Н.В.Смородина

УСЛОВИЯ ГЛАДКОСТИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ L_p-НОРМЫ ГАУССОВСКОГО ВЕКТОРА

В работе дано доказательство одного результата, анонсированного в [I]. Именно, пусть (Ω, μ) - измеримое пространство с σ-конечной мерой μ, $B = L_p(\Omega, \mu)$, P - гауссовская мера в B. Мы предполагаем, что $p \geqslant 2$ и что B сепарабельно. Для $\alpha > 0$ положим

$$f_\alpha(x) = \|x\|_p^\alpha = \left(\int |x(t)|^p \mu(dt)\right)^{\alpha/p}, \; x \in B.$$

и обозначим через $\mathcal{P}_\alpha$ распределение случайной величины f_α на вероятностном пространстве (B, P) (образ P при отображении f_α).

ТЕОРЕМА. Пусть $K \geqslant 1$ - целое число. Предположим, что I) $p \geqslant K+1$ или p четно; 2) размерность топологического носителя меры строго больше, чем

$$\begin{array}{ll} 2K(p-1) & \text{если } \alpha \leqslant p \\ K(\alpha+p-2) & \text{если } \alpha > p \end{array}$$

Тогда $\mathcal{P}_\alpha$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега m. Далее, при $K \geqslant 2$ плотность $q_\alpha = d\mathcal{P}_\alpha / dm$ - функция класса $C_b^{K-2}(R)$, производная $q_\alpha^{(K-2)}$ - абсолютно непрерывная функция, а производная $q_\alpha^{(K-1)}$, определенная почти всюду - функция ограниченной вариации. При $K = 1$ плотность q_K - функция ограниченной вариации.

Близкие по форме результаты получены Т.Виноградовой [2] и А.Углановым [3]. Однако все они относятся к пространству l_p с весьма сильным ограничением на меру P: она представляется в виде $P = P_1 * P_2$, где носитель меры P_1 совпадает с линейной оболочкой некоторого конечного числа $m = m(K)$ векторов вида $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$.

Мы будем придерживаться обозначений книги Го [4]: B^* и H - пространства, соответственно, линейных непрерывных и линейных измеримых функционалов на B, $i: H \to B$ - естественное вложение, $i^*: B^* \to H$ - сопряженный к i оператор. Гильбертово пространство H стандартным образом порождается скалярным произведением $\langle\ \rangle$, определяемым ковариационным оператором S меры P:

$\langle x_1^*, x_2^* \rangle = (x_1^*, S x_2^*)$, $x_1^*, x_2^* \in B^*$ (см.также [5]). Здесь $(\ )$ – билинейная форма, задающая двойственность B и B^*.

Мы получим сформулированную выше теорему как следствие общего результата о гладкости плотности – теоремы 2 из [6]. Подходящий дифференциальный оператор (см. теорему I и предложение 2 в [6]) зададим формулой $Dg = \langle g', K \rangle$, где K – векторное поле, определяемое соотношением

$$K(x) = \|x\|_p^p f_\alpha'(x) = \|x\|_p^p i^*(\nabla f_\alpha(x))$$

(вдоль поля K функция f_α, конечно же, должна достаточно быстро меняться – отсюда пропорциональность градиенту; множитель $\|x\|_p^p$ выбран для удобства).

Для $x \in B$ имеем

$$(\nabla f_\alpha(x))(t) = \alpha \|x\|_p^{\alpha - p} |x_t|^{p-1} \operatorname{sign}(x_t).$$

Векторное поле $x \mapsto i^*(\alpha |x.|^{p-1} \operatorname{sign}(x.))$ обозначим через $\widetilde{K}$. Тогда $Df(x) = \|x\|_p^\alpha |\widetilde{K}|^2$. Условие I,2 теоремы 2 из [6] выполняются очевидным образом. Основную трудность представляет доказательство конечности интеграла

$$\int (Df)^{-K-r_1-\ldots-r_K} (D^2 f)^{r_1} \ldots (D^{K+1} f)^{r_K} d\mu_i \tag{I}$$

