A. R. Mirotin, Compact Hankel operators over compact Abelian groups,
Algebra i Analiz, 2021, Volume 33, Issue 3, 191–212

Алгебра и анализ
Том 33 (2021), №3

КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГАНКЕЛЯ НАД КОМПАКТНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ГРУППАМИ

© А. Р. МИРОТИН

Рассматривается связная компактная абелева группа G с линейно упорядоченной группой характеров. На основе описания структуры компактных операторов Ганкеля над G получены обобщения классических теорем Кронекера, Хартмана, Пеллера и Адамяна–Арова–Крейна. Установлено также обобщение теоремы Бёрлинга об инвариантных подпространствах. Даны приложения к операторам Ганкеля над дискретными группами.

Введение

Как известно, пространство Харди H^2 на окружности является одной из наиболее удобных реализаций сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства. Операторы Ганкеля в этих пространствах, их различные реализации и аналоги активно изучались и нашли важные приложения, в том числе к теории функций, теории операторов, теории случайных процессов, теории рациональных приближений и теории управления (см., например, [1–4]). Изучались также многочисленные обобщения этих операторов (см. [3–17] и обзор в [3, с. 195–204]), и обобщения тесно связанных с ними операторов Тёплица и операторов Винера–Хопфа (см. [5–7] и библиографию там).

Если классические ганкелевы операторы действуют в сепарабельных гильбертовых пространствах, то обобщенные операторы Ганкеля, рассматриваемые в данной работе, определены в гильбертовых пространствах, которые не обязаны быть сепарабельными, в частности, в пространствах $H^2(G)$, где G есть нетривиальная связная компактная абелева группа с (дискретной) группой характеров X. Известно [15], что группа характеров X связной (и только связной) компактной абелевой группы может

Ключевые слова: компактная абелева группа, линейно упорядоченная абелева группа, оператор Ганкеля, компактный оператор, оператор конечного ранга, класс Шаттена–фон Неймана, сингулярное число, инвариантное подпространство.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь.

быть наделена линейным порядком, согласованным со структурой группы, и не имеет кручения (см., например, [14]). При этом линейный порядок в X, вообще говоря, не единственен. Ниже мы предполагаем, что такой порядок выбран и фиксирован. Это равносильно тому, что в группе X выделена подполугруппа X_+ (положительный конус), содержащая единичный характер 1 и такая, что $X_+ \cap X_+^{-1} = \{1\}$ и $X = X_+ \cup X_+^{-1}$. При этом полугруппа X_+ индуцирует в X линейный порядок, согласованный со структурой группы, по правилу $\xi \leqslant \chi := \chi\xi^{-1} \in X_+$. Ясно, что $X_+ = \{\chi \in X : \chi \geqslant 1\}$. Далее мы положим $X_- := X \setminus X_+$ $(= X_+^{-1} \setminus \{1\})$.

В приложениях в роли X часто выступают подгруппы аддитивной группы $\mathbb{R}^n$, наделенные дискретной топологией, так что G является боровской компактификацией группы X (см, например, [7] и цитированную там литературу). В частности, в качестве X можно взять группу $\mathbb{Z}^n$, наделенную лексикографическим порядком. В этом случае X имеет наименьший положительный элемент, а $G = \mathbb{T}^n$ — n-мерный тор. (Отметим, что описание всех линейных порядков на группе $\mathbb{Z}^n$ дано в [8,9].) Другими интересными примерами могут служить бесконечномерный тор $\mathbb{T}^\infty$ (см. [6, пример 3], где в этом случае указан линейный порядок на X, при котором существует наименьший положительный элемент), боровский компакт (группа характеров группы $\mathbb{R}$, наделенной дискретной топологией и естественным порядком), а также группы характеров аддитивной группы $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и мультипликативной группы $\mathbb{Q}_{>0}$ положительных рациональных чисел, наделенных дискретной топологией и естественным порядком. В последних трех примерах X не имеет наименьшего положительного элемента. (В случае группы $\mathbb{Q}_{>0}$ под положительными элементами понимаются рациональные числа, большие 1, а G есть бесконечномерный тор $\mathbb{T}^\infty$. Таким образом, в группе характеров группы $\mathbb{T}^\infty$ имеется как линейный порядок с наименьшим положительным элементом [6, пример 3], так и линейный порядок без оного.)

Данная работа продолжает цикл работ автора и его учеников [10–13]. Используя другой подход, чем в [10–13], мы для операторов Ганкеля в пространствах H^2 на компактных абелевых группах доказываем обобщения классических теорем Кронекера и Хартмана (дающих, соответственно, критерии конечномерности и компактности операторов Ганкеля в пространствах H^2 на окружности), сняв ограничения на оператор, наложенные в этих работах. Кроме того, для рассматриваемых операторов Ганкеля мы устанавливаем обобщения классических теорем Пеллера и Адамяна–Арова–Крейна, дающих, соответственно, критерий принадлежности оператора классам Шаттена–фон Неймана и выражение для сингулярных чисел компактного ганкелева оператора. Эти результаты опираются на редукцию компактных операторов Ганкеля над произвольными компактными абелевыми группами с линейно упорядоченной группой характеров к операторам Ганкеля над группой окружности $\mathbb{T}$. Показано, что для компактного ганкелева оператора на группе символ фактически факторизуется через первый положительный характер, что сводит общий случай к случаю окружности. Тем самым, выясняется исключительная роль группы $\mathbb{T}$ в этом круге вопросов. Получено также обобщение теоремы Бёрлинга об инвариантных подпространствах, дополняющее известный результат Хелсона–Лауденслегера.

Резюмируя основные результаты работы можно сказать, что такие фундаментальные факты классического анализа на группе окружности как теорема Бёрлинга об инвариантных подпространствах, наличие конечных произведений Бляшке, теоремы Кронекера, Хартмана, Пеллера и Адамяна–Арова–Крейна сохраняются для абелевых компактных связных групп (с фиксированным линейным порядком на двойственной группе) тогда и только тогда, когда в двойственной группе имеется первый положительный элемент.

Работа завершается приложениями полученных результатов к операторам Ганкеля над дискретными абелевыми группами.

§1. Операторы Ганкеля над компактными абелевыми группами

Если в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1, то через X^i будем обозначать (бесконечную циклическую) подгруппу группы X, порожденную этим элементом (см. [6, теорема 2]). Следующая лемма доказана в [13].

Лемма 1.1. *Пусть в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1.*

1) *Множество $X_+ \setminus X^i$ есть идеал полугруппы X_+;*
2) *для любого $k \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $\chi_1^k(X_+ \setminus X^i) = X_+ \setminus X^i$.*

Определение 1.2. *Пространство Харди $H^p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, над G* определяется следующим образом (см., например, [14]):

$$H^p(G) = \{f \in L^p(G) : \widehat{f}(\chi) = 0\ \forall \chi \in X_-\},$$

где $\widehat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$. Норма в $L^p(G)$ (и в $H^p(G)$) будет обозначаться $\|\cdot\|_p$.

Ортогональное дополнение подпространства $H^2(G)$ пространства $L^2(G)$ обозначим через $H^2_-(G)$. Тогда

$$H^2_-(G) = \big\{f \in L^2(G) : \widehat{f}(\chi) = 0\ \forall \chi \in X_+\big\}.$$

Множество X_+ есть ортонормированный базис пространства $H^2(G)$, а X_- — ортонормированный базис пространства $H^2_-(G)$ (гильбертова размерность этих пространств равна мощности множества X). Через P_+ и P_- мы будем обозначать ортопроекторы из $L^2(G)$ на $H^2(G)$ и $H^2_-(G)$ соответственно. Нормированная мера Хаара группы G будет обозначаться через dx.

Отметим, что группы X, для которых X_+ содержит наименьший элемент, описаны в [5, лемма 3.2].

Определение 1.3. Пусть $\varphi \in L^2(G)$. *Оператором Ганкеля (ганкелевым оператором) над* G *с символом* φ назовем оператор $H_\varphi\colon H^2(G) \to H^2_-(G)$, определяемый равенством

$$H_\varphi = P_- M_\varphi,$$

где $M_\varphi\colon f \mapsto \varphi f$ — оператор умножения на φ.

