А. Б. Купавский, А. А. Полянский, О симплексах в графах диаметров в $\mathbb{R}^4$, *Матем. заметки*, 2017, том 101, выпуск 2, 232–246

DOI: 10.4213/mzm10611

Математические заметки

Том 101 выпуск 2 февраль 2017

УДК 519.112.7

О симплексах в графах диаметров в $\mathbb{R}^4$

А. Б. Купавский, А. А. Полянский

Граф G является *графом диаметров* в $\mathbb{R}^d$, если множество его вершин – это конечное подмножество $\mathbb{R}^d$ диаметра 1, а ребрами соединены пары вершин на расстоянии единица. В этой работе мы показываем, что в графе диаметров G в $\mathbb{R}^4$, содержащем полный подграф K на 5 вершинах, любой треугольник должен иметь с K общую вершину. В геометрической интерпретации данное утверждение говорит следующее. Пусть в $\mathbb{R}^4$ даны правильный единичный симплекс на 5 вершинах и правильный единичный треугольник. Тогда либо они имеют общую вершину, либо диаметр объединения множеств их вершин строго больше единицы.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: графы диаметров, гипотеза Шура.

DOI: 10.4213/mzm10611

1. Введение

Данная статья посвящена свойствам графов диаметров. *Диаметром* конечного множества в евклидовом пространстве называется наибольшее расстояние между точками этого множества. Граф G является *графом диаметров* в $\mathbb{R}^d$, если множество его вершин – это конечное подмножество $\mathbb{R}^d$ диаметра 1, а ребрами соединены пары вершин на расстоянии единица (т.е. на расстоянии диаметра). Отметим, что вместо множеств диаметра 1 можно рассматривать произвольные ограниченные множества, однако в результате мы получим в точности тот же класс графов, а с технической точки зрения нам удобно зафиксировать диаметр множества. Аналогичное определение можно дать в случае произвольного метрического пространства, в частности, в случае d-мерной сферы S^d_r радиуса r, и в этом случае диаметр множества вершин играет значительную роль.

Изучение свойств графов диаметров, в частности, мотивировано известной проблемой Борсука. В 1933 г. Борсук [1] поставил следующий вопрос: верно ли, что любое множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на $d+1$ частей строго меньшего диаметра? Положительный ответ на этот вопрос известен как гипотеза Борсука.

Работа первого автора частично поддержана Швейцарским Фондом Национальных Исследований (гранты 200021-137574 и 200020-14453) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 15-01-03530). Работа второго автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 15-01-03530, № 15-01-99563 А, № 15-31-20403 (мол_а_вед)).

Сам Борсук показал, что эта гипотеза верна на плоскости. Вскоре было доказано, что гипотеза верна в $\mathbb{R}^3$. Эта задача со временем стала одной из центральных в комбинаторной геометрии; ей посвящено множество статей (см., например, [2]–[6]). Ключевой вопрос, верна ли гипотеза для произвольного d, оставался открытым 60 лет, пока в 1993 г. Кан и Калаи [7] не построили конечное множество точек в размерности 2015, которое не допускает разбиение на 2016 частей меньшего диаметра. На данный момент наименьшая размерность контрпримера равна 64, что было показано в статье Йенриха и Брауэра [8], в которой они существенно использовали контрпример в $\mathbb{R}^{65}$, построенный А. Бондаренко [9].

Поскольку все известные контрпримеры к гипотезе были построены на конечных множествах точек, очень естественным выглядит изучение аналога гипотезы Борсука для конечных множеств точек. И эта гипотеза непосредственно связана со свойствами графов диаметров. А именно, вопрос Борсука для конечных множеств можно сформулировать следующим образом: верно ли, что любой граф диаметров G в $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет неравенству

$$\chi(G) \leqslant d+1,$$

где $\chi(G)$ – это хроматическое число графа, т.е. наименьшее число цветов, в которое можно раскрасить вершины графа так, чтобы никакие две соседние вершины не были раскрашены в один цвет.

Графы диаметров изучались далеко не только в контексте гипотезы Борсука. Другое важное направление – это экстремальные задачи в духе известной теоремы Турана. Теорема Турана говорит нам о том, каково максимальное число ребер в графе G на n вершинах, который удовлетворяет неравенству

$$\chi(G) \leqslant k.$$

В общем, одна из базовых характеристик того или иного класса графов $\mathscr{G}$ – это максимальное (или минимальное) число ребер, которое может иметь граф из класса. Естественное обобщение этого вопроса касается числа k-клик в графе. Эти вопросы, конечно, имеет смысл задать применительно также и к графам диаметров в $\mathbb{R}^d$ на n вершинах. Относительно числа ребер известно, что графы диаметров в $\mathbb{R}^2$ на n вершинах имеют не более n ребер [10], а в $\mathbb{R}^3$ – не более $2n-2$ ребер (это утверждение является гипотезой Васоньи, доказательство которой было независимо получено Грюнбаумом [11], Хеппешем [12] и Страшевичем [13]). Интересно то, что из этих утверждений легко (и чисто комбинаторно) следует гипотеза Борсука для конечных множеств точек в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно. В бо́льших размерностях максимальное число ребер становится квадратичным (см. статью Эрдеша [14], в которой была получена асимптотика числа ребер для растущего числа вершин n и фиксированной размерности d); более того, известен точный максимум числа ребер для произвольного фиксированного d и достаточно больших n (см. статью Сванепула [15]).