где μ_i – i-я D-производная меры P в смысле [6], а коэффициенты $r_1, \ldots, r_K$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{j=1}^{K} j r_j = K - i. \tag{2}$$

Оценим сначала величины $D^i f$. Имеем

$$|D^i f| \leqslant M_j \|x\|_p^\alpha |\widetilde{K}|^2 \sum_{z=0}^{j-1} \|x\|_p^{pz} |\widetilde{K}|^{2(j-1-z)} \tag{3}$$

где функция M_j имеет моменты всех порядков. Действительно, чтобы получить $D^i f$, мы должны $j-1$ раз применить оператор D к функции $Df = \|x\|_p^\alpha |\widetilde{K}|^2$. При этом на каждом шаге мы получим сумму произведений степени нормы $\|x\|_p$ на некоторую комбинацию из $\widetilde{K}$ и его производных. При применении оператора D к степени нормы $D\|x\|_p^\beta = \beta \|x\|_p^\beta |\widetilde{K}|^2$ появляется новый сомножи-

тель $|\widetilde{K}|^2$, а при применении D к комбинации из $\widetilde{K}$ и его производных - сомножитель $\|x\|_p^p$. Замечая, что нормы поля $\widetilde{K}$ и всех его производных имеют моменты любого порядка, получаем (3).

Аналогичным образом можно показать справедливость оценки

$$\left|\frac{d\mu_i}{dP}\right| \leqslant M_i \sum_{z=0}^{i} \|x\|_p^{pz} |\widetilde{K}|^{2(i-z)}. \tag{4}$$

Используя (2),(3) и (4), получаем

$$\left|(Df)^{-k-\eta_1-\ldots-\eta_k}(D^2 f)^{\eta_i}\ldots(D^{k+1}f)^{\eta_k}\frac{d\mu_i}{dP}\right| \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{z=0}^{k} \|x\|_p^{-\alpha k+pz} |\widetilde{K}|^{-2z} \tag{5}$$

где функция M имеет все моменты.

ЛЕММА. Пусть d - размерность топологического носителя меры P. Тогда для любого $l \geqslant 1$

1) $\|\cdot\|_p^{-1} \in L_l(B,P)$, если $d > l$;

2) $|\widetilde{K}|^{-1} \in L_p(B,P)$, если $d > l(p-1)$

Прежде чем переходить к доказательству леммы, покажем, что из нее и оценки (5) вытекает конечность интегралов (I), а, тем самым, и утверждение теоремы. В случае $\alpha \leqslant p$ это очевидно, т.к. у всех слагаемых показатель степени у $\|x\|_p$ положителен и поэтому для интегрируемости правой части (5) достаточно, чтобы выполнялось неравенство $d > 2k(p-1)$. В случае $\alpha > p$, применяя неравенство Гельдера, получаем, что для интегрируемости правой части (5) достаточно, чтобы при всех $z = 0,\ldots,k$ выполнялось неравенство $d > \alpha k - pz + 2z(p-1) = \alpha k + (p-2)z$. Т.о. d должно быть больше $k(\alpha + p - 2)$, что и предполагается в условии теоремы.

Перейдем к доказательству леммы. Утверждение I) очевидно. Докажем п.2). Пусть $\{h_j\}$ - некоторый ортогонмированный базис в H, состоящий из элементов $i^* B^*$. По условию число векторов в этом базисе строго больше $m = l(p-1)$. Положим $\gamma_j(\cdot) = (ih_j)(\cdot) \in B$. Условимся в дальнейшем функцию $z \mapsto |z|^{p-1}\operatorname{sign}(z)$ обозначать просто z^{p-1}. Тогда имеем

$$|\widetilde{K}|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{m} \langle \widetilde{K}, h_k\rangle^2 = \alpha^2 \sum_{k=1}^{m} \left(\int x^{p-1}(t)\gamma_k(t)\mu(dt)\right)^2$$