Лемма 1.4. $H_\varphi = H_{P_-\varphi}$ *при* $\varphi \in L^2(G)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $H_\psi = 0$ при $\psi \in H^2(G)$. Но если $\psi, f \in H^2(G)$, то их разложения в ряд Фурье имеют вид

$$\psi = \sum_{\chi \in X_+} a_\chi \chi, \quad f = \sum_{\xi \in X_+} b_\xi \xi,$$

где $(a_\chi), (b_\xi) \in \ell^2(X_+)$. Поэтому

$$\psi f = \sum_{\chi \in X_+} \sum_{\xi \in X_+} a_\chi b_\xi \chi \xi,$$

причем

$$\sum_{\chi \in X_+} \sum_{\xi \in X_+} |a_\chi b_\xi|^2 = \Big(\sum_{\chi \in X_+} |a_\chi|^2 \Big) \Big(\sum_{\xi \in X_+} |b_\xi|^2 \Big) < \infty.$$

Так как $\chi\xi \in X_+$ в разложении ψf, то $\psi f \in H^2(G)$, что и завершает доказательство леммы. □

В статье [10, с. 141] определены пространства $BMO(G)$ и показано, что если в группе X существует наименьший положительный элемент, то при $\varphi \in L^2(G)$ оператор H_φ ограничен тогда и только тогда, когда $P_-\varphi \in BMO(G)$ (и, в частности, он ограничен, если $\varphi \in L^\infty(G)$), и это равносильно тому, что $H_\varphi = H_g$ для некоторой функции g, ограниченной на G (см. там же, следствие 2).

Для доказательства обобщенной теоремы Адамяна–Арова–Крейна нам понадобится обобщение теоремы Нехари для операторов Ганкеля на группах. Отметим, что теорема Нехари для ганкелевых форм на абелевы группы была перенесена Вонгом [16].

Пусть k — функция на X_+. *Ганкелевой формой* на X_+ с ядром k называют комплексную билинейную форму вида

$$A(a,b)=\sum_{\mu,\nu\in X_+} k(\mu\nu)a(\mu)b(\nu), \tag{1.1}$$

где a,b — функции на X_+.

Теорема Нехари–Вонга (см. [16])**.** *Ганкелева форма* (1.1) *ограничена на $\ell^2(X_+)$ тогда и только тогда, когда ее ядро имеет вид $k(\chi)=\widehat{\varphi}(\overline{\chi})$, $\chi\in X_+$, где $\varphi\in L^\infty(G)$. При этом $\|\varphi\|_\infty\leqslant M$, где M — константа ограниченности формы A. В частности, норма формы A равняется $\|\varphi\|_\infty$ для некоторой функции φ, удовлетворяющей указанным выше условиям.*

Доказательство. [1] Достаточность непосредственно следует из вида ядра и неравенства $\|\varphi\|_\infty\leqslant M$. Действительно, пусть функции a и b на X_+ имеют единичную $\ell^2(X_+)$-норму. Тогда по теореме Платншереля функции $\alpha,\beta\in H^2(G)$, определяемые с помощью сходящиеся рядов

$$\alpha(x)=\sum_{\mu\in X_+} a(\mu)\mu(x),\ \ \beta(x)=\sum_{\nu\in X_+} b(\nu)\nu(x),$$

имеют единичную L^2-норму. Поэтому

$$\begin{aligned}|A(a,b)|&=\left|\sum_{\mu,\nu\in X_+}\int\limits_G\varphi(x)(\mu\nu)(x)\,dx a(\mu)b(\nu)\right|\\&=\left|\int\limits_G\varphi(x)\alpha(x)\beta(x)\,dx\right|\leqslant\|\varphi\|_\infty\|\alpha\|_2\|\beta\|_2\leqslant M.\end{aligned}$$

Докажем теперь необходимость. Пусть A — ганкелева форма на $\ell^2(X_+)$ с ядром k, ограниченная константой M. Покажем, что для любой функции $g\in H^1(G),\widehat{g}(1)\neq 0$ ряд

$$\sum_{\chi\in X_+} k(\chi)\widehat{g}(\chi) \tag{1.2}$$

сходится. Действительно, (см. [14], теорема 8.4.4) существуют такие $\alpha,\beta\in H^2(G)$, что $g=\alpha\beta$ и $\|\alpha\|_2=\|\beta\|_2=\|g\|_1^{1/2}$. Обозначим преобразования Фурье функций α и β через a и b соответственно. Тогда по теореме Планшереля

$$\sum_{\mu\in X_+}|a(\mu)|^2=\sum_{\nu\in X_+}|b(\nu)|^2=\|g\|_1,$$

[1] Доказательство необходимости в [16] содержит пробел, который мы устраняем.

$\widehat{g} = a * b$, а потому ряд (1.2) сводится к $A(a, b)$ и, следовательно, сходится. В случае $\widehat{g}(1) \neq 0$ определим $\Lambda(g)$ как сумму этого ряда. Имеем

$$|\Lambda(g)| = |A(a, b)| \leqslant M\|a\|_2\|b\|_2 = M\|g\|_1. \tag{1.3}$$

Пусть теперь $g \in H^1(G), \widehat{g}(1) = 0$. Тогда существует представление $g = g_1 - g_2$, где $g_i \in H^1(G), \widehat{g_i}(1) \neq 0$ (например, $g = (g+1) - 1$). В этом случае положим $\Lambda(g) = \Lambda(g_1) - \Lambda(g_2)$. Легко видеть, что это определение корректно, и мы получаем линейный функционал на $H^1(G)$. Более того, из представления $g = (g + \varepsilon) - \varepsilon$ (ε — любое положительное число) с учетом (1.3) вытекает, что

$$|\Lambda(g)| \leqslant |\Lambda(g + \varepsilon)| + |\Lambda(\varepsilon)| \leqslant M\|g\|_1 + \varepsilon(M + |\Lambda(1)|),$$

откуда в силу произвольности ε следует, что Λ является ограниченным функционалом с нормой, не превосходящей M. По теореме Хана–Банаха существует сохраняющее норму расширение Λ на $L^1(G)$, которое, как известно, задается некоторой функцией $\varphi \in L^\infty(G)$ по формуле

$$\Lambda(g) = \int\limits_G \varphi(x)g(x)\,dx, g \in L^1(G), \tag{1.4}$$

причем $\|\varphi\|_\infty = \|\Lambda\| \leqslant M$. Следовательно, $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|A\|$. Из (1.4) при $g = \chi$ получаем равенство $k(\chi) = \widehat{\varphi}(\overline{\chi})$. В свою очередь, из него следует, что $\|A\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$ (см. выше доказательство достаточности). □

Версия теоремы Нехари–Вонга для операторов Ганкеля выглядит следующим образом.

Теорема 1.5. *Ограниченный оператор $H\colon H^2(G) \to H^2_-(G)$ имеет вид H_φ для некоторой функции $\varphi \in L^\infty(G)$, если и только если*

$$HS_\chi = P_- S_\chi H \ \forall \chi \in X_+,$$

где $S_\chi f := \chi f$ $(f \in L^2(G))$. Кроме того, $\|H_\varphi\| = \operatorname{dist}_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G))$.

Доказательство. Для доказательства можно рассмотреть билинейную форму $(f, g) \mapsto \langle Hf, \overline{g}\rangle$ на $H^2(G) \times H^2(G)$ и применить предыдущую теорему из [16] к соответствующей билинейной ганкелевой форме на $\ell^2(X_+) \times \ell^2(X_+)$ (преобразование Фурье изоморфно отображает $\ell^2(X_+)$ на $H^2(G)$), при этом получаем, что $\|H_\varphi\| = \|\varphi_0\|_\infty$ для некоторой функции $\varphi_0 \in \varphi + H^\infty(G)$; подробности см. в [12]. [2]

Наконец, заметим, что $H_\varphi = H_{\varphi+\psi}$, если и только если $\psi \in H^\infty(G)$. Поэтому для любых $\varphi \in L^\infty, \psi \in H^\infty(G)$ и $f \in H^2(G)$ имеем

$$\|H_\varphi f\|_2 = \|H_{\varphi+\psi} f\|_2 = \|P_-((\varphi+\psi)f)\|_2 \leqslant \|(\varphi+\psi)f\|_2 \leqslant \|\varphi+\psi\|_\infty \|f\|_2.$$

[2] В формулировке теоремы в [12] имеется неточность; исправленный вариант — в [19].