Задача о максимальном числе k-клик в графах диаметров в $\mathbb{R}^d$, напротив, далека от своего решения. Однако в этом направленииа было получено несколько важных результатов. Для удобства введем следующее обозначение: обозначим $D_d(l,n)$ максимальное число клик размера l в графе диаметров на n вершинах в $\mathbb{R}^d$. В статье [16] обсуждалась следующая гипотеза, поставленная Шуром.

Гипотеза 1 (Шур, [16]). *Максимальное число полных подграфов размера d (d-клик) в графе диаметров на n вершинах в $\mathbb{R}^d$ равно n при $n \geqslant d+1$. Иными словами,*

$$D_d(d,n) = n \qquad \text{при} \quad n \geqslant d+1.$$

Как видно, случай $d = 2$ соответствует результату Хопфа и Паннвица из работы [10]. В работе [16] гипотеза Шура была доказана для $d = 3$. Кроме того, в [16] было доказано, что $D_d(d+1,n) = 1$ при $n \geqslant d+1$. Отметим, что k-клика в графе диаметров соответствует в $\mathbb{R}^d$ вершинам правильного $(k-1)$-мерного симплекса $\Delta^{(k-1)}$ со стороной единица.

Дальнейшее продвижение в гипотезе Шура получили Морич и Пах в [17], показавшие, что гипотеза верна в следующем специальном случае.

Теорема 1 (теорема 2 из [17]). *Если в графе диаметров на n вершинах в $\mathbb{R}^d$ любые две d-клики имеют не менее $d-2$ общих вершин, то число d-клик в этом графе не превосходит n.*

Купавский в статье [18] получил следующий результат, который позволил закончить описание функции $D_4(l,n)$ для различных l и достаточно больших n.

Теорема 2 (теорема 5 из [18]). 1. *Для $n \geqslant 52$ имеем*

$$D_4(2,n) = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil + 1, & \text{если } n \not\equiv 3 \bmod 4, \\ \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil, & \text{если } n \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

(*В следствии* 3 *из статьи* [15] *это же равенство было доказано для достаточно больших n.*)

2. *Для достаточно больших n имеем*

$$D_4(3,n) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)^2}{4} + n, & \text{если } n \equiv 1 \bmod 4, \\ \dfrac{(n-1)^2}{4} + n - 1, & \text{если } n \equiv 3 \bmod 4, \\ \dfrac{n(n-2)}{4} + n, & \text{если } n \equiv 0 \bmod 2. \end{cases}$$

3. *Для всех $n \geqslant 5$ имеем $D_4(4,n) = n$ (гипотеза Шура в $\mathbb{R}^4$).*

Также отметим, что другое доказательство гипотезы Шура было получено Буланкиной и др. в работе [19]. Возвращаясь к статье [17], отметим, что из теоремы 1 видна прямая связь между гипотезой Шура и вопросом о том, сколько общих вершин обязаны иметь две d-клики в графе диаметров в $\mathbb{R}^d$. На самом деле, совсем неочевиден даже факт, что выпуклые оболочки двух d-клик в графе диаметров в $\mathbb{R}^d$ обязаны пересекаться. В статье [17] была сформулирована следующая естественная в свете теоремы 1 гипотеза.

Гипотеза 2 (гипотеза 3 из [17]). *Любые два правильных единичных симплекса на d вершинах в $\mathbb{R}^d$ обязаны иметь $d-2$ общие вершины, если диаметр множества, являющегося объединением их вершин, равен единице.*

Интересно, что вопрос подобного типа независимо ставился В. Л. Дольниковым (в рамках дискуссии на тему гипотезы Борсука в $\mathbb{R}^4$). А именно, Дольников задавал следующий, существенно более слабый, чем гипотеза 2, вопрос: верно ли, что любые две 4-клики в графе диаметров в $\mathbb{R}^4$ имеют общую вершину. Что интересно, Купавский доказал гипотезу Шура в $\mathbb{R}^4$, не ответив положительно на вопрос Дольникова (и, соответственно, не доказав гипотезу 2 в $\mathbb{R}^4$). Совсем недавно авторам удалось доказать гипотезу 2 в $\mathbb{R}^d$ и получить аналогичное утверждение для графов диаметров на сфере S^d_r с $r > 1/\sqrt{2}$, тем самым подтвердив гипотезу Шура (гипотеза 1) в $\mathbb{R}^d$ и на S^d_r:

Теорема 3 (теорема 5 из статьи [20]). *Гипотеза Шура* (*и гипотеза* 2) *выполнена*

1) *в пространстве* $\mathbb{R}^d$;
2) *на сфере* S^d_r *радиуса* $r > 1/\sqrt{2}$.

Как мы уже упомянули выше, вопросы в духе поставленного Дольниковым, имеют отношение к гипотезе Борсука. Кроме того, нам кажется, что подобные вопросы являются довольно фундаментальными для понимания геометрии евклидова пространства. Подобные вопросы похожи, скажем, на некоторый двудольный аналог теоремы Шутте (см., например, изящное доказательство теоремы Шутте, придуманное Барани [21]). Теорема Шутте дает точную нижнюю оценку отношения максимального расстояния к минимальному в множестве из $d+2$ точек в $\mathbb{R}^d$. Следующий, очень общий, вопрос был поставлен в статье [17].

Проблема 1 (проблема 6 из [17]). *Для данного d описать все такие пары целых чисел k, l, что из любого множества из* (*различных*) *k красных и l синих точек в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать такую красную точку r и синюю точку b, что $\|r-b\|$ не меньше, чем наименьшее расстояние между двумя точками одного цвета.*

Отметим, что подобный вопрос также имеет смысл задать в случае, когда красное и синее множество являются правильными единичными симплексами на k и l вершинах соответственно. В статье [20] мы рассмотрели следующий пример: два правильных единичных симплекса в $\mathbb{R}^d$, один на $d+1$ вершине, другой на $[(d+1)/2]$ вершинах, объединение которых является множеством диаметра единица. Именно этот пример мотивировал нас поставить следующий вопрос.