Рассмотрим случайный элемент пространства B вида

$$\sum_{k=1}^{m}\langle x,h_k\rangle i h_k=\sum_{k=1}^{m} y_k \gamma_k(\cdot)\in B$$

Из ортонормированности системы $\{h_j\}$ вытекает, что $\{y_k\}_{k=1}^{m}$ -ортогауссовский вектор, а случайный элемент $a=a(\cdot)$ пространства B вида $a=x-\sum_{k=1}^{m}\langle x,h_k\rangle i h_k$ не зависит от $y_1,\dots,y_m$

Пусть $\mathfrak{M}$ - σ -алгебра, порожденная случайными величинами $\langle\cdot,h_{m+1}\rangle,\langle\cdot,h_{m+2}\rangle,\dots$ Имеем

$$E|\tilde{K}|^{-l}\leqslant \alpha^{-l}E\Big(\sum_{k=1}^{m}\Big(\int x^{p-1}(t)\gamma_k(t)\mu(dt)\Big)^2\Big)^{-l/2}=$$

$$=\alpha^{-l}E\Big\{E\Big(\sum_{k=1}^{m}\Big(\int x^{p-1}(t)\gamma_k(t)\mu(dt)\Big)^2\Big)^{-l/2}\,|\,\mathfrak{M}\Big\}=$$

$$=\alpha^{-l}E\Big\{E\Big(\sum_{k=1}^{m}\Big(\int\Big(\sum_{j=1}^{m}y_j\gamma_j(t)+a(t)\Big)^{p-1}\gamma_k(t)\mu(dt)\Big)^2\Big)^{-l/2}\,|\,\mathfrak{M}\Big\}. \tag{6}$$

Отметим, что $a(\cdot)$ измеримо относительно $\mathfrak{M}$. Положим

$$A=\sum_{k=1}^{m}\Big(\int\Big(\sum_{j=1}^{m}y_j\gamma_j(t)+a(t)\Big)^{p-1}\gamma_k(t)\mu(dt)\Big)^2$$

и оценим внутреннее математическое ожидание в (6) константой, не зависящей от условия. Для этого найдем на аффинном подпространстве $L=\{\sum_{j=1}^{m}z_j\gamma_j(\cdot)+a(\cdot)\,|\,z_j\in R^1,\ j=1,\dots,m\}$ вектор b , на котором достигается минимум нормы: $\|b\|_p=\min_{x\in L}\|x\|_p$. Тогда, как легко понять, для $j=1,\dots,m$

$$\int b^{p-1}(t)\gamma_j(t)\mu(dt)=0$$

а вектор $a(\cdot)-b(\cdot)$ лежит в $L-a$, т.е.

$$a(\cdot)-b(\cdot)=\sum_{j=1}^{m}\check{v}_j\gamma_j(\cdot),\ \check{v}_j\in R^1.$$

Имеем

$$A=\sum_{k=1}^{m}\Big(\int\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m}(y_j+\check{v}_j)\gamma_j(t)+b(t)\Big)^{p-1}-b^{p-1}(t)\Big]\gamma_k(t)\mu(dt)\Big)^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\Big(\int\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m}\xi_j\gamma_j(t)+b(t)\Big)^{p-1}-b^{p-1}(t)\Big]\gamma_k(t)\mu(dt)\Big)^2$$

где $\{\xi_1,\dots,\xi_m\}$ – гауссовский вектор с единичной матрицей ковариаций и средним $\check{v}=\{\check{v}_1,\dots,\check{v}_m\}$. Положим

$$\Phi_{m,\check{v}}(u)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\|u-\check{v}\|^2\right\},\quad \psi_i=\frac{u_i}{\|u\|}.$$