Следовательно,

$$\|H_\varphi\| \leqslant \inf_{\psi \in H^\infty(G)} \|\varphi + \psi\|_\infty = \mathrm{dist}_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G)).$$

А с другой стороны, так как $\|H_\varphi\| = \|\varphi_0\|_\infty$ для некоторой функции $\varphi_0 \in \varphi + H^\infty(G)$, то $\|H_\varphi\| \geqslant \mathrm{dist}_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G))$, что и завершает доказательство теоремы. □

§2. Компактность и принадлежность классам Шаттена–фон Неймана операторов Ганкеля над компактными абелевыми группами

В этом разделе, в частности, обобщаются и дополняются результаты работы [13].

Следующая теорема — это фактически [17, теорема 1.2].[3]

Теорема 2.1. 1) *На $H^2(G)$ существует нетривиальный компактный оператор Ганкеля, если и только если X содержит наименьший положительный элемент χ_1.*

2) *Оператор H_φ ($\varphi \in L^\infty(G)$) компактен, если и только если $P_-\varphi \in K(G)$, где $K(G) = \mathrm{Cl}_{L^\infty}(\mathrm{span}\{\overline{\chi_1}^n : n \in \mathbb{N}\})$.*

Отметим, что первое утверждение теоремы 2.1 будет также установлено в ходе доказательства утверждения 1) теоремы 2.2, в которой дается описание компактных операторов Ганкеля в $H^2(G)$. Эта часть теоремы 2.2 фактически содержится в доказательстве теоремы 1.2 из [17]; для полноты мы приводим подробное доказательство. Ниже мы используем обозначение $H^2(\chi_1)$ для подпространства в $H^2(G)$ с ортонормированным базисом $\{\chi_1^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, $H^2(\chi_1)^\perp$ будет обозначать ортогональное дополнение $H^2(G) \ominus H^2(\chi_1)$.

Теорема 2.2. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1, и пусть оператор H_φ ($\varphi \in L^\infty(G)$) компактен. Тогда*

1) *$P_-\varphi$ разлагается в ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\overline{\chi_1}^n : n \in \mathbb{N}\}$,*

$$P_-\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{\chi_1}^n.$$

2) *Сужение $H_\varphi | H^2(\chi_1)^\perp$ равно нулю, а оператор $H_\varphi | H^2(\chi_1)$ унитарно эквивалентен классическому оператору Ганкеля $H_{\varphi_1}\colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2_-(\mathbb{T})$ с*

[3] Определение ганкелева оператора в [17] отличается от данного выше, но доказательство легко приспособить к нашему случаю.

символом

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{z}^n,$$

для которого $\overline{\varphi_1} \in VMOA(\mathbb{T})$.

Обратно, оператор H_φ*, обладающий свойствами, описанными в* 2)*, компактен.*

Доказательство. 1) Пусть оператор H_φ компактен и отличен от нуля. Обозначим через $\tau(x)$ оператор сдвига на элемент $x \in G$, $\tau(x)f(y) = f(xy)$, действующий в пространстве $L^2(G)$ и его подпространстве $H^2(G)$. Так как $\tau(x)\chi = \chi(x)\chi$, $\chi \in X$, то $\tau(x)$ коммутирует с $P_\pm$; в частности, $\tau(x)H_\varphi\tau(x^{-1}) = H_{\tau(x^{-1})\varphi}$, а потому последний оператор компактен вместе с H_φ. Далее, так как $\varphi \notin H^\infty(G)$, то $\widehat{\varphi}(\chi) \neq 0$ для некоторого характера $\chi \in X_-$. В силу непрерывной (и линейной) зависимости оператора H_φ от $\varphi \in L^\infty(G)$, *для любого* такого характера компактный оператор

$$\int_G \chi(x) H_{\tau(x^{-1})\varphi}\, dx$$

(интеграл Бохнера) равен $H_{\chi * \varphi} = \widehat{\varphi}(\chi)H_\chi$, откуда следует компактность оператора H_χ (здесь мы воспользовались одной остроумной идеей из [17]). Далее, вычисляя $S_{\overline{\chi}}H_\chi\xi$ ($\xi \in X_+$) (черта обозначает комплексное сопряжение), получаем, что компактный оператор

$$S_{\overline{\chi}}H_\chi \colon H^2(G) \to L^2(G)$$

является проектором на подпространство, порожденное множеством характеров $[1, \overline{\chi}) = [1, \chi^{-1})$. Значит, это множество конечно, а потому содержит наименьший положительный элемент χ_1. Кроме того, из конечности этого промежутка вытекает, что $\chi \in X^i$ и $\chi = \overline{\chi_1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ (см. [6, определение 3, теорема 2]). Следовательно, имеет место разложение в ряд Фурье

$$P_-\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{\chi_1}^n.$$

2) В силу лемм 1.4 и 1.1, при $\xi \in X_+ \setminus X^i$ имеем $H_\varphi\xi = P_-(P_-\varphi)\xi) = 0$, так как $\overline{\chi_1}^n\xi \in X_+$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) по лемме 1.1. Значит, $H_\varphi|H^2(\chi_1)^\perp = 0$.

Далее через $U_+(U_-)$ будут обозначаться унитарные операторы из $H^2(\mathbb{T})$ в $H^2(\chi_1)$ (соответственно, из $H^2_-(\mathbb{T})$ в $H^2(\overline{\chi_1})$), определяемые равенствами $U_+z^m = \chi_1^m$ при $m \in \mathbb{Z}_+$ и $U_-z^m = \chi_1^m$ при $m \in \mathbb{Z}, m < 0$ (то есть $U_\pm f = f \circ \chi_1$). Справедливо равенство $H_\varphi|H^2(\chi_1) = U_-^{-1}H_{\varphi_1}U_+$, то есть коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{T}) & \xrightarrow{U_+} & H^2(\chi_1) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle H_{\varphi_1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle H_\varphi | H^2(\chi_1)} \\ H^2_-(\mathbb{T}) & \xrightarrow{U_-} & H^2(\overline{\chi_1}). \end{array}$$

В самом деле, разложение $P_-\varphi$ в ряд по степеням $\overline{\chi_1}$, установленное в 1), позволяет легко проверить, что обе части этого равенства совпадают на элементах базиса $\{\chi_1^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Таким образом, оператор H_{φ_1} также компактен. Кроме того, $\varphi_1 \in L^2(\mathbb{T})$ так как $(c_n) \in \ell^2$. Поэтому (P^1_- обозначает ортопроектор из $L^2(\mathbb{T})$ на $H^2_-(\mathbb{T})$) $\varphi_1 = P^1_-\varphi_1 \in VMO(\mathbb{T})$ (см., например, [1, теорема 5.8]). Поскольку функция $\overline{\varphi_1}$ аналитична, отсюда следует, что $\overline{\varphi_1} \in VMOA(\mathbb{T})$.

Справедливость обратного утверждения легко следует из уже упоминавшегося описания компактных ганкелевых операторов на группе окружности. □

Теорема 2.2 позволяет получить обобщения классических теорем Хартмана и Пеллера.

Как отмечалось выше, обобщение теоремы Хартмана на случай компактных абелевых групп было дано в [17]. Следующая теорема дает иной, чем в [17], критерий компактности операторов Ганкеля.

Теорема 2.3. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1, и $\varphi \in L^\infty(G)$. Тогда оператор H_φ компактен, если и только если $P_-\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$, где $\varphi_1 \in \mathrm{VMO}(\mathbb{T})$.*

Доказательство. Из теоремы 2.2 сразу следует, что оператор H_φ компактен тогда и только тогда, когда компактен оператор H_{φ_1}. Это, в свою очередь, равносильно условию $\varphi_1 \in \mathrm{VMO}(\mathbb{T})$ (см., например, [1, с. 52, теорема 5.8]). Осталось воспользоваться равенством $P_-\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$. □

Приведем теперь теорему, которая переносит на группы важную теорему В. В. Пеллера (см. [1]). Определение пространств Бесова можно также найти в [1].

