b}{P}}_{12}$ при действии на функцию $\left|\begin{smallmatrix}(\lambda_1\mu_1)\\ max\end{smallmatrix}\right\rangle$ и операторы понижения веса P_{31}, P_{32}, P_{21} при действии на функцию $\left|\begin{smallmatrix}(\lambda_2\mu_2)\\ min\end{smallmatrix}\right\rangle$ дают ноль. Отсюда следует, что справа от проекционного оператора операторы d_{13} , d_{23} , d_{12} можно заменить на $-P_{13}, -P_{23}, -P_{12}$, а операторы d_{31}, d_{32}, d_{21} – на P_{31}, P_{32}, P_{21} соответственно. Далее их можно включить в проекционный оператор. Аналогично, полиномами от инфинитезимальных операторов диагональной подгруппы $SU(3)$ можно заменить и операторы $d^{\{2\}}$. Действие операторов d_{11}, d_{22}, d_{33} на функцию $\left|\begin{smallmatrix}(\lambda_1\mu_1)\\ max\end{smallmatrix}\right\rangle\left|\begin{smallmatrix}(\lambda_2\mu_2)\\ min\end{smallmatrix}\right\rangle$ элементарно.

При рассмотрении инфинитезимальных преобразований неканонических базисов в случае сужений $SU(4)\supset SU(2)\otimes SU(2)$ и $SU(3)\supset SO(3)$ удалось объединить ряд членов, появляющихся из перестановочных соотношений типа (2.9) (см. [I7] и [4] ,(54)). Приведенные матричные элементы оказались пропорциональными специальным коэффициентам КГ (а не их более сложным линейным комбинациям как в работах других авторов). Использование явных выражений для матричных элементов генераторов и специальных изофакторов группы $SU(3)$ представленных в таблицами [I8, I9].*), а также коэффициентов КГ $SU(2)$, позволило представить в аналогичном виде и матричные элементы операторов d и $d^{\{2\}}$. Таким путем получено

$$d^{(11)}_{z_0 I_0 M_0}\left\| \begin{matrix}(\lambda\mu) & (\lambda_1\mu_1)(\lambda_2\mu_2) \\ ZIM\,; & \underline{z}\,\overline{I}\,\underline{M}\end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{\tau,\lambda',\mu',\\ Z',I',M}} \frac{\dim(\lambda\mu)}{\dim(\lambda'\mu')} \begin{bmatrix} (\lambda\mu) & (11) & {}^{\tau}(\lambda'\mu') \\ (Z)I & (z_0)I_0 & (Z')I' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I_0 & I' \\ M & M_0 & M' \end{bmatrix} \times$$

$$\times \sum_{\underline{z}',\overline{I}'} \left\{ \begin{bmatrix} (\lambda\mu) & (11) & {}_{\tau}(\lambda'\mu') \\ (\underline{Z})\overline{I} & (0)1 & (\underline{z}')\overline{I}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{I} & 1 & \overline{I}' \\ \frac{\lambda_1-\mu_2}{2} & 0 & \frac{\lambda_1-\mu_2}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1+\mu_2+2+(\overline{I}'-\overline{I})(\overline{I}+\overline{I}'+1))+ \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} (\lambda\mu) & (11) & {}_{\tau}(\lambda'\mu') \\ (\underline{z})\overline{I} & (0)0 & (\underline{z}')\overline{I}' \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}(-\lambda_1-2\mu_1-\mu_2-2\lambda_2+C_2(\lambda\mu)-C_2(\lambda'\mu')-6) \right\} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix}(\lambda'\mu') & (\lambda_1\mu_1)(\lambda_2\mu_2) \\ Z'I'M'\,; & \underline{z}'\,\overline{I}'\,\underline{M}\end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle ; \qquad (2.10)$$

$$(d^{\{2\}})^{(11)}_{z_0 I_0 M_0}\left\| \begin{matrix}(\lambda\mu)(\lambda_1\mu_1)(\lambda_2\mu_2) \\ ZIM\,;\ \underline{z}\,\overline{I}\,\underline{M}\end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle = \sum_{\substack{\tau,\lambda',\mu',\\ Z',I',M'}} \frac{\dim(\lambda\mu)}{\dim(\lambda'\mu')} \times$$