Гипотеза 3 (гипотеза 11 из статьи [20]). *Даны два единичных симплекса в $\mathbb{R}^d$, один из них на $d+1$ вершине, другой на $[(d+1)/2]+1$ вершине. Тогда либо у них есть общая вершина, либо диаметр множества, состоящего из их вершин, имеет строго больший единицы.*

В следующем разделе мы сформулируем и обсудим новые результаты, а в пункте 3.1 мы докажем основную теорему.

2. Новые результаты

Нам потребуется следующее определение.

Определение 1. *Симплекс Рело* Δ в $\mathbb{R}^d$ – это тело, образованное пересечением $B_i = B^d_1(\mathbf{v}_i)$ – шаров единичного радиуса с центрами в $\mathbf{v}_i$, $i=1,\dots,d+1$, где $\mathbf{v}_i$ – вершины единичного симплекса в $\mathbb{R}^d$. *Тетраэдром Рело* будем называть симплекс Рело для $d=3$.

Иными словами, симплекс Рело – это множество возможных положений для точки v при условии, что она вместе с единичным симплексом, на котором построен симплекс Рело, образует множество диаметра единица.

Теорема 4. *Пусть дан симплекс Рело Δ на пяти вершинах $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$. Пусть внутри симплекса Рело выбраны три точки A, B, C, не совпадающие с вершинами. Тогда среди них найдутся такие две (скажем, A и B), что выполнены следующие два условия:*

1) *найдется такое i, что $\|A - B\| < \|A - \mathbf{v}_i\|$;*
2) *найдется такое j, что $\|A - B\| < \|B - \mathbf{v}_j\|$.*

Если теорему 4 применить к правильному единичному треугольнику ABC, получим такое следствие.

Следствие 1. *В четырехмерный симплекс Рело нельзя поместить правильный треугольник с единичной стороной так, чтобы никакая из вершин треугольника не совпадала ни с одной из вершин симплекса. Иными словами, гипотеза 3 верна в $\mathbb{R}^4$.*

Следствие 1 позволяет полностью решить проблему 1 в $\mathbb{R}^4$ в случае, когда множества являются правильными симплексами. А именно, пусть $k \geqslant l$. Тогда множество пар натуральных чисел, описание которого требуется для решения проблемы 1, устроено следующим образом: должно быть выполнено неравенство $k \geqslant l \geqslant 4$ или $k = 5, l = 3$. То, что данные пары удовлетворяют условиям, следует из следствия 1 и теоремы 3. Для того, чтобы понять, что других пар нет, нужно, во-первых, отметить, что пара $k = 5$, $l = 2$ нам не подходит в силу упомянутого перед гипотезой 3 примера из статьи [20]. Во-вторых, нужно проверить пару $k = 4$, $l = 3$. В статье [17] (утверждение 2.1) было показано, что данная пара также не подходит.

Наконец, отметим, что теорема 4 позволяет получить довольно короткое доказательство гипотезы Шура в $\mathbb{R}^5$, основанное только на результатах и идеях из статей [18] и [19]. Изначально, приложение к гипотезе Шура было основной причиной для того, чтобы формулировать теорему 4 для произвольного (а не единичного, как в следствии 1) треугольника ABC. После того, как нами было найдено доказательство гипотезы Шура в общем случае, это применение несколько потеряло смысл. Однако мы доказываем теорему 4, а не ее следствие, потому что доказательство усложняется незначительно, а утверждение теоремы 4 гораздо более гибкое. В частности, с помощью теоремы 4 мы можем получить дальнейшее продвижение в проблеме 1 в случае, когда $k = 5, l = 3$ и (только) множество красных точек является правильным симплексом.

3. Доказательство теоремы 4

Отметим, что в этом разделе, для удобства, сторона симплекса Рело будет равна не единице, а $\sqrt{2}$. В доказательстве мы будем часто использовать координаты различных точек симплекса Рело, и поэтому нам понадобится удобный способ задать симплекс Рело в координатах. Хорошо известно, что вершины правильного симплекса на пяти вершинах можно задать в $\mathbb{R}^5$ следующим образом: $\mathbf{v}_i = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где $x_i = 1$, а остальные координаты равны нулю (здесь и далее мы будем обозначать множество $\{1,\dots,5\}$ через J). В этом случае симплекс Рело на вершинах $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_5$ лежит в гиперплоскости L, которая задается уравнением

$$L=\left\{\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_5):\sum_{i\in J}x_i=1\right\}.$$

Далее мы будем работать только в рамках этой гиперплоскости. Поскольку у нас будут активно использоваться как точки, так и их координаты, то мы будем выделять точки жирным шрифтом (или обозначать заглавными буквами).

3.1. Редукция к вопросу о двух точках. Наша первая цель – это получить и описать некоторое подмножество Δ, в которое обязательно попадут две точки из A, B, C. Для каждого $i\in J$ обозначим через S_i сферу с центром $\mathbf{v}_i$ радиуса $\sqrt{2}$, координаты точек которой задаются уравнением

$$S_i=\left\{\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_5):\sum_{j\in J}x_j^2=1+2x_i\right\}. \tag{3.1}$$

Сфера S_i ограничивает шар B_i, точки которого задаются неравенством

$$B_i=\left\{\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_5):\sum_{j\in J}x_j^2\leqslant 1+2x_i\right\}. \tag{3.2}$$

Напомним то, что симплекс Рело Δ задается в L пересечением шаров B_i, и то, что мы работаем с тремя точками $A,B,C\in\Delta$.