Теорема 2.4. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1, и $\varphi \in L^\infty(G)$, $p > 0$. Тогда оператор H_φ принадлежит классу Шаттена–фон Неймана $\mathbf{S}_p(H^2(G), H^2_-(G))$, если и только если $P_-\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$, где φ_1 принадлежит пространству Бесова $B_p^{1/p}$.*

Доказательство. Снова воспользовавшись теоремой 2.2 и ее доказательством, получаем, что оператор H_φ принадлежит $\mathbf{S}_p(H^2(G), H^2_-(G))$, если и только если оператор $H_\varphi|H^2(\chi_1)$ принадлежит $\mathbf{S}_p(H^2(\chi_1), H^2(\overline{\chi_1}))$ (в ходе доказательства теоремы 2.2 было показано, что $H_\varphi|H^2(\chi_1)$ отображает $H^2(\chi_1)$ в $H^2(\overline{\chi_1})$). В свою очередь, по этой же теореме последнее равносильно тому, что H_{φ_1} принадлежит $\mathbf{S}_p(H^2(\mathbb{T}), H^2_-(\mathbb{T}))$. Так как $P^1_-\varphi_1 = \varphi_1$, то, согласно упоминавшимся результатам В. В. Пеллера ([1, с. 314, следствие 1.2; с. 323, следствие 2.2; с. 328, следствие 3.2]), это равносильно условию $\varphi_1 \in B_p^{1/p}$ (указанные следствия применимы, так как в силу теоремы 2.2 $\varphi_1 \in \overline{\mathrm{VMOA}(\mathbb{T})} \subset \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$). □

Следствие 2.5 (см. [13]). *Пусть $\varphi \in L^\infty(G)$. Оператор H_φ является ядерным, если и только если найдутся последовательности комплексных чисел (c_n) и (λ_n), такие, что*

$$|\lambda_n| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|/(1-|\lambda_n|) < \infty \quad \text{и} \quad P_-\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{1-\lambda_n\overline{\chi_1}}.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.4 оператор H_φ является ядерным, если и только если $P_-\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$, где $\varphi_1 \in B^1_1$, или, что равносильно, $\overline{\varphi_1} \in \overline{B^1_1} = B^1_1$. Поскольку $\overline{\varphi_1}$ аналитична, последнее в точности означает, что $\overline{\varphi_1}$ принадлежит подпространству $(B^1_1)_+$ пространства B^1_1, состоящему из аналитических функций. Но известно [1, с. 319, теорема 1.4], что это, в свою очередь, равносильно тому, что найдутся последовательности комплексных чисел (c'_n) и (λ'_n), такие, что

$$|\lambda'_n| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c'_n|/(1-|\lambda'_n|) < \infty \quad \text{и} \quad \overline{\varphi_1(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c'_n}{1-\lambda'_n\zeta},$$

что и завершает доказательство следствия. □

§3. Конечные произведения Бляшке и конечномерность операторов Ганкеля над компактными абелевыми группами

Теорема 3.1. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1, и $\varphi \in L^\infty(G)$. Тогда оператор H_φ имеет конечный ранг, если и только если $P_-\varphi = R \circ \chi_1$, где R есть рациональная функция, все полюсы которой лежат в $\mathbb{D}$, и при этом*

$$\operatorname{rank} H_\varphi = \deg R.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.2 $\operatorname{rank} H_\varphi = \operatorname{rank} H_{\varphi_1}$. Значит, $\operatorname{rank} H_\varphi$ конечен тогда и только тогда, когда конечен $\operatorname{rank} H_{\varphi_1}$. В силу классической теоремы Кронекера последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда $P^1_-\varphi_1 = R$, где R есть рациональная функция, все полюсы которой лежат в $\mathbb{D}$, и при этом $\operatorname{rank} H_{\varphi_1} = \deg R$ (как и выше, P^1_- обозначает ортопроектор из $L^2(\mathbb{T})$ на $H^2_-(\mathbb{T})$). Поэтому $P^1_-\varphi_1 = \varphi_1$ в силу определения функции φ_1. Значит, $\operatorname{rank} H_\varphi = \deg R$ и из определения функции φ_1 сразу следует, что $P_-\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1 = R \circ \chi_1$. Обратно, если $P_-\varphi = R \circ \chi_1$, то $\varphi_1 \circ \chi_1 = R \circ \chi_1$. Заметим, что множество значений характера χ_1 есть единичная окружность $\mathbb{T}$, так как это множество есть нетривиальная связная подгруппа группы $\mathbb{T}$. Значит, $\varphi_1 = R$, и обратное утверждение теоремы также следует из теоремы Кронекера. $\square$

Определение 3.2. Следуя [13], внутреннюю функцию Θ (то есть такую функцию $\Theta \in H^2(G)$, что $|\Theta| = 1$ п.в., см. [14]) назовем *конечным произведением Бляшке на группе* G, если пространство

$$K_\Theta := H^2(G) \ominus \Theta H^2(G)$$

конечномерно. При этом мы положим $\deg \Theta := \dim K_\Theta$.

Для описания конечных произведений Бляшке на группе G нам понадобятся обобщения двух классических лемм из [13]. Для удобства читателя мы приводим их доказательство. Всюду ниже

$$S_\chi \colon H^2(G) \to H^2(G), \quad f \mapsto \chi f$$

— *оператор умножения на характер* $\chi \in X_+$.

Лемма 3.3 (обобщенная лемма Бёрлинга)**.** 1) *Любое число* $\lambda \in \mathbb{D}$ *является собственным значением оператора* S^*_χ $(\chi \in X_+,\ \chi \neq 1)$, *и отвечающие ему собственные функции имеют в точности вид* $g/(1-\lambda\chi)$, *где* $g \in H^2(G)$, $g \neq 0$, *причем преобразование Фурье* $\widehat{g}$ *сосредоточено на промежутке* $[1, \chi)$.

2) *Пусть в группе* X *есть наименьший положительный элемент* χ_1. *Тогда точечный спектр оператора* $S^*_{\chi_1}$ *равен* $\mathbb{D}$, *и при всех* $\lambda \in \mathbb{D}$ *и натуральных* n

$$\operatorname{Ker}(S^*_{\chi_1} - \lambda I)^n = \operatorname{span}\left\{ \frac{\chi_1^{k-1}}{(1-\lambda\chi_1)^k} : 1 \leqslant k \leqslant n \right\}.$$

Доказательство. 1) Заметим, что $\sigma(S^*_\chi) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, так как $\|S^*_\chi\| = 1$. Если число $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ есть собственное значение оператора S^*_χ, $\chi \in X_+$, $\chi \neq 1$, с собственной функцией f, то, учитывая, что $S^*_\chi = P_+ S_{\overline{\chi}}$, и приравнивая коэффициенты Фурье функций $S^*_\chi f$ и λf, $f \in H^2(G)$, $f \neq 0$, получаем, что $\widehat{f}(\eta\chi) = \lambda \widehat{f}(\eta)$, $\eta \in X_+$, что равносильно тому, что преобразование Фурье функции $f(1-\lambda\chi)\chi^{-1} = f\chi^{-1} - \lambda f$ сосредоточено на X_-. Если мы положим $g := f(1-\lambda\chi)$, то это значит, что $\widehat{g}$ сосредоточено на $[1, \chi)$. При $\lambda \in \mathbb{D}$ получаем требуемый вид собственных функций, отвечающих λ.

2) При $\chi = \chi_1$ из только что доказанного утверждения 1) леммы следует, что функция $\widehat{g}$ сосредоточена на $\{1\}$, то есть g есть константа, отличная от 0. Если мы предположим, что $\lambda \in \mathbb{T}$ есть собственное значение оператора $S^*_{\chi_1}$, то по доказанному выше $g = f(x)(1 - \lambda\chi_1(x))$ при всех $x \in G$, что невозможно, так как χ_1 принимает значение $1/\lambda$ ($\chi_1(G) = \mathbb{T}$ как нетривиальная связная подгруппа группы $\mathbb{T}$).