---

*) Наиболее удобны таблицы [I8] , наиболее компактны [I9] . Различие фаз в [I8] и [I9] не существенно. В частях 2 и 6 таблицы П [I8] в формулах, соответствующих $(\lambda'\mu')=(\lambda+1\mu+1)$, необходимо исправить $(\tau-y+1)$ на $(q-y+1)$, а в частях 4 и 5 при $(\lambda'\mu')=(\lambda-1\mu-1)$ следует исправить $(\tau-y-1)$ на $(q-y-1)$. Все необходимые изофакторы при $(\lambda\mu)\neq(\lambda'\mu')$, $(\lambda_0\mu_0)=(11)$ можно выразить по формуле (2.7) [20] с учетом свойств симметрии, приведенных в [I0].

$$\times\begin{bmatrix}(\lambda\mu) & (11) & {}^{\gamma}(\lambda'\mu') \\ (Z)I & (Z_0)I_0 & (Z')I'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & I_0 & I' \\ M & M_0 & M'\end{bmatrix}\times$$

$$\times\sum_{\underline{Z}'\bar{I}'}\left(\begin{bmatrix}(\lambda\mu) & (11) & {}_{\gamma}(\lambda'\mu') \\ (\underline{Z})\bar{I} & (0)1 & (\underline{Z}')\bar{I}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{I} & 1 & \bar{I}' \\ \frac{\lambda_1-\mu_2}{2} & 0 & \frac{\lambda_1-\mu_2}{2}\end{bmatrix}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\lambda_1+\mu_2+2+(\bar{I}'-\bar{I})(\bar{I}'+\bar{I}+1)\right]\left[\frac{1}{3}(\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu_2)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}C_2(\lambda'\mu')-\frac{1}{2}C_2(\lambda\mu)+(\bar{I}-\bar{I}')(\bar{I}+\bar{I}'+1)+2\right]$$

$$+\begin{bmatrix}(\lambda\mu) & (11) & {}_{\gamma}(\lambda'\mu') \\ (\underline{Z})\bar{I} & (0)0 & (\underline{Z}')\bar{I}'\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{1}{6}(\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu_2+3)\times\right.$$

$$\times\left[\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu_2+9+C_2(\lambda'\mu')-C_2(\lambda\mu)\right]-\lambda_1(\lambda_1+2)-\frac{3}{2}-$$

$$-\mu_2(\mu_2+2)+(1-\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'})\left[3+4\bar{I}(\bar{I}-1)+\frac{1}{2}C_2(\lambda'\mu')-\right.$$

$$-\frac{1}{2}C_2(\lambda\mu)-2\underline{Z}^2(\delta_{\lambda'\lambda+1}\delta_{\mu'\mu+1}+\delta_{\lambda'\lambda-1}\delta_{\mu'\mu-1})-$$

$$\left.-2(\mu-\underline{Z}+1)^2(\delta_{\lambda'\lambda+2}+\delta_{\lambda'\lambda-2})-2(\lambda+\underline{Z}-1)^2(\delta_{\mu'\mu+2}+\delta_{\mu'\mu-2})\right]+$$

$$\left.+\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'}\left(\frac{1}{2}\underline{Y}^2+1\right)\right\}+\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\bar{I}\bar{I}'}\left\{-\frac{C_3}{3\sqrt{C_2}}\delta_{\gamma 1}+\right.$$

$$+\delta_{\gamma 2}\sqrt{3C_2}\left[\lambda\mu(\lambda+2)(\mu+2)(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+3)\right]^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times \frac{1}{2}(-1)\left[\frac{2}{3}\frac{C_3^2}{C_2}-\frac{1}{3}C_2^2-\frac{1}{6}C_2-\frac{2}{3}C_3\underline{Y}+\underline{Y}^2+\frac{1}{6}C_2\underline{Y}^2-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}\underline{Y}^4+2\underline{Y}^2\bar{I}(\bar{I}+1)+2C_2\bar{I}(\bar{I}+1)-4\bar{I}^2(\bar{I}+1)^2\right]\right\}\Bigg)\times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} (\lambda'\mu')\ (\lambda_1\mu_1)\ (\lambda_2\mu_2) \\ z'I'M';\ \underline{z}'\bar{I}'\underline{M} \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle . \qquad (2.11)$$