Лемма 1. *Пусть* $A=(a_1,\dots,a_5)$, $B=(b_1,\dots,b_5)$, $C=(c_1,\dots,c_5)$. *Тогда найдутся такие различные координатные позиции* $i,j,k\in J$, *что*

$$a_i+a_j+a_k\leqslant 1,\qquad b_i+b_j+b_k\leqslant 1,\qquad c_i+c_j+c_k\leqslant 1. \tag{3.3}$$

Доказательство леммы 1. Мы будем пользоваться следующими фактами.

(i) Если $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\Delta$ и $x_1=\max_{i\in J}x_i$, то $x_1+x_2>0$.

Предположим противное. Тогда в силу того, что $x_1=\max_{i\in J}x_i$, и того, что $\mathbf{x}\in L$, получаем, что

$$x_1\geqslant\frac{x_3+x_4+x_5}{3}\geqslant\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{3}\geqslant\frac{1}{3}\,.$$

Значит, $x_2\leqslant -1/3$. Подставляя неравенства на координаты $\mathbf{x}$ в неравенство (3.2) для B_2, получаем

$$\frac{1}{3}\geqslant 1+2x_2\geqslant\sum_{j\in J}x_j^2\geqslant x_1^2+x_2^2+3\left(\frac{x_3+x_4+x_5}{3}\right)^2\geqslant\frac{5}{9}\,,$$

противоречие.

(ii) Если $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\Delta$, то $x_1\leqslant 1$.

Предположим противное, тогда $4\min_{i\in J}x_i\leqslant x_2+x_3+x_4+x_5<0$. Отсюда, используя (3.2), получаем

$$1>1+2\min_{i\in J}x_i\geqslant\sum_{j\in J}x_j^2\geqslant 1,$$

противоречие.

Перейдем к доказательству леммы. Рассмотрим позиции наибольших координат точек A, B, C.

Пусть у двух точек эти позиции совпадают, и, значит, различных позиций не более двух. Без ограничения общности мы можем считать, что это первая и вторая координаты. Тогда ввиду факта (i), координаты точки A, B, C будут удовлетворять неравенству $x_1 + x_2 > 0$, т.е. неравенство (3.3) выполняется для $i = 3$, $j = 4$, $k = 5$.

Пусть теперь позиции наибольших координат точек A, B, C различны:

$$a_1 = \max_{i \in J} a_i, \qquad b_2 = \max_{i \in J} b_i, \qquad c_3 = \max_{i \in J} c_i.$$

Если выполняется одно из неравенств $a_2 + a_3 \geqslant 0$, $b_1 + b_3 \geqslant 0$, $c_1 + c_2 \geqslant 0$, то по аналогии с предыдущим случаем условие (3.3) будет выполнено. Предположим, что ни одно из этих трех неравенств не выполняется. Имеем

$$a_1 + a_2 + a_3 < 1, \qquad b_1 + b_2 + b_3 < 1, \qquad c_1 + c_2 + c_3 < 1$$

ввиду факта (ii), и условие (3.3) выполнено для $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$. Лемма 1 доказана.

Введем обозначения для некоторых плоскостей и полупространств, которые мы будем часто использовать. Для каждого i обозначим через π_i и π_i^+ следующие гиперплоскость и полупространство:

$$\begin{aligned} \pi_i &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5) : x_i = 0\}, \\ \pi_i^+ &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5) : x_i \geqslant 0\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Нам потребуются также

$$\begin{aligned} \pi_{123} &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5) : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}, \\ \pi_{123}^+ &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5) : x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1\}, \\ \pi_{45} &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5) : x_4 = x_5\}, \\ \pi_{45}^+ &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5) : x_4 \geqslant x_5\}, \\ \pi_{45}^- &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5) : x_4 \leqslant x_5\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Применяя лемму 1, без ограничений общности можем считать, что координаты точек A, B, C принадлежат множеству π_{123}^+. Применяя принцип Дирихле, без ограничений общности будем считать, что A, B лежат в π_{45}^+.

Обозначим через Δ_{45} и Δ_{54} множества точек

$$\Delta_{45} = \Delta \cap \pi_{45}^+ \cap \pi_{123}^+, \qquad \Delta_{54} = \Delta \cap \pi_{45}^- \cap \pi_{123}^+.$$

Граница Δ_{45} образована плоскостью π_{45}, плоскостью π_{123} и сферами S_1, S_2, S_3 и S_5. Нетрудно заметить, что пересечение нескольких граничных поверхностей будет либо сферой, либо плоскостью. Сфера S_4 не участвует в границе множества Δ_{45}, поскольку для любой точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ из Δ_{45} имеем $x_4 \geqslant 0$, в то время как любая точка, за исключением вершин Δ, лежащая на пересечении Δ и S_4, имеет отрицательную четвертую координату. Предположим, что $x_4 > 0$ для некоторой точки $\mathbf{x} \in \partial\Delta_{45}$. Посмотрим на неравенства (3.2). Если у $\mathbf{x}$ нет отрицательных координат, то неравенство всегда будет строгим (для этого нужно использовать неравенства $x_i^2 \leqslant x_i$), кроме, может быть, случая вершин $\mathbf{v}_i$. Если же у $\mathbf{x}$ есть отрицательная координата, скажем, x_1, то имеем $\sum_{i\in J} x_i^2 \leqslant 1+2x_1 < 1+2x_4$. Однако для того, чтобы $\mathbf{x}$ лежала на сфере S_4, должно выполняться равенство для S_4 в (3.1). Отметим, что из аналогичных соображений $\Delta_{45}\cap S_5\cap \pi_{45}$ не содержит точек, отличных от вершин симплекса.