Докажем последнее утверждение леммы индукцией по n. При $n = 1$ оно уже доказано. Предположим, что оно верно при некотором n, и рассмотрим функцию $f \in \operatorname{Ker}(S^*_{\chi_1} - \lambda I)^{n+1}$. Так как $(S^*_{\chi_1} - \lambda I)f \in \operatorname{Ker}(S^*_{\chi_1} - \lambda I)^n$, то по предположению

$$(S^*_{\chi_1} - \lambda I)f = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\chi_1^{k-1}}{(1 - \lambda\chi_1)^k}.$$

Но легко проверить, что

$$\frac{\chi_1^{k-1}}{(1 - \lambda\chi_1)^k} = (S^*_{\chi_1} - \lambda I)\frac{\chi_1^{k}}{(1 - \lambda\chi_1)^{k+1}}.$$

Поэтому

$$(S^*_{\chi_1} - \lambda I)\biggl(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\chi_1^{k}}{(1 - \lambda\chi_1)^{k+1}}\biggr) = 0,$$

откуда по доказанному выше найдется такая константа c_0, что

$$f - \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\chi_1^{k}}{(1 - \lambda\chi_1)^{k+1}} = \frac{c_0}{1 - \lambda\chi_1},$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 3.4 (ср. [3, с. 216, лемма 2.4.4])**.** *Пусть в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1. Если Θ — конечное произведение Бляшке на группе G, то для некоторого конечного множества $E \subset \mathbb{D}$ и некоторой функции $k\colon E \to \mathbb{N}$ имеем*

$$K_\Theta = \operatorname{span}\Bigl\{\frac{\chi_1^{k}}{(1 - \lambda\chi_1)^{k+1}} : \lambda \in E, 1 \leqslant k \leqslant k(\lambda)\Bigr\}.$$

Доказательство. Поскольку оператор $S^*_{\chi_1}|K_\Theta$ действует в пространстве K_Θ, это следует из найденного в лемме 3.3 вида корневых подпространств оператора $S^*_{\chi_1}$ и того факта, что конечномерное пространство есть прямая сумма корневых подпространств действующего в нем оператора. □

Нам понадобится также следующая элементарная лемма.

Лемма 3.5. *Пусть L, L_1 — замкнутые подпространства гильбертова пространства и $L_1 \subset L$. Тогда*

$$(L_1 \oplus L^{\perp})^{\perp} = L \ominus L_1.$$

Теорема 3.6. *На группе G существует конечное произведение Бляшке тогда и только тогда, когда X содержит наименьший положительный элемент χ_1. При этом конечные произведения Бляшке на G имеют в точности вид $\Theta = B \circ \chi_1$, где B — конечное произведение Бляшке на группе $\mathbb{T}$, и $\deg\Theta = \deg B$.*

Доказательство. Если Θ есть конечное произведение Бляшке на G, то образ ганкелева оператора $H_{\overline{\Theta}}$ содержится в K_Θ $\big($поскольку $\Theta H^2(G) \subset H^2(G)$ для любой внутренней функции Θ, а потому $\mathrm{Im}(H_{\overline{\Theta}}) \subset H^2_-(G) \subset (\Theta H^2(G))^{\perp}\big)$. Следовательно, оператор $H_{\overline{\Theta}}$ компактен и нетривиален (в случае его тривиальности $\overline{\Theta} H^2(G) \subset H^2_-(G)$, что невозможно, так как $1 \in \overline{\Theta} H^2(G)$), и по теореме 2.1 X содержит наименьший положительный элемент.

Далее, пусть $\Theta := B \circ \chi_1$, где B — конечное произведение Бляшке на $\mathbb{T}$. Так как $X_+ \setminus X^i$ есть ортонормированный базис пространства $H^2(\chi_1)^{\perp}$, а $\Theta = B \circ \chi_1 = U_+(B) \in H^2(\chi_1)$, то по утверждению 2) леммы 1.1 $\Theta(H^2(\chi_1))^{\perp} = H^2(\chi_1)^{\perp}$. Кроме того, $\Theta H^2(\chi_1) \subset H^2(\chi_1)$. Следовательно, применяя лемму 3.5 и теорему 2.2, получаем

$$\begin{aligned} K_\Theta &= (\Theta H^2(G))^{\perp} = (\Theta H^2(\chi_1) \oplus \Theta(H^2(\chi_1))^{\perp})^{\perp} = (\Theta H^2(\chi_1) \oplus H^2(\chi_1)^{\perp})^{\perp} \\ &= H^2(\chi_1) \ominus \Theta H^2(\chi_1) = U_+(H^2(\mathbb{T}) \ominus B H^2(\mathbb{T})) = U_+(K_B), \end{aligned}$$

а потому Θ — конечное произведение Бляшке и $\deg\Theta = \deg B$.

Наконец, в силу леммы 3.4 и описания классических пространств K_B [3, с. 216, лемма 2.4.4], для любого конечного произведения Бляшке Θ на G найдется такое конечное произведение Бляшке B_1 на группе $\mathbb{T}$, что

$$K_\Theta = K_{B_1} \circ \chi_1 := \{f \circ \chi_1 \colon f \in K_{B_1}\} = K_{B_1 \circ \chi_1}.$$

Следовательно, для внутренних функций Θ и $\Theta_1 := B_1 \circ \chi_1$ имеем $\Theta f = \Theta_1$ и $\Theta_1 g = \Theta$ для некоторых $f, g \in H^2(G)$. Из этих равенств следует, что $|f| = |g| = 1$ и $fg = 1$. Таким образом, $g = \overline{f} \in H^2(G) \cap \overline{H^2(G)} = \{\mathrm{const}\}$. Значит, $g(x) = c \in \mathbb{T}$ и $\Theta = c\Theta_1 = B \circ \chi_1$, где $B := cB_1$. $\square$

Теорема 3.7. *Пусть $\varphi \in H^\infty(G)$. Условие $\Theta P_-\varphi \in H^\infty(G)$ для некоторого конечного произведения Бляшке Θ необходимо и достаточно для конечномерности оператора H_φ.*

Доказательство. Пусть оператор $H_\varphi = H_{P_-\varphi}$ имеет конечный ранг. Если $P_-\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$ как в теореме 2.2, то по этой теореме оператор H_{φ_1}

также конечномерен. В силу классического результата (см. [1, глава 1, следствие 3.3]) найдется такое конечное произведение Бляшке B на группе $\mathbb{T}$, что $B\varphi_1 \in H^\infty(\mathbb{T})$. Следовательно, $(B \circ \chi_1)(\varphi_1 \circ \chi_1) \in H^\infty(G)$ и для завершения доказательства необходимости осталось воспользоваться теоремой 3.6.

Обратно, если $\Theta P_-\varphi \in H^\infty(G)$ для некоторого конечного произведения Бляшке Θ, то $H_{\Theta P_-\varphi} = 0$, то есть $H_\varphi(\Theta f) = 0$ при всех $f \in H^2(G)$. Значит, $\Theta H^2(G) \subseteq H_0$, где $H_0 := \operatorname{Ker} H_\varphi$, а, стало быть, $H_0^\perp \subseteq K_\Theta$. Таким образом, $\dim H_0^\perp < \infty$, а так как $H_\varphi(H^2(G)) = H_\varphi(H_0^\perp)$, причем оператор $H_\varphi|H_0^\perp$ инъективен, то $\operatorname{rank} H_\varphi = \dim H_0^\perp$. □

Следствие 3.8. *Если Θ — конечное произведение Бляшке, $h \in H^\infty(G)$ и $P_-\varphi = \overline{\Theta}h$, то* $\operatorname{rank} H_\varphi < \infty$.

§4. Теорема Адамяна–Арова–Крейна для операторов Ганкеля над компактными абелевыми группами

Следующий результат обобщает классическую теорему Адамяна–Арова–Крейна (см., например, [1]). Как и выше, доказательство использует редукцию к классическому случаю, описанную в теореме 2.2.

Теорема 4.1. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1, $\varphi \in L^\infty(G)$ и оператор H_φ компактен. Тогда для сингулярных чисел оператора H_φ справедливы равенства, $n \geqslant 1$,*

$$s_n(H_\varphi) = \min\{\|H_\varphi - H_n\| : \text{ оператор } H_n \text{ ганкелев над } G, \operatorname{rank} H_n \leqslant n\}.$$

Доказательство. По упоминавшейся теореме Адамяна–Арова–Крейна,

$$s_n(H_{\varphi_1}) = \min\{\|H_{\varphi_1} - \Gamma_n\| : \text{оператор} \Gamma_n \text{ ганкелев над } \mathbb{T}, \operatorname{rank} \Gamma_n \leqslant n\}, \quad (4.1)$$

причем, в соответствии с теоремой 2.2,

$$s_n(H_{\varphi_1}) = s_n(H_\varphi|H^2(\chi_1)). \quad (4.2)$$

С другой стороны, разлагая оператор $H_\varphi|H^2(\chi_1)$ в ряд Шмидта, получаем для $x_1 \in H^2(\chi_1)$

$$H_\varphi x_1 = (H_\varphi|H^2(\chi_1))x_1 = \sum_n s_n(H_\varphi|H^2(\chi_1))\langle x_1, e_n\rangle e_n',$$

где (e_n), (e_n')— ортонормированные базисы пространств $H^2(\chi_1)$ и $H^2(\overline{\chi_1}) \subset H^2_-(G)$ соответственно (в ходе доказательства теоремы 2.2 было показано, что $H_\varphi\colon H^2(\chi_1) \to H^2(\overline{\chi_1})$).