Здесь

$$\underline{Y}=\frac{1}{3}(\lambda_1+2\mu_1-2\lambda_2-\mu_2),\ \underline{M}=\frac{1}{2}(\lambda_1-\mu_2),$$

$$C_2(\lambda\mu)=\frac{2}{3}\left(\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu+3(\lambda+\mu)\right), \qquad (2.12)$$

$$C_3(\lambda\mu)=\frac{1}{9}(\lambda-\mu)(2\lambda+\mu+3)(\lambda+2\mu+3)$$

(нормировка операторов Казимира отличается от традиционной, см. например, [18, 19]). Множитель $(-1)^{\varphi}=1$ в системе фаз [19] и $(-1)^{\varphi}=-1$ в системе фаз 18 . Расходимости в правой части (2.11) при $\tau=2$ и параметре λ или μ равном 0 не возникает, т.к. в этих случаях следующий за $(-1)^{\varphi}$ множитель равен 0 (как и соответствующие изофакторы $SU(3)$ – см. концепцию нулевых пространств тензорных операторов [22]). Применяемые в (2.10), (2.11) системы изофакторов ортонормированы относительно индекса кратных НП τ , используемого в [18, 19] . В этих формулах устранены недиагональные по $\underline{M}$, $\underline{M}'$ члены, а также члены, в которых z_0 и i_0 принимают полуцелые значения. Приведенные матричные элементы представлены как функции специальных коэффициентов КГ и собственных значений операторов Казимира разных подгрупп.

Видно, что оба оператора (d и $d^{\{2\}}$) меняют индекс кратных НП не более чем на ± 1 . Но в случае [10]

$$\begin{aligned} &\mu_1-\lambda_1+2\lambda_2+\mu_2-2\lambda-\mu<0, \\ &\lambda_1+2\mu_1+\lambda_2-\mu_2-\lambda-2\mu<0 \end{aligned} \qquad (2.13)$$

появляются линейно зависимые состояния, которые могут быть разложены по полной системе с помощью соотношения

$$\left\| \begin{matrix} (\lambda'\mu') & (\lambda_1\mu_1)(\lambda_2\mu_2) \\ ZIM; & \underline{z}'\bar{i}\,\underline{M} \end{matrix} \right\rangle\!\!\Big\rangle =$$

$$= \sum_{\bar{I}} \left\{ \delta_{\bar{i}\bar{I}} + \left(\frac{(\bar{I}-\underline{M})!(\bar{i}+\underline{M})!(\bar{I}-\underline{z}')!(\bar{i}+\underline{z}')!}{(\bar{i}-\underline{M})!(\bar{I}+\underline{M})!(\bar{I}+\underline{z}')!(\bar{i}-\underline{z}')!} \right)^{\frac{1}{2}\operatorname{sign} s'} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{(2\bar{I}+1)(2\bar{i}+1)(\lambda'+\underline{z}'-\bar{i})!(\lambda'+\underline{z}'+\bar{i}+1)!(\mu'-\underline{z}'-\bar{i})!(\mu'-\underline{z}'+\bar{i}+1)!}{(\lambda'+\underline{z}'-\bar{I})!(\lambda'+\underline{z}'+\bar{I}+1)!(\mu'-\underline{z}'-\bar{I})!(\mu'-\underline{z}'+\bar{I}+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left. \times \frac{(-1)^{\bar{i}-B}(\bar{I}+B)!}{(\bar{I}-\bar{i})(\bar{I}+\bar{i}+1)(\bar{I}-B)!(\bar{i}+B)!(B-\bar{i}-1)!} \right\} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} (\lambda'\mu') & (\lambda_1\mu_1)(\lambda_2\mu_2) \\ ZIM; & \underline{z}'\bar{I}\,\underline{M} \end{matrix} \right\rangle\!\!\Big\rangle . \qquad (2.14)$$

Здесь $\bar{I} \geqslant B$,

$$B = \frac{1}{2}(\lambda+\mu-\lambda_2-\mu_1+|s'|), \quad s' = \frac{1}{3}(\lambda_1-\mu_1+\lambda_2-\mu_2-\lambda'+\mu'),$$

при $s'=0$ величина $[\ldots]^{\frac{1}{2}\operatorname{sign} s'} = 1$. Формула (2.14) следует из (9) [21] и свойств симметрии изофакторов приведенных в [10]

Наконец рассмотрим матричные элементы оператора (1.11). В [19] показано, что матричные элементы симметризованной свертки $P_{ji}^{\{2\}}$ можно разложить по коэффициентам Клебша-Гордана $SU(3)$, в которых индекс γ принимает оба значения, а приведенные матричные элементы выражаются через собственные значения операторов Казимира. Например, составляющая оператора $P^{\{2\}}$ с базисными характеристиками $z_0 = I_0 = M_0 = 0$ может быть представлена в виде

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{6}C_2 - I(I+1) + \frac{1}{4}Y^2\right] = \frac{C_3}{\sqrt{C_2}}\, T_{000}^{(11)_{\gamma=1}} +$$

$$+(-1)^{\varphi}\left[\frac{\lambda\mu(\lambda+2)(\mu+2)(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+3)}{3C_2}\right]^{\frac{1}{2}} T_{000}^{(11)_{\ell=2}}, \qquad (2.15)$$

где $T^{(11)_\ell}$ операторы, приведенные матричные элементы которых равны единице. С такими же коэффициентами могут быть представлены остальные составляющие этого оператора. Ортонормированность коэффициентов КГ позволяет устранить зависимость матричных элементов скалярного оператора (I.II) от базисных индексов $Z\,I\,M$.