Мы будем использовать разбиение множества Δ_{45} на грани (или клетки, по аналогии с клеточными комплексами) разной размерности. Каждая грань задается уравнениями и неравенствами. Если мы ограничимся на поверхность (далее мы будем называть такую поверхность минимальной), заданную системой уравнений, фигурирующих в определении грани, то на данной поверхности все грани будут открытыми множествами. Иными словами, все неравенства в определении всех граней должны быть строгими. Таким образом, множество Δ_{45} без границы будет гранью размерности 4, множества точек границы Δ_{45}, лежащие (только) на сферах S_1, S_2, S_3, S_5 или плоскостях π_{123}, π_{45} будут гранями размерности 3 и т.д. В дальнейшем мы дадим подробное описание всех граней Δ_{45}.

3.2. Проекции точек на плоскости. Перед тем как продолжить доказательство теоремы, мы напомним читателю, как вычислять координаты проекции точки на плоскость. Пусть дана точка $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5)$ и некоторая плоскость π.

В некоторых случаях наиболее удобным описанием проекции является то, что расстояние от $\mathbf{x}$ до точки проекции минимально среди всех расстояний между точками π и точкой $\mathbf{x}$. Например, пусть дана точка $\mathbf{x} \in L$ и нам нужно найти проекцию на плоскость π, являющуюся пересечением L и плоскости π', которая задается уравнениями $x_1 = x_2 = x_3$. Тогда нетрудно проверить, что проекцией будет являться точка $\mathbf{x}'$ с координатами

$$\mathbf{x}' = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, x_4, x_5\right).$$

Зачастую однако такой способ вычисления затруднителен. Поэтому мы приведем другой алгоритм нахождения проекции. Пусть плоскость $\pi \subset \mathbb{R}^d$ коразмерности k задается пересечением плоскостей $\pi^1, \dots, \pi^k$, уравнения которых имеют вид

$$\pi^i = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{n}_i, \mathbf{z}\rangle + c_i = 0\}.$$

Здесь $\mathbf{n_i}$ – это нормальный вектор к плоскости π_i. Вычислим матрицу Грама $\mathbf{G}$ векторов $\mathbf{n}_i$, которая задается следующим образом: $G_{ij} = \langle \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j\rangle$. Чтобы получить точку проекции $\mathbf{x}$ на π, нужно из $\mathbf{x}$ вычесть вектор $\mathbf{y}$, лежащий в плоскости, задаваемой векторами $\mathbf{n_1}, \dots, \mathbf{n_k}$. Координаты вектора $\mathbf{y}$ в базисе $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k$, как нетрудно проверить, находятся следующим образом:

$$\mathbf{y} = (\langle \mathbf{n_1}, \mathbf{x}\rangle + c_1, \dots, \langle \mathbf{n_k}, \mathbf{x}\rangle + c_k)\mathbf{G}^{-1}.$$

Наконец, проекция $\mathbf{x}'$ вектора $\mathbf{x}$ будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k} y_i \mathbf{n}_i.$$

Отметим, что при вычислении проекции нам всегда нужно учитывать, что мы работаем в гиперплоскости L, хоть мы и пользуемся координатами объемлющего пространства $\mathbb{R}^5$.

3.3. Перемещение точки по граням. Мы получили и описали подмножество Δ_{45}, в которое попали точки A, B. Далее наша стратегия будет примерно следующей: мы зафиксируем точку A и будем будем перемещать точку B внутри Δ_{45} так, что будут выполняться следующие условия. Во-первых, расстояние между точками будет не уменьшаться. Во-вторых, после каждого перемещения точка B будет оказываться на границе меньшей размерности. Следующее развитие ситуации можно считать идеальным: на каком-то из шагов расстояние увеличилось, и в итоге мы пришли в какую-то вершину $\mathbf{v}_i$. Это даст в точности утверждение теоремы 4. Однако, в точности такого развития добиться не получится, у нас будут возникать некоторые затруднительные случаи, которые придется анализировать отдельно.

Для того, чтобы показать существование описанного выше перемещения, мы неоднократно будем использовать следующую лемму.

Лемма 2. *Рассмотрим замкнутое полупространство π^+ в $\mathbb{R}^d$, заданное гиперплоскостью π. Пусть S – это сфера с центром в точке $\mathbf{v}$, где $\mathbf{v} \in \pi$. Пусть даны область Ω, где $\Omega \subset S \cap \pi^+$ и Ω – открытое множество относительно S, а также точки $X \in \pi^+$ и $Y \in \Omega$. Тогда найдется такая точка $Y' \in \partial\Omega$ (граница $\partial\Omega$ рассматривается относительно S), что выполняется*

- $\|X - Y\| < \|X - Y'\|$, *если* $X \neq \mathbf{v}$;
- $\|X - Y\| = \|X - Y'\|$, *если* $X = \mathbf{v}$.

Доказательство. Равенство из утверждения леммы очевидно следует из того, что Ω и $\partial\Omega$ лежат на S. Перейдем к доказательству неравенства. Рассмотрим двумерную плоскость γ, проходящую через точки $\mathbf{v}$, X, Y. Прямая, проходящая через $\mathbf{v}$, Y, разбивает плоскость на две замкнутые полуплоскости γ^+, γ^-. Пусть $X \in \gamma^+$. В γ^- найдется по крайней мере одна точка $Y' \in \partial\Omega$ (которая, конечно, будет отличной от Y). Имеем

$$\langle \mathbf{v}X, \mathbf{v}Y \rangle < \langle \mathbf{v}X, \mathbf{v}Y' \rangle$$

(здесь учитываем, что X, Y, Y' лежат в одном полупространстве π^+), значит,

$$\|X - Y\| < \|X - Y'\|.$$

Лемма 2 доказана.