Далее, для любого $x \in H^2(G)$ имеем $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H^2(\chi_1)$, $x_2 \in H^2(\chi_1)^\perp := H^2(G) \ominus H^2(\chi_1)$, причем $H_\varphi x_2 = 0$ по теореме 2.2. Поэтому

$$H_\varphi x = H_\varphi x_1 = \sum_n s_n(H_\varphi | H^2(\chi_1)) \langle x, e_n \rangle e'_n,$$

$\langle x_2, e_n \rangle = 0$. Отсюда следует, что

$$s_n(H_\varphi | H^2(\chi_1)) = s_n(H_\varphi). \tag{4.3}$$

Объединяя равенства (4.3), (4.2) и (4.1), получаем

$$s_n(H_\varphi) = \min \bigl\{ \|H_{\varphi_1} - \Gamma_n\| : \Gamma_n \text{ ганкелев на группе } \mathbb{T}, \operatorname{rank} \Gamma_n \leqslant n \bigr\}. \tag{4.4}$$

В силу теоремы 2.2 $H_{\varphi_1} = U_-^{-1}(H_\varphi | H^2(\chi_1)) U_+$. С учетом унитарности операторов U_+, U_-, имеем

$$\|H_{\varphi_1} - \Gamma_n\| = \|H_\varphi | H^2(\chi_1) - U_- \Gamma_n U_+^{-1}\| = \|H_\varphi | H^2(\chi_1) - \widetilde{H_n}\|,$$

где $\widetilde{H_n} := U_- \Gamma_n U_+^{-1} \colon H^2(\chi_1) \to H^2(\overline{\chi_1})$, и $\operatorname{rank} \widetilde{H_n} = \operatorname{rank} \Gamma_n \leqslant n$.

Определим оператор $H_n \colon H^2(G) \to H^2_-(G)$ с помощью равенств

$$H_n | H^2(\chi_1) := \widetilde{H_n}, \quad H_n | H^2(\chi_1)^\perp := 0.$$

Ясно, что $\operatorname{rank} H_n = \operatorname{rank} \widetilde{H_n} \leqslant n$, и

$$\|H_{\varphi_1} - \Gamma_n\| = \|H_\varphi - H_n\|. \tag{4.5}$$

Покажем, что оператор H_n — ганкелев. С этой целью проверим, что H_n удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$H_n S_\chi f = P_- S_\chi H_n f, \quad \chi \in X_+, f \in H^2(G) \tag{4.6}$$

(см. теорему 1.5), где $S\chi \colon L^2(G) \to L^2(G), h \mapsto \chi h$ — оператор сдвига на характер. Для этого достаточно рассмотреть следующие случаи.

1) $f \in H^2(\chi_1)^\perp$. Так как при $\chi \in X_+$ по лемме 1.1 $\chi(X_+ \setminus X^i) \subset X_+ \setminus X^i$, то S_χ отображает пространство $H^2(\chi_1)^\perp$ в себя (ортонормированный базис этого пространства, состоящий из характеров, содержится в $X_+ \setminus X^i$). Поэтому в этом случае обе части в (4.6) равны нулю.

2) $f \in H^2(\chi_1)$. В этом случае $H_n f = \widetilde{H_n} f$. Поскольку f разлагается в ряд по элементам $X_+ \cap X^i$, можно считать, что $f = \chi_1^k, k \geqslant 0$. Тогда (4.6) приобретает вид

$$H_n(\chi \chi_1^k) = P_-(\chi \widetilde{H_n} \chi_1^k) \quad (\chi \in X_+, k \geqslant 0). \tag{4.7}$$

Возможны два случая.

а) $\chi \in X_+ \cap X^i$, то есть $\chi = \chi_1^j, j \geqslant 0$. Тогда (4.7) равносильно равенству

$$H_n(\chi_1^{j+k}) = P_-(\chi_1^j \widetilde{H_n} \chi_1^k), \quad j, k \geqslant 0.$$

Последнее равенство вытекает из коммутационных соотношений для оператора Ганкеля Γ_n. В самом деле, пусть $L^2(\chi_1)$ есть гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\chi_1^m : m \in \mathbb{Z}\}$, и пусть

$$U\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\chi_1), \quad z^m \mapsto \chi_1^m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

есть унитарный оператор, продолжающий $U_\pm$. Так как

$$\widetilde{H_n}\chi_1^m = U_-\Gamma_n U_+^{-1}\chi_1^m = U_-\Gamma_n z^m,$$

то (4.7) принимает вид

$$U_-\Gamma_n z^{k+j} = P_-(U(z^j)(U_-\Gamma_n z^k)).$$

Далее, разлагая функцию $f \in L^2(\mathbb{T})$ в ряд Фурье, легко проверить, что $U(z^j f) = U(z^j)U(f)$. Легко проверить также, что $P_-U = UP_-^1$ (как и выше, P_-^1 обозначает ортопроектор из $L^2(\mathbb{T})$ на $H_-^2(\mathbb{T})$). Поэтому

$$U_-\Gamma_n z^{k+j} = P_-U(z^j)(U_-\Gamma_n z^k) = P_-U(z^j\Gamma_n z^k) = UP_-^1(z^j\Gamma_n z^k).$$

Данное же равенство вытекает из равенства $\Gamma_n z^{k+j} = P_-^1(z^j\Gamma_n z^k)$, являющегося следствием коммутационных соотношений для Γ_n.

б) $\chi \in X_+ \setminus X^i$. Тогда по лемме 1.1

$$\chi\chi_1^k \in X_+ \setminus X^i \subseteq H^2(\chi_1)^\perp, \quad k \geqslant 0.$$

Значит, в этом случае левая часть в (3.7) равна нулю. Далее, у нас $\widetilde{H_n}\chi_1^k \in H^2(\overline{\chi_1})$. Поэтому $\chi\widetilde{H_n}\chi_1^k \in H^2(G)$ в силу леммы 1.1, а потому и правая часть в (4.7) равна нулю. Итак, оператор H_n — ганкелев.

Наконец, по классической теореме Адамяна–Арова–Крейна существует ганкелев оператор Γ_n^0 на группе $\mathbb{T}$ такой, что $s_n(H_{\varphi_1}) = \|H_{\varphi_1} - \Gamma_n^0\|$. Пусть H_n^0 — соответствующий Γ_n^0 ганкелев оператор на группе G, конструкция которого была изложена выше. Тогда с учетом (4.5) имеем

$$s_n(H_\varphi) = s_n(H_{\varphi_1}) = \|H_{\varphi_1} - \Gamma_n^0\| = \|H_\varphi - H_n^0\| \geqslant \inf \|H_\varphi - H_n\| \geqslant s_n(H_\varphi)$$

(инфимум берется по всем ганкелевым операторам на группе G ранга не выше n). $\square$

Воспользуемся обозначением

$$\mathcal{R}_n = \{R_n : R_n \text{ — рациональная функция с полюсами в } \mathbb{D},\ \deg R_n \leqslant n\}.$$

Следствие 4.2. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1, $\varphi \in L^\infty(G)$ и оператор H_φ компактен. Тогда*

$$s_n(H_\varphi) = \operatorname{dist}_{L^\infty}(\varphi, \mathcal{R}_n \circ \chi_1 + H^\infty(G)),$$

где $\mathcal{R}_n \circ \chi_1 := \{R_n \circ \chi_1 : R_n \in \mathcal{R}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В силу теоремы 3.1, ганкелев оператор H_n на группе G, удовлетворяющий условию $\operatorname{rank} H_n \leqslant n$, имеет вид $H_n = H_{R_n \circ \chi_1}$, где $R_n \in \mathcal{R}_n$. Следовательно, используя теорему 4.1 и теорему Нехари–Вонга, имеем

$$\begin{aligned} s_n(H_\varphi) &= \min\{\|H_\varphi - H_{R_n\circ\chi_1}\| : R_n \in \mathcal{R}_n\} \\ &= \min\{\operatorname{dist}_{L^\infty}(\varphi - R_n \circ \chi_1, H^\infty(G)) : R_n \in \mathcal{R}_n\} \\ &= \operatorname{dist}_{L^\infty}(\varphi, \mathcal{R}_n \circ \chi_1 + H^\infty(G)). \end{aligned}$$

□

§5. Инвариантные подпространства $H^2(G)$

Напомним (см., например, [14]), что подпространство E пространства $H^2(G)$ называется *инвариантным*, если $\chi E \subset E$ при всех $\chi \in X_+$.