Таким путем находим неисчезающие матричные элементы оператора (I.II), действующего на неортонормированный базис (2.3)

$$A^{\bar{I}}_{\bar{I}} = \frac{1}{12}C_2^2 + \frac{1}{24}C_2 + \frac{1}{6}C_3\underline{Y} - \frac{1}{4}\underline{Y}^2 - \frac{1}{24}C_2\underline{Y}^2 + \frac{1}{16}\underline{Y}^4 +$$

$$+\frac{1}{8}\underline{Y}(\lambda_1-\mu_2)(\lambda_1+\mu_2+2)\left[u-\frac{1}{6}(\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu_2+6)\right]-$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\underline{Y}^2+\frac{1}{3}C_2\right)\left[(\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu+6)u+\frac{1}{12}(\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu_2+6)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\lambda_1(\lambda_1+2)-\frac{1}{2}\mu_2(\mu_2+2)+\frac{1}{4}\underline{Y}^2-1\right]+\frac{(\lambda_1-\mu_2)(\lambda_1+\mu_2+2)}{4\bar{I}(\bar{I}+1)}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{3}C_3-\frac{1}{8}\underline{Y}^3+\frac{1}{4}\underline{Y}(C_2+2)\right]\left[u-\frac{1}{6}(\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu_2+6)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\bar{I}(\bar{I}+1)\left[(\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu_2+6)u+\frac{1}{12}(\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu_2+6)^2-\right. \qquad (2.16a)$$

$$\left.-\frac{1}{2}\lambda_1(\lambda_1+2)-\frac{1}{2}\mu_2(\mu_2+2)-\frac{3}{4}\underline{Y}^2-C_2+2\bar{I}(\bar{I}+1)-1\right];$$

$$A^{\bar{I}+1}_{\bar{I}} = \Big[(\bar{I}+\underline{M}+1)(\bar{I}-\underline{M}+1)(\bar{I}-\underline{z}+1)(\bar{I}+\underline{z}+1)\times$$

$$\times(\lambda+\underline{z}-\bar{I})(\lambda+\underline{z}+\bar{I}+2)(\mu-\underline{z}-\bar{I})(\mu-\underline{z}+\bar{I}+2)\Big]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\frac{(\lambda_1+\mu_2+2\bar{I}+4)}{[(2\bar{I}+1)(2\bar{I}+3)]^{\frac{1}{2}}(\bar{I}+1)}\times\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}(\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu_2)-\bar{I}-u\right\},$$

$$A^{\bar{I}-1}_{\bar{I}} = \Big[(\bar{I}+M)(\bar{I}-\underline{M})(\bar{I}-\underline{z})(\bar{I}+\underline{z})(\lambda+\underline{z}+\bar{I}+1)\times$$

$$\times(\lambda+\underline{z}-\bar{I}+1)(\mu-\underline{z}-\bar{I}+1)(\mu-\underline{z}+\bar{I}+1)\Big]^{\frac{1}{2}}\frac{(\lambda_1+\mu_2-2\bar{I}+2)}{[(2\bar{I}+1)(2\bar{I}-1)]^{\frac{1}{2}}\bar{I}}\times$$

$$\times\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}(\lambda_1+2\mu_1+2\lambda_2+\mu_2)+\bar{I}+1-u\right\}.$$

Параметр $\bar{I}$ может быть равным 0 только при $\lambda_1=\mu_2$, поэтому расходимости в (2.I6 a) не появляются. В области (2.I3) появляются также ненулевые матричные элементы

$$A'^{\bar{I}}_{B} = W^{\bar{I}}_{B-1}A^{B-1}_{B}, \qquad (2.I7)$$

где $W^{\bar{I}}_{B-1}$ – коэффициент разложения избыточных состояний согласно формуле (2.I4) при $\bar{i}=B-1$. Таким образом действие оператора (I.II) на полный базис (2.3) можно представить как сумму матриц $A+A'$. Спектр собственных значений оператора A не меняется при перестановке $(\lambda_1\mu_1)\longleftrightarrow(\lambda_2\mu_2)$ и одновременном отражении параметра u. Что же касается перестановок типа $(\lambda_1\mu_1)\leftrightarrow(\lambda\mu)$, то спектр оператора третьей степени, входящего в A, меняется на отраженный, а спектр оператора четвертой степени (с точностью до постоянного слагаемого) остается тем же самым.