Далее мы изучим возможные расположения точки B на гранях Δ_{45}. Как уже было сказано выше, с помощью леммы 2 мы будем пытаться передвинуть точку B на грань меньшей размерности так, чтобы расстояние до точки A от B не уменьшалось. Кроме того, мы будем контролировать случаи, когда расстояние остается неизменным (опять же с помощью леммы 2).

Случай 1. Точка B принадлежит внутренности Δ_{45}. Тогда заменим B на точку пересечения луча AB с границей Δ_{45}, при этом $\|A - B\|$ увеличится.

Случай 2. Точка B лежит на грани Γ_1, минимальная поверхность которой – это пересечение одной или двух плоскостей, ограничивающих Δ_{45}. Здесь и далее через π_Γ, S_Γ будем обозначать минимальную плоскость и минимальную сферу (если такая имеется), содержащую грань Γ. Найдем проекцию A' точки A на π_{Γ_1}, содержащую грань Γ_1. Найдем точку пересечения луча $A'B$ за точкой B с границей этой грани и заменим B на эту точку. Новая точка B будет лежать на грани меньшей размерности, а расстояние $\|A' - B\|$ увеличится. По теореме Пифагора $\|A - B\|$ тоже увеличится.

Случай 3. Точка B лежит на грани Γ_2, минимальная поверхность которой – это пересечение нескольких (от одной до трех) сфер, ограничивающих Δ_{45}. Рассмотрим S_{Γ_2}, π_{Γ_2}. Центр S_{Γ_2} лежит в π_4, так как центры всех сфер, ограничивающих Δ_{45}, лежат в π_4. Найдем проекцию A' точки A на плоскость π_{Γ_2} (см. п. 3.2). Четвертая координата точки A' будет равна четвертой координате точке A, и следовательно, $A' \in \pi_4^+$.

Применяя лемму 2 к полупространству π_4^+ и множеству Γ_2, лежащему на сфере S_{Γ_2}, а в качестве объемлющего пространства используя π_{Γ_2}, получаем, что B можно передвинуть на границу Γ_2 на сфере S_{Γ_2}, т.е. на грань меньшей размерности. При этом $\|A' - B\|$ (а следовательно, и $\|A - B\|$) не уменьшится. Более того, расстояние останется прежним, только если у A четвертая (следовательно, и пятая) координата равнялась нулю, т.е. точка A лежала в плоскости $\pi_4 \cap \pi_5 = \pi_{123} \cap \pi_{45}$.

Более того, если проанализировать ситуацию чуть более внимательно, то можно уточнить положение точки A, при котором расстояние при передвижении точки B не увеличится. А именно, если Γ_2 лежит на одной сфере, то в центр сферы S_{Γ_2} попадает только центр исходной сферы (он с ним совпадает). Если Γ_2 лежит на пересечении сфер S_i, S_j, то в центр проецируются точки

$$\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) : x_i + x_j = 1,\, x_k = 0,\, k \neq i, j\} \cap \Delta_{45}.$$

Это, в частности, означает, что если одна из сфер в пересечении – это S_5, то в центр S_{Γ_2} могут попасть только вершины. Наконец, в центр сферы $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ проецируются все точки плоскости $\pi_4 \cap \pi_5$.

Случай 4. Точка B лежит на грани Γ_3, минимальная поверхность которой – это пересечение сферы S_i, $i = 1, 2$ или 3, и плоскости π_{45}. Рассмотрим S_{Γ_3}, $\pi_{\Gamma_3} = \pi_{45}$. Центр $\mathbf{v}_1$ сферы S_{Γ_3} лежит в π_4. Проекция A' точки A на плоскость π_{Γ_3} попадет в π_4^+, поскольку четвертая (и пятая) координата проекции равна $(a_4 + a_5)/2$, а это выражение неотрицательное.

Применяя лемму 2, получаем, что B можно передвинуть на грань меньшей размерности и $\|A' - B\|$ (а, следовательно, и $\|A - B\|$) не уменьшится. Более того, расстояние останется неизменным, только если у точки A первые три координаты равны первым трем координатам $\mathbf{v}_i$ (ведь они не изменятся при проекции), а, значит, $A = \mathbf{v}_i$ (см. факт (ii) из доказательства леммы 1). Значит, если A отлично от $\mathbf{v}_i$, расстояние увеличится.

Случай 5. Точка B лежит на грани Γ_4, минимальная поверхность которой – это пересечение сфер S_i, S_j, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, и плоскости π_{45}. Рассмотрим S_{Γ_4},

$$\pi_{\Gamma_4} = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) : x_i = x_j,\, x_4 = x_5\}.$$

Центр S_{Γ_4} лежит в π_4. Найдем проекцию A' точки A на π_{Γ_4}. Тогда $A' \in \pi_4^+$, поскольку опять же четвертая (и пятая) координата проекции равна $(a_4 + a_5)/2$, а это выражение неотрицательное.