Определение 5.1. Инвариантное подпространство E пространства $H^2(G)$ назовем *неприводящим*, если оно удовлетворяет условию $\chi E \subsetneqq E$ при всех $\chi \in X_+ \setminus \{1\}$.

Подпространство E пространства $H^2(G)$ вида $\theta H^2(G)$, где θ — внутренняя функция, является замкнутым, инвариантным и неприводящим, так как в противном случае при некотором $\chi \in X_+ \setminus \{1\}$ выполнялось бы неверное равенство $\chi H^2(G) = H^2(G)$.

Следующая теорема дополняет известное обобщение Хелсона и Лауденслегера теоремы Бёрлинга об инвариантных подпространствах [14, теорема 8.5.3].

Теорема 5.2. *Каждое замкнутое нетривиальное неприводящее инвариантное подпространство E пространства $H^2(G)$ имеет вид $\theta H^2(G)$, где θ — внутренняя функция, тогда и только тогда, когда X содержит наименьший положительный элемент. При этом функция θ единственна с точностью до множителя из $\mathbb{T}$.*

Доказательство. В [14, 8.5.4] замечено, что если X не содержит наименьшего положительного элемента, то $E_0 := \{f \in H^2(G) : \widehat{f}(1) = 0\}$ есть замкнутое инвариантное подпространство пространства $H^2(G)$, которое не имеет вида $\theta H^2(G)$, где θ — внутренняя функция. В самом деле, пусть $E_0 = \theta H^2(G)$ и X не содержит наименьшего положительного элемента. Разложение в ряд Фурье функции $\theta \in E_0$, имеет вид $\theta = \sum_{\chi\in X_\theta} a_\chi \chi$, где $X_\theta \subset \{\chi \in X_+ : \chi > 1\}$. Выберем характер $\xi \in X_+ \setminus \{1\}$ так, что $\xi < \chi$ для всех $\chi \in X_\theta$. Тогда $\xi \in E_0$, но $\xi \notin \theta H^2(G)$, и мы получили противоречие. При этом E_0 неприводящее ($\chi E_0 \neq E_0$ при всех $\chi \in X_+ \setminus \{1\}$, так как E_0 содержит интервал $(1, \chi) \subset X_+$).

Пусть теперь X содержит наименьший положительный элемент χ_1. Предположим, что замкнутое инвариантное подпространство E является неприводящим. Заметим, что $\chi E \subset \chi_1 E$ для любого $\chi \in X_+ \setminus \{1\}$, поскольку в этом случае χ_1 делит χ. Поэтому мы можем обобщить на наш случай известное доказательство теоремы Бёрлинга (см., например, [3, с. 9–10]). Рассмотрим функцию $\theta \in E \cap (\chi_1 E)^\perp$ с условием нормировки $\|\theta\|_2 = 1$. Тогда $\theta \perp \chi\theta$ для любого характера $\chi \in X_+ \setminus \{1\}$, а потому

$$\int\limits_G |\theta|^2 \chi \, dx = 0 \quad (\chi \in X_+ \setminus \{1\}).$$

Взяв комплексное сопряжение, получим, что преобразование Фурье функции $|\theta|^2$ сосредоточено на $\{1\}$, то есть $|\theta|^2 = \mathrm{const}$, что вместе с условием нормировки влечет равенство $|\theta| = 1$ п.в. Так как $\theta \in E$, то $\theta \operatorname{span} X_+ \subset E$, где $\operatorname{span} X_+$ есть множество всех аналитических полиномов на G. Поскольку $\operatorname{span} X_+$ плотно в $H^2(G)$ по определению, получаем, что $\theta H^2(G) \subset E$. Для доказательства обратного включения возьмем $f \in E \cap (\theta H^2(G))^\perp$. Тогда $f \perp \theta\chi$, то есть $\int_G f \overline{\theta\chi} \, dx = 0$ для любого характера $\chi \in X_+$. С другой стороны, для любого характера $\chi \in X_+ \setminus \{1\}$ имеем $\theta \perp \chi E$ (так как $\chi E \subset \chi_1 E$), а потому $\int_G \theta \overline{f\chi} \, dx = 0$. Значит, $\widehat{f\overline{\theta}} = 0$, откуда $f = 0$ п.в. Таким образом, $E = \theta H^2(G)$. Единственность θ с точностью до множителя из $\mathbb{T}$ доказывается точно так же, как и равенство $\Theta = c\Theta_1$ в доказательстве теоремы 3.6. □

Замечание 5.3. Как известно, в случае $G = \mathbb{T}$ всякое нетривиальное инвариантное подпространство — неприводящее (см., например, [3], доказательство следствия 1.4.1). Если же $G \neq \mathbb{T}$ и G содержит наименьший положительный элемент χ_1, то всегда существует нетривиальное инвариантное подпространство, не являющееся неприводящим. Действительно, тогда множество $X_+ \setminus X^i$ непусто [6, следствие 1], и в силу леммы 1.1 подпространство E_1 пространства $H^2(G)$ с ортонормированным базисом $X_+ \setminus X^i$ инвариантно, но $\chi_1 E_1 = E_1$.

Следствие 5.4. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент и $f \in H^2(G)$. Порожденное функцией f замкнутое инвариантное подпространство E_f является неприводящим, если и только если*

$$\int_G \log |f(x)| \, dx > -\infty.$$

Доказательство. Если функция f удовлетворяет указанному неравенству, то пространство E_f имеет вид $\theta H^2(G)$, где θ — внутренняя функция (см. [14, теорема 8.5.2]) и значит является неприводящим.

Пусть теперь $\int_G \log |f(x)| \, dx = -\infty$. Тогда $\int_G f(x) \, dx = 0$ в силу [14, теорема 8.4.1], а потому $\int_G g(x) \, dx = 0$ при всех $g \in E_f$. Следовательно, пространство E_f не имеет вида $\theta H^2(G)$, где θ — внутренняя функция, и в силу теоремы 5.2 не является неприводящим. $\square$

§6. Некоторые приложения

По аналогии с классическим случаем (см. [1, раздел 6.6]), следствие 4.2 и теорема 2.4 дают следующую информацию о равномерной аппроксимации символов рациональными функциями от χ_1. Для $\varphi \in L^\infty(G)$ положим

$$d_n(\varphi, G) := \operatorname{dist}_{L^\infty}(\varphi, \mathcal{R}_n \circ \chi_1 + H^\infty(G)).$$

Следствие 6.1. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1, $\varphi \in L^\infty(G)$. Последовательность $d_n(\varphi, G)$ принадлежит ℓ^p, где $0 < p < \infty$, если и только если $\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$, где $\varphi_1 \in B_p^{1/p}$.*

Применим теперь полученные результаты к дискретной версии операторов Ганкеля над группами, рассмотренной в [11, пример 2].

Пусть $\nu \in \ell^2(X)$. Из теоремы Планшереля легко следует, что оператор $\mathcal{G}_\nu\colon \ell^2(X_+) \to \ell^2(X_-)$, определяемый равенством

$$\mathcal{G}_\nu f(\xi) := \sum_{\chi \in X_+} \nu(\xi\chi^{-1}) f(\chi), \quad \xi \in X_-,$$

унитарно эквивалентен оператору Ганкеля H_φ с символом $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\nu \in L^2(G)$ и обратно (здесь $\mathcal{F}^{-1}\colon L^2(X) \to L^2(G)$ — обратное преобразование Фурье на группе X; подробности см. в [11, теорема 5]). Попутно отметим, что имеются тесные связи между операторами $\mathcal{G}_\nu$ и операторами Винера–Хопфа $\mathcal{T}_\nu$ над группами, изучавшимися в [5]. В частности, $\mathcal{T}_\nu = C_\nu - \mathcal{G}_\nu$, где C_ν — оператор свертки с ν.

Если $\nu \in \ell^1(X)$, то оператор H_φ ограничен, так как $\varphi \in C(G)$, а потому ограничен и оператор $\mathcal{G}_\nu$. Применительно к данным операторам теоремы 3.1, 2.3 и 2.4 выглядят следующим образом.