Отметим также, что решение краевых задач для изофакторов [I0, 2I] позволяет любое состояние типа

$$P^{(\lambda\mu)}_{ZIM;\,zim}\left|\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1)\\(Z_1)\,i_1m_1\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}(\lambda_2\mu_2)\\(Z_2)\,i_2m_2\end{matrix}\right\rangle \tag{2.18}$$

$$(Z=Z_1+Z_2+S\,,\quad m=m_1+m_2)$$

разложить по состояниям (2.3) и тем самым определить действия на них операторов (I.8), (I.II) и (I.4).

3. Примеры спектральных разложений и операторов $\rho_\Lambda(u)$

Случай простого спектра ряда КГ, который возникает, например, при перемножении симметрических степеней векторного представления

$$(\lambda_1\,0)\otimes(\lambda_2\,0)=\sum_{k=0}^{\min(\lambda_1,\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2-2k,k), \tag{3.1}$$

уже был рассмотрен в I,2 . Приведем полученное там разложение R -матрицы $(\Lambda_k=(\lambda_1+\lambda_2-2k,k),\ \rho_{\Lambda_0}(u)=1)$

$$R^{\lambda_1,\lambda_2}(u)=\sum_{k=0}^{\min(\lambda_1,\lambda_2)}\left(\prod_{l=0}^{k-1}\frac{u+l-\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)}{u-l+\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)}\right)P_{\Lambda_k}. \tag{3.2}$$

Кратные НП не появляются и в ряде других случаев, когда из формул (2.10) и (2.11) удается выразить отношение приведенных матричных элементов

$$\mathcal{D}_{kl}=\langle\Lambda_k\|d^{\{2\}}\|\Lambda_l\rangle/\langle\Lambda_k\|d\|\Lambda_l\rangle \tag{3.3}$$

и для определения $\rho_\Lambda(u)$ воспользоваться рекуррентным соотношением [1,2]

$$\rho_{\Lambda_k}(u)=\frac{u-\frac{1}{2}\mathcal{D}_{kl}+\frac{1}{4}(C_2(\Lambda_k)-C_2(\Lambda_l))}{u-\frac{1}{2}\mathcal{D}_{kl}-\frac{1}{4}(C_2(\Lambda_k)-C_2(\Lambda_l))}\,\rho_{\Lambda_l}(u). \tag{3.4}$$

Выделяя в прямом произведении $(\lambda_1\mu_1)\otimes(\lambda_2\,0)$ представления $(\lambda\mu)_l$ и $(\lambda'\mu')_k$, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{kl}&=\tfrac{1}{3}(\lambda+2\mu-2\lambda_2),\ (\lambda'\mu')=(\lambda-2\,\mu+1);\\ \mathcal{D}_{kl}&=\tfrac{1}{3}(\lambda-\mu-2\lambda_2)-1,\ (\lambda'\mu')=(\lambda-1\,\mu-1).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Решение для $\rho_{(\lambda\mu)}(u)$ в этом случае можно представить в виде

$$\rho_{(\lambda\mu)}(u)=\frac{\Gamma(u+\frac{1}{3}(\lambda_2-2\lambda-\mu))\,\Gamma(u+\frac{1}{3}(\lambda_2+\lambda-\mu)+1)}{\Gamma(u+\frac{1}{3}(\lambda_2-2\lambda_0-\mu_0))\,\Gamma(u+\frac{1}{3}(\lambda_2+\lambda_0-\mu_0)+1)}\times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(u+\frac{1}{3}(\lambda_2+\lambda+2\mu)+2\right)}{\Gamma\left(u+\frac{1}{3}(\lambda_2+\lambda_0+2\mu_0)+2\right)}\, \rho_{(\lambda_0\mu_0)}(u), \qquad (3.6)$$

где $(\lambda_0\mu_0)$ любое НП, входящее в ряд Клебша – Гордана

$$(\lambda_1\mu_1)\otimes(\lambda_2 0)=\sum_{l=0}^{\min(\mu_1,\lambda_2)}\ \sum_{k=0}^{\min(\lambda_1,\lambda_2-l)}(\lambda_1+\lambda_2-l-2k\,\mu_1-l+k), \qquad (3.7)$$

в частности, $\lambda_0=\lambda_1+\lambda_2,\ \mu_0=\mu_1$. При $\mu_1=0$ третий сомножитель из Γ-функций равен единице и (3.6) сводится к (3.2).