Применяя лемму 2, получаем, что B можно передвинуть на грань меньшей размерности и $\|A' - B\|$ (а, следовательно, и $\|A - B\|$) не уменьшится. Более того, расстояние останется неизменным, только если

$$A \in \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) : x_i + x_j = 1,\, x_k = 0,\, k \neq i, j\} \cap \Delta_{45}.$$

Случай 6. Точка B лежит на грани Γ_5, минимальная поверхность которой – это пересечение сферы S_i, $i = 1, 2, 3, 5$, и плоскости π_{123}. Рассмотрим S_{Γ_5}, $\pi_{\Gamma_5} = \pi_{123}$. Центр S_{Γ_5} лежит в π_4 при $1 \leqslant i \leqslant 3$, при $i = 5$ центр S_{Γ_5} лежит в плоскости $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) : x_4 = -1/2\}$ (см. координаты проекции точки чуть ниже). Найдем проекцию A' точки A на плоскость π_{Γ_5}. Она будет иметь координаты

$$A' = \left(a_1 + \frac{1}{3}(a_4 + a_5), a_2 + \frac{1}{3}(a_4 + a_5), a_3 + \frac{1}{3}(a_4 + a_5), \frac{1}{2}(a_4 - a_5), \frac{1}{2}(a_5 - a_4)\right).$$

Значит, A' лежит в полупространстве π_4^+ и, тем более, в полупространстве $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) : x_4 > -1/2\}$. По лемме 2 получаем, что B можно передвинуть на грань меньшей размерности и $\|A' - B\|$ (а, следовательно, и $\|A - B\|$) не уменьшится. Более того, как несложно проверить, расстояние останется неизменным, только если $A = \mathbf{v}_i$ (и то только в случае $1 \leqslant i \leqslant 3$).

Случай 7. Точка B лежит на грани Γ_6, минимальная поверхность которой – это пересечение сфер S_i, S_j, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, и плоскости π_{123}. Без ограничения общности предположим, что $i = 1$, $j = 2$. Этот случай неожиданно простой, потому что в этом пересечении лежит только точка $\mathbf{v}_3$. Действительно, у любой точки $\mathbf{x}$, лежащей на $S_1 \cap S_2$, координаты x_1, x_2 неположительные. С другой стороны, координата x_3 у любой точки из Δ всегда строго меньше единицы, если точка отлична от вершины $\mathbf{v}_3$. Таким образом, мы можем получить $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ среди точек на сфере $S_1 \cap S_2$ только у точки $\mathbf{v}_3$. Поэтому этот случай сразу приводит нас к желаемому результату.

Случай 8. Точка B лежит на грани Γ_7, минимальная поверхность которой – это пересечение сферы S_i, $i = 1, 2, 3, 5$, и плоскостей π_{123}, π_{45}. Рассмотрим S_{Γ_7},

$$\pi_{\Gamma_7} = \pi_{123} \cap \pi_{45} = \pi_4 \cap \pi_5.$$

Центр S_{Γ_7} лежит в π_4. Проекция A' точки A на плоскость π_{Γ_7} имеет координаты

$$A' = \left(a_1 + \frac{1}{3}(a_4 + a_5), a_2 + \frac{1}{3}(a_4 + a_5), a_3 + \frac{1}{3}(a_4 + a_5), 0, 0\right).$$

Конечно, $A \in \pi_4^+$.

По лемме 2 получаем, что B можно передвинуть на грань меньшей размерности, и $\|A' - B\|$ (а, следовательно, и $\|A - B\|$) не уменьшится. Более того, как несложно проверить, расстояние останется неизменным, только если $A = \mathbf{v}_i$ (и то только в случае $1 \leqslant i \leqslant 3$).

Случай 9. Точка B лежит на грани Γ_8, минимальная поверхность которой – это пересечение сфер S_i, S_5, $1 \leqslant i \leqslant 3$, и плоскости π_{123}. Без ограничения общности предположим, что $i = 1$. Рассмотрим S_{Γ_8},

$$\pi_{\Gamma_8} = \pi_{123} \cap \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) : x_1 = x_5\}.$$

Найдем проекцию A' точки A на плоскость π_{Γ_8}. Она будет иметь координаты

$$A' = \left(\frac{1}{7}(3a_1 - a_4 + 3a_5), a_2 + \frac{2}{7}(a_1 + 2a_4 + a_5),\right.$$
$$\left. a_3 + \frac{2}{7}(a_1 + 2a_4 + a_5), -\frac{1}{7}(3a_1 - a_4 + 3a_5), \frac{1}{7}(3a_1 - a_4 + 3a_5)\right). \quad (3.6)$$

Центр S_{Γ_8}– проекция точки с координатами $(1/2, 0, 0, 0, 1/2)$, т.е. проекция – это точка $(3/7, 2/7, 2/7, -3/7, 3/7)$. Рассмотрим полупространство $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) : x_4 \geqslant -3/7\}$ и покажем, что любая точка $A \in \Delta_{45}$ после проекции на плоскость π_{Γ_8} попадает в это полупространство. Допустим, что

$$-\frac{1}{7}(3a_1 - a_4 + 3a_5) \leqslant -\frac{3}{7}.$$

Это равносильно условию $a_1 + a_5 \geqslant 1 + a_4/3$. Тогда имеем $a_2 + a_3 + a_4 \leqslant -a_4/3$, т.е. $a_2 + a_3 \leqslant -4a_4/3$. Пусть без ограничения общности $a_2 \leqslant -2a_4/3$. Подставляя неравенства $a_1 \geqslant 1 + a_4/3 - a_5 \geqslant 0$ (так как $a_5 \leqslant 1$), $a_4 \geqslant a_5$, $a_2 \leqslant -2a_4/4$ в неравенство (3.2) для B_2, получаем

$$1 - \frac{4}{3}a_4 \geqslant 1 + 2a_2 \geqslant \sum_{i \in J} a_i^2 \geqslant \left(1 + \frac{a_4}{3} - a_5\right)^2 + \sum_{i=2}^{5} a_i^2$$
$$\geqslant \left(1 - \frac{2a_4}{3}\right)^2 + \sum_{i=2}^{5} a_i^2 \geqslant 1 - \frac{4}{3}a_4 + \sum_{i=2}^{5} a_i^2.$$

Данная цепочка неравенств может быть только равенством, и то в случае, когда $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Значит, все точки $A \in \Delta_{45}$, за исключением вершины $\mathbf{v}_1$, после проекции попадают в открытое полупространство $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) : x_4 > -3/7\}$, и только точка $\mathbf{v}_1$ попадает в центр сферы S_{Γ_8}.