Тогда

$$E\left\{A^{-\frac{l}{2}}|\mathfrak{M}\right\}=\int\left\{\sum_{k=1}^{m}\left[\int\left(\left(\sum_{j=1}^{m}u_j\gamma_j(t)+b(t)\right)^{p-1}-b^{p-1}(t)\right)\gamma_k(t)\mu(dt)\right]^2\right\}^{-\frac{l}{2}}\Phi_{m,\check{v}}(u)du=$$

$$=\int\|u\|^{-l(p-1)}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left[\int\left(\left(\sum_{j=1}^{m}\psi_j\gamma_j(t)+\frac{b(t)}{\|u\|}\right)^{p-1}-\left(\frac{b(t)}{\|u\|}\right)^{p-1}\right)\gamma_k(t)\mu(dt)\right]^2\right\}^{-\frac{l}{2}}\cdot$$

$$\cdot\Phi_{m,\check{v}}(u)du=\int\|u\|^{-l(p-1)}R^{-1}(u,b)\Phi_{m,\check{v}}(u)du.$$

Из последнего соотношения вытекает, что для доказательства конечности интеграла (6) достаточно показать, что

$$\inf_{\substack{u\in R^m\\ b\in B}}R(u,b)=\tau>0 \tag{7}$$

По неравенству Гельдера имеем

$$R^{\frac{2}{l}}(u,b)=\sum_{k=1}^{m}\left(\int\left[\left(\sum_{j=1}^{m}\psi_j\gamma_j(t)+\frac{b(t)}{\|u\|}\right)^{p-1}-\left(\frac{b(t)}{\|u\|}\right)^{p-1}\right]\gamma_k(t)\mu(dt)\right)^2\geqslant$$

$$\geqslant\left|\sum_{k=1}^{m}\int\left[\left(\sum_{j=1}^{m}\psi_j\gamma_j(t)+\frac{b(t)}{\|u\|}\right)^{p-1}-\left(\frac{b(t)}{\|u\|}\right)^{p-1}\right]\gamma_k(t)\mu(dt)\psi_k\right|=$$

$$=\left|\int\left[\left(\sum_{j=1}^{m}\psi_j\gamma_j(t)+\frac{b(t)}{\|u\|}\right)^{p-1}-\left(\frac{b(t)}{\|u\|}\right)^{p-1}\right]\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(t)\psi_k\mu(dt)\right|$$

Пользуясь теперь монотонностью функции $z\longmapsto z^{p-1}=|z|^{p-1}\operatorname{sign}(z)$ и неравенством $|(y+z)^{p-1}-y^{p-1}|\geqslant|z|^{p-1}/2^{p-2}$, получаем

$$R^{\frac{2}{l}}(u,b)\geqslant\int\left|\left(\sum_{j=1}^{m}\psi_j\gamma_j(t)+\frac{b(t)}{\|u\|}\right)^{p-1}-\left(\frac{b(t)}{\|u\|}\right)^{p-1}\right|\left|\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(t)\psi_k\right|\mu(dt)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2^{p-2}}\int\left|\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(t)\psi_k\right|^p\mu(dt).$$

Так как $\inf\limits_{\|\psi\|=1}\int\left|\sum\limits_{k=1}^{m}\gamma_k(t)\psi_k\right|^p\mu(dt)>0$, (7), а вместе с ним и утверждение леммы, полностью доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. С м о р о д и н а Н.В. Условия гладкости плотностей распределений функционалов от случайных процессов. Тезисы докладов Четвертой международной вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1985. Т.3, с.143-145.
2. В и н о г р а д о в а Т.Р. Оценки скорости сходимости в предельных теоремах. Автореф.канд.дисс. Москва, 1985.
3. У г л а н о в А.В. Интегрирование на банаховых многообразиях и его приложения к теории случайных процессов. Тезисы докладов I Всемирного конгресса общества математической статистики и теории вероятностей имени Бернулли. Ташкент, 1986, Т.2, с.878.
4. Г о Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979. 176 с.
5. В а х а н и я Н.Н., Т а р и е л а д з е В.И., Ч о б а н я н С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука", 1985. 368 с.
6. С м о р о д и н а Н.В. Дифференциальное исчисление на измеримых пространствах и условия гладкости плотностей распределений случайных величин. Доклады АН СССР, 1986.
7. I k e d a N., W a t a n a b e S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland/Kodansha 1981, 464 p.