Простейший случай кратных НП встречается при умножении представления $(\lambda\mu)$, $\lambda\geqslant 1$, $\mu\geqslant 1$, $\lambda\neq\mu$ на присоединенное представление (II), когда исходное НП $(\lambda\mu)$ в ряде КГ встречается дважды

$$(\lambda\mu)\otimes(11)=(\lambda+2\,\mu-1)\oplus(\lambda+1\,\mu+1)\oplus(\lambda+1\,\mu-2)\oplus$$
$$\oplus(\lambda-1\,\mu+2)\oplus(\lambda-1\,\mu-1)\oplus(\lambda-2\,\mu+1)\oplus\sum_{r=0}^{1}{}_r(\lambda\mu). \qquad (3.8)$$

Для тех НП, которые появляются в ряде (3.8) однократно, легко получаем $\left(\Delta=\frac{1}{3}(\lambda-\mu),\ \alpha=\frac{1}{3}(\lambda+2\mu),\ \delta=\frac{1}{3}(2\lambda+\mu)\right)$

$$\rho_{(\lambda+1\,\mu+1)}(u)=1, \quad \rho_{(\lambda+2\,\mu-1)}(u)=\frac{u+\Delta-1}{u+\alpha},$$

$$\rho_{(\lambda+1\,\mu-2)}(u)=\frac{(u+\Delta-1)(u-\delta)}{(u+\alpha)(u+\alpha+2)},$$

$$\rho_{(\lambda-1\,\mu+2)}(u)=\frac{u-\delta}{u+\Delta+1}, \quad \rho_{(\lambda-1\,\mu-1)}(u)=\frac{(u-\delta-2)(u-\delta)}{(u+\delta+2)(u+\alpha)},$$

$$\rho_{(\lambda-2\,\mu+1)}(u)=\frac{(u-\delta-2)(u-\delta)}{(u+\alpha)(u+\Delta+1)}. \qquad (3.9)$$

Представление $(\lambda\mu)$ появляется в ряде (3.8) два раза. Элементы матрицы классифицирующего оператора A (2.I6) равны $\left(\bar{I}_{\pm}=\frac{1}{2}(\lambda\pm1)\right)$

$$A^{\bar{I}_+}{}_{\bar{I}_+}-A^{\bar{I}_-}{}_{\bar{I}_-}=\left(\frac{4\mu}{\lambda+1}+4\lambda+6\right)u+$$

$$+\frac{4}{3}\left(\lambda^2+2\lambda\mu+3\lambda+\mu-\frac{\mu(\mu+4)}{\lambda+1}\right),$$

$$A^{\bar{I}_+}{}_{\bar{I}_-}=\sqrt{\lambda\mu(\lambda+\mu+1)}\;\frac{2(\lambda+2)}{\lambda+1}\left(\frac{1}{3}(\mu-\lambda)+1-u\right),$$

$$A^{\bar{I}_-}{}_{\bar{I}_+}=\sqrt{\lambda\mu(\lambda+\mu+1)}\;\frac{2}{\lambda+1}\left(\frac{1}{3}(2\lambda+\mu)+2-u\right).$$

Дискриминант векового уравнения равен

$$\mathcal{D}(u)=(6c_2+9)u^2+12c_3u+c_2^2. \qquad (3.\text{I}0)$$

Условие коммутирования операторов A и ρ позволяет записать $\rho(u)$ в виде $\left(\bar{A}=A-\frac{1}{2}\operatorname{tr}A\right)$

$$\rho(u)=x_1(u)\bar{A}(u)+x_0(u), \qquad (3.\text{II})$$

$$x_1(u)=\left[2(u-\delta-2)(u-\delta)(u+\Delta+1)\right]^{-1}\rho_{(\lambda-1\mu-1)}(u), \qquad (3.\text{I}2)$$

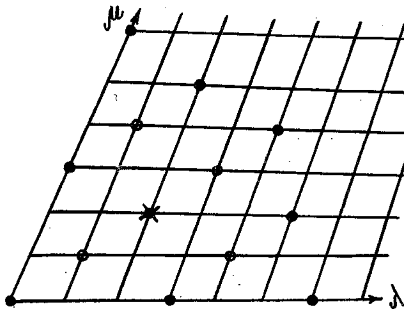
$$x_0(u)=\left(2u^3-(c_2+5)u-6c_3\right)x_1(u). \qquad (3.\text{I}3)$$