Следствие 6.2. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1, $\nu \in \ell^1(X)$, $\psi := P_-(\mathcal{F}^{-1}\nu)$.*

1) *Оператор $\mathcal{G}_\nu$ имеет конечный ранг, если и только если $\psi = R \circ \chi_1$, где R есть рациональная функция, все полюсы которой лежат в $\mathbb{D}$, и при этом* $\operatorname{rank} \mathcal{G}_\nu = \deg R$.

2) *Оператор $\mathcal{G}_\nu$ компактен, если и только если $\psi = \varphi_1 \circ \chi_1$, где $\varphi_1 \in VMO(\mathbb{T})$.*

3) *Оператор $\mathcal{G}_\nu$ принадлежит классу Шаттена–фон Неймана $\mathbf{S}_p$, $0 < p < \infty$, если и только если $\psi = \varphi_1 \circ \chi_1$, где $\varphi_1 \in B_p^{1/p}$.*

(Операторы вида $\mathcal{G}_\nu$ рассматривались и для недискретных групп, см. [11, определение 7, теорема 4].)

Следуя [10], рассмотрим еще одну версию дискретных операторов Ганкеля на группах. Ниже $1_{\{\xi\}}$ обозначает индикатор одноточечного подмножества $\{\xi\} \subset X$.

Определение 6.3 (см. [10]). Оператор $\Gamma\colon \ell^2(X_+) \to \ell^2(X_+)$, определенный первоначально на финитных функциях на X_+, называется *ганкелевым* (*оператором Ганкеля*) *в* $\ell^2(X_+)$, если его матрица в базисе $\{1_{\{\chi\}} : \chi \in X_+\}$ зависит только от произведения характеров, то есть существует такая функция a_Γ на X_+, что для всех $\chi, \xi \in X_+$ выполняется равенство

$$\langle \Gamma 1_{\{\chi\}}, 1_{\{\xi\}} \rangle = a_\Gamma(\chi\xi)$$

(угловые скобки здесь обозначают скалярное произведение в $\ell^2(X)$).

Оператор T в $\ell^2(X_+)$ будет ганкелевым тогда и только тогда, когда при всех χ из X_+ выполняются коммутационные соотношения $\mathcal{S}_\chi^* T = T\mathcal{S}_\chi$ (см. [10, лемма 1]), где

$$\mathcal{S}_\chi f(\xi) = \begin{cases} f(\chi^{-1}\xi), & \text{если } \chi^{-1}\xi \in X_+, \\ 0, & \text{если } \chi^{-1}\xi \notin X_+ \end{cases}$$

есть оператор в $\ell_2(X_+)$ сдвига на характер $\chi \in X_+$, $\mathcal{S}_\chi^* f(\xi) = f(\chi\xi)$ — сопряженный оператор.

При этом ганкелев оператор Γ в $\ell^2(X_+)$ ограничен тогда и только тогда, когда существует такая функция $\psi \in L^\infty(G)$, что a_Γ есть сужение на X_+ преобразования Фурье $\widehat{\psi}$ функции ψ [10, лемма 6].

Лемма 6.4. *Ограниченный оператор* Γ *в* $\ell^2(X_+)$ *унитарно эквивалентен ганкелеву оператору* H_φ *с символом* $\varphi \in L^\infty(G)$ *и обратно, и при этом*

$$P_-\varphi = \sum_{\xi \in X_-} a_\Gamma(\overline{\xi\chi_1})\xi.$$

Доказательство. Утверждение об унитарной эквивалентности доказано в [10, лемма 5], причем в процессе доказательства показано, что

$$a_\Gamma(\chi) = \widehat{\varphi}\big((\chi\chi_1)^{-1}\big)$$

при $\chi \in X_+$. Следовательно,

$$P_-\varphi = \sum_{\xi \in X_-} \langle P_-\varphi, \xi \rangle \xi = \sum_{\xi \in X_-} \widehat{\varphi}(\xi)\xi = \sum_{\xi \in X_-} a_\Gamma((\xi\chi_1)^{-1})\xi$$

(угловые скобки здесь обозначают скалярное произведение в $\ell^2(X)$). $\square$

С учетом леммы 6.4, теоремы 3.1, 2.3 и 2.4 применительно к данным операторам могут быть сформулированы следующим образом.

Следствие 6.5. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1, $h := \sum_{\xi \in X_-} a_\Gamma(\overline{\xi\chi_1})\xi$.*

1) *Оператор Γ имеет конечный ранг, если и только если функция h имеет вид $R \circ \chi_1$, где R есть рациональная функция, все полюсы которой лежат в $\mathbb{D}$, и при этом*

$$\operatorname{rank}\Gamma = \deg R.$$

2) *Оператор Γ компактен, если и только если h имеет вид $\varphi_1 \circ \chi_1$, где $\varphi_1 \in VMO(\mathbb{T})$.*

3) *Оператор Γ принадлежит классу Шаттена–фон Неймана $\mathbf{S}_p$, $0 < p < \infty$, если и только если h имеет вид $\varphi_1 \circ \chi_1$, где $\varphi_1 \in B_p^{1/p}$.*

Список литературы

[1] Пеллер В. В., *Операторы Ганкеля и их приложения*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва-Ижевск, 2005.

[2] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.

[3] Nikolski N. K., *Operators, functions, and systems: an easy reading.* Vol. I. *Hardy, Hankel, and Toeplitz*, Math. Surveys Monogr., vol. 92, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[4] Nikolski N. K., *Operators, functions, and systems: an easy reading.* Vol. II. *Model operators and systems*, Math. Surveys Monogr., vol. 93, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[5] Adukov V., *Wiener-Hopf operators on a subsemigroup of a discrete torsion free abelian group*, Integral Equations Operator Theory **16** (1993), no. 3, 305–332.

[6] Миротин А. Р., *Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах H^p над упорядоченными группами*, Мат. сб. **202** (2011), №5, 101–116.

[7] Ehrhardt T., van der Mee C., Rodman L., Spitkovski I., *Factorization in weighted Wiener matrix algebras on linearly ordered abelian groups*, Integral Equations Operator Theory **58** (2007), no. 1, 65–86.

[8] Teh H.-H., *Construction of orders in Abelian groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **57** (1961), no. 3, 476–482.

[9] Зайцева М. И., *О множестве порядков в абелевых группах*, Успехи мат. наук **8** (1953), №1, 135–137.

[10] Миротин А. Р., Дыба Р. В., *Функции ограниченной средней осцилляции и ганкелевы операторы на компактных абелевых группах*, Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН **20** (2014), №2, 135–144.

[11] Миротин А. Р., Кузьменкова Е. Ю., *О ганкелевых операторах, ассоциированных с линейно упорядоченными абелевыми группами*, Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН **22** (2016), №4, 135–147.

[12] Дыба Р. В., *Теорема Нехари на компактных абелевых группах с линейно упорядоченной группой характеров*, Пробл. физ., мат. и техн. **8** (2010), no. 3, 57–60.

[13] Миротин, А. Р., Дыба Р. В., *О конечномерных и ядерных ганкелевых операторах в пространствах Харди H^2 на компактных абелевых группах*, Пробл. физ., мат. и техн. **25** (2015), №4, 74–79.

[14] Rudin W., *Fourier analysis on groups*, Intersci. Tracts Pure Appl. Math., vol. 12, Intersci. Publ., New York-London, 1962.
[15] Понтрягин Л. С., *Непрерывные группы*, 2-е изд., ГИТТЛ, М., 1954.
[16] Wang J., *Note on a theorem of Nehari on Hankel forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970), no. 1, 103–105.
[17] Yan Ch., Chen X., Guo K., *Hankel operators and Hankel algebras*, Chinese Ann. Math. Ser. B **19** (1998), no. 1, 65–76.
[18] Zhu K., *Operator theory in function spaces*, 2nd ed., Math. Surveys Monogr., vol. 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
[19] Mirotin A. R., *On the general form of linear functionals on the Hardy spaces H^1 over compact Abelian groups and some of its applications*, Indag. Math. **28** (2017), no. 2, 451–462.

Кафедра математического
анализа и дифференциальных уравнений
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104
246019, г. Гомель, Беларусь
E-mail: amirotin@yandex.ru

Поступило 10 февраля 2020 г.