Собственные значения 2x2 матрицы $\rho_{(\lambda\mu)}(u)$ выражаются через найденные величины (3.I0), (3.I2), (3.I3)

$$\rho_{\pm}(u)=x_0(u)\pm x_1(u)\sqrt{\mathcal{D}(u)}=$$

$$=\left(\left[2u^3-(c_2+5)u-6c_3\right]\pm\sqrt{\mathfrak{D}(u)}\right)x_1(u). \tag{3.14}$$

Приведем для полноты и случай разложения $R^{\Lambda\Lambda}(u)$ при $\Lambda=(22)$, когда кратность Λ в ряде КГ $(22)\otimes(22)$ равна трем.



На диаграмме старших весов НП кратности один отмечены , кратности два ○ , кратности три ✱ . Ряд Клебша – Гордана

$$(22)\otimes(22)=(44)\oplus(52)\oplus(60)\oplus(30)\oplus(00)\oplus(03)\oplus$$
$$\oplus(06)\oplus(25)\oplus\sum_{r=0}^{1}\left\{(33)_r\oplus(41)_r\oplus(14)_r\oplus(11)_r\right\}\oplus\sum_{r=0}^{2}(22)_r. \tag{3.15}$$

Простые НП $(\rho_{(00)}(u)=1)$:

$$\rho_{(30)}(u)=\rho_{(03)}(u)=\frac{(u+1)(u-2)(u+4)}{(u-1)(u+2)(u-4)},$$
$$\rho_{(44)}(u)=\frac{(u+1)(u+2)(u+4)(u+5)}{(u-1)(u-2)(u-4)(u-5)}, \tag{3.16}$$
$$\rho_{(60)}(u)=\rho_{(06)}(u)=\frac{(u+4)(u+5)}{(u-4)(u-5)},\ \rho_{(52)}(u)=\rho_{(25)}(u)=\frac{u-2}{u+2}\rho_{(44)}(u).$$

НП кратности два: (11),(41),(14),(33). Связь (3.13) коэффициентов $x_1(u)$ и $x_0(u)$ в формуле (3.11) и в данном случае позволяет предположить справедливость общего соотношения

$$x_0(u)=\Big(2u^3-\tfrac{1}{2}\left[c_2(\lambda_1\mu_1)+c_2(\lambda_2\mu_2)+c_2(\lambda\mu)+4\right]u-$$
$$-6c_3(\lambda_1\mu_1)+6c_3(\lambda_2\mu_2)\Big)x_1(u), \tag{3.17}$$

где НП $(\lambda\mu)$ имеет кратность два в разложении КГ $(\lambda_1\mu_1)\otimes(\lambda_2\mu_2)$.

Учитывая это, приведем только матрицы $A(u)$ и коэффициенты $x_1(u)$:

$(\lambda\mu)=(11)$

$$A_1^1-A_0^0=2(9u+8),\ A_0^1=4\sqrt{3}(2-u);\ A_1^0=2\sqrt{3}(4-u),$$

$$\mathcal{D}(u)=\det\bar{A}(u)=105u^2+256,\ x_1(u)=[2(u-1)(u-4)(u+2)]^{-1}\rho_{(00)}(u); \tag{3.18}$$

$(\lambda\mu)=(41),(14)$

$$A_2^2-A_1^1=4(9u+5), A_1^2=10\sqrt{3}(1-u),\ A_2^1=2\sqrt{3}(5-u),$$

$$\mathcal{D}(u)=16(24u^2+25),\ x_1(u)=[2(u-5)(u-2)(u+1)]^{-1}\rho_{(30)}(u); \tag{3.19}$$

$(\lambda\mu)=(33)$

$$A_2^2-A_1^1=4(9u+2),\ A_1^2=-6u\sqrt{15},\ A_2^1=8\sqrt{\tfrac{3}{5}}(5-u),$$

$$\mathcal{D}(u)=25(9u^2+64),\ x_1(u)=[2(u+2)^2(u+5)]^{-1}\rho_{(44)}(u). \tag{3.20}$$

Неприводимое представление (22) имеет кратность три. Соответствующие матрицы $A(u)$ (бесследовая) и $\rho_{(22)}(u)$:

$$A_0^0=-8(3u+2),\ A_1^1=-2(3u+5),\ A_2^2=2(15u+13),\ A_0^1=\frac{32}{\sqrt{3}}(2-u),$$

$$A_1^2=10\sqrt{\tfrac{5}{3}}(1-u),\ A_0^2=A_2^0=0,\ A_1^0=\frac{16}{\sqrt{3}}(4-u),$$

$$A_2^1=2\sqrt{\tfrac{5}{3}}(5-u);$$

$$\rho_{(22)}(u)=[8(u-5)(u-4)(u^2-4)(u^2-1)]^{-1}\{A^2(u)+4(u^3-u^2-$$

$$-12u+4)A(u)+8(u^6-u^5-25u^4+17u^3+92u^2-108u-144)\}. \tag{3.21}$$

Важное свойство R-матрицы - "унитарность": $R(u)R(-u)=1$ при $(\lambda\mu)=(11)$ в (3.8), как легко видеть, имеет место для собственных значений (3.9), отвечающих НП кратности один. Для НП кратности два можно проверить, что найденная матрица $\rho_{(11)}(u)$ не унитарна. Однако ее собственные значения $\rho_\pm(u)=x_0(u)\pm$ $\pm x_1(u)\sqrt{\mathcal{D}(u)}$ удовлетворяют свойству "унитарности".

Литература

1. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu., Sklyanin E.K. Lett.Math.Phys., 1981, v.5, p.393-400.

2. К у л и ш П.П., Р е ш е т и х и н Н.Ю. Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1982, т.120, с.92-121.
3. S h a r p R.T. Jour.Math.Phys.,1975,v.16,N 10, p.2050-2053.
4. А л и ш а у с к а с С.И. ЭЧАЯ, 1983, т.14, в.6, с.1336-1379.
5. M o s h i n s k y M. Jour.Math.Phys.,1963, v.4, N 5, p.1128--1131.
6. C h e w C.K., S h a r p R.T. Can.Jour.Phys.,1966, v.44, p.2789-2791.
7. R e s n i k o f f M. Jour.Math.Phys.,1967,v.8,N 1, p.63-79.
8. П л у х а р ж З., С м и р н о в Ю.Ф., Т о л с т о й В.Н. Развитие аппарата SU(3) симметрии. - Препринт Карлова университета, Прага, 1981.
9. Г у с е в а И.С., С м и р н о в Ю.Ф., Т о л с т о й В.Н., Х а р и т о н о в Ю.И. Коэффициенты Клебша - Гордана группы SU(3). 2. - Препринт ЛИЯФ - 837, Ленинград, 1981, 33 с.
10. А л и ш а у с к а с С.И. Лит.физ.сб.,1978, т.18, № 6,с.701--713.
11. Г у с е в а И.С., С м и р н о в Ю.Ф., Т о л с т о й В.Н., Х а р и т о н о в Ю.П. Коэффициенты Клебша - Гордана группы SU(3). 1. - Препринт ЛИЯФ - 678, Ленинград, 1081, 31 с.
12. А л и ш а у с к а с С.И. Лит.физ.сб., 1972,т.12, №5,721-729.
13. Г е л ь ф а н д И.М., Ц е т л и н. Докл.АН СССР,1950, т.71, с.825-831.
14. E n g e l a n d T. Nucl.Phys., 1965, v.72, p.68-71.
15. V e r g a d o s J.B. Nucl.Phys., 1968, v.111, p.681-691.
16. Ф и л и п п о в Г.Ф., О в ч а р е н к о В.И., С м и р н о в Ю.Ф. Микроскопическая теория коллективных возбуждений атомных ядер. Киев: Наукова думка, 1981.
17. А л и ш а у с к а с С.И., Н о р в а й ш а с Э.З. Лит. физ.сб., 1979, т.19, № 7, с.623-631.
18. K u r i y a n J.G., L u r i e D., M a c f a r l a n e A.J. Jour.Math.Phys., 1965, v.6, N 5, p.722-733.
19. B a i r d E., B i e d e n h a r n L., Jour.Math.Phys., 1965, v.6, N 10, p.1847.
20. А л и ш а у с к а с С.И. Лит.физ.сб., 1969, т.9, с.641-651.
21. А л и ш а у с к а с С.И. Лит.физ.сб., 1982, т.22,№2,с.13-21.
22. B i e d e n h a r n L.C., L o u c k J.D. Jour.Math.Phys., 1972, v.13, N 10, p.1985-1991; ibid, 1977, v.18, N 9, p.1883-1891.