Из леммы 2 получаем, что B можно передвинуть на грань меньшей размерности, и $\|A' - B\|$ (а, следовательно, и $\|A - B\|$) не уменьшится. Более того, расстояние останется неизменным, только если $A = \mathbf{v}_1$.

Случай 10. Выше мы рассмотрели все случаи, когда точка B попадала в грани положительной размерности. Однако, остаются еще грани Δ_{45} нулевой размерности, т.е. точки. Большинство этих точек – это вершины симплекса Рело (точки $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_5$). Однако, как несложно проверить, будет еще одна точка (и только она). Это точка пересечения $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \pi_{45}$. Иными словами, это середина дуги, соединяющая вершины $\mathbf{v}_4$ и $\mathbf{v}_5$.

Для начала проверим, что других точек, отличных от указанных выше, нет. Как мы помним, плоскость π_{45} и сфера S_5 пересекаются только по вершинам симплекса (см. предпоследний абзац п. 3.1). В плоскости $\pi_{123} \cap \pi_{45}$ мы имеем треугольник Рело на вершинах $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, поэтому никаких новых нульмерных граней там не возникает. Более того, во всей плоскости π_{123} есть только эти три вершины. Действительно, пересечение $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \pi_{123}$ пусто, а пересечение $S_i \cap S_j \cap S_5 \cap \pi_{123}$ состоит из вершины $\mathbf{v}_k$, где i, j, k – это различные индексы из $\{1, 2, 3\}$, взятые в произвольном порядке. Таким образом, мы разобрали случаи пересечения нескольких поверхностей, среди которых присутствует π_{123} или $S_5 \cap \pi_{45}$. Значит, у нас остается всего две возможных конфигурации: уже указанная $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \pi_{45}$ и $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_5$, которая даст в пересечении вершину $\mathbf{v}_4$.

Итак, пусть B попала в середину дуги $\mathbf{v}_4\mathbf{v}_5$, являющейся пересечением сфер S_1, S_2, S_3. Спроецируем точку A на плоскость $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) : x_1 = x_2 = x_3\}$. Рассмотрим полупространство π_4^+. Проекция A' точки A, конечно, же, попадет в это полупространство. С другой стороны, центр сферы $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ лежит в плоскости π_4.

Поэтому мы можем применить лемму 2, и передвинуть точку B в одну из вершин $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_5$ так, чтобы расстояние до A', а, следовательно, и до A, не уменьшилось. Более того, расстояние останется неизменным только в случае, если A лежит в плоскости $\pi_4 \cap \pi_5 = \pi_{123} \cap \pi_{45}$.

3.4. Движения без увеличения расстояния и завершение доказательства теоремы 4. Итак, вернемся к нашей изначальной задаче. Нам даны три точки A, B, C внутри множества $\Delta_{45} \cup \Delta_{54}$, и нам требуется доказать, что среди них найдется такая пара точек (скажем, A, B), что мы, с одной стороны, можем передвинуть и A, и B в вершину симплекса Рело так, что расстояние между точками возрастет. Вторую точку мы при этом не будем трогать.

Из принципа Дирихле получаем, что две точки, скажем, A, B, попали в Δ_{45}. Пусть мы должны перемещать точку B, не меняя положения A. Мы последовательно применяем одно из движений, описанных в предыдущем пункте, к точке B. Точка B попадает на грани все меньшей и меньшей размерности, и в итоге приходит в вершину симплекса, а расстояние между точкой A и точкой B не уменьшается. Если был хотя бы один шаг, на котором расстояние строго возросло, то теорема 4 доказана.

Нам остается разобрать случай, когда расстояние между точкой A и B после движения остается неизменным. Такое возможно (см. п. 3.4) в случаях 3, 5, 10. Это значит, что точки A и B *изначально* находились в одном из положений, описанных в этих случаях (иначе расстояние при движении возросло при первом же движении точки B). Проанализируем подробней все возможные конфигурации точек A, B. Случаи 3, 5, 10 сводятся к следующим двум конфигурациям:

I) точка A лежит на отрезке $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j$, где $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, а точка B лежит на сфере $S_i \cap S_j$;

II) точка A лежит в плоскости $\pi_4 \cap \pi_5$, а точка B лежит на дуге $\mathbf{v}_4\mathbf{v}_5$, т.е. на сфере $S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

Первый вывод, который можно сделать, – это то, что точка A в любом случае *изначально* лежит на плоскости π_{45}. Значит, она попадает в одну из частей Δ_{45}, Δ_{54} с точкой C. Применяя те же рассуждения к точкам A и C, мы можем сделать вывод, что и эта пара должна быть изначально в стабильном положении, описываемом конфигурациями I), II).

Здесь важно отметить, что мы априори не знаем, какую из точек A, C нам разрешено перемещать. Однако, если разрешено перемещать точку A и ситуация "стабильна", то A должна лежать в пересечении одного из разрешенных положений для A и одного из разрешенных положений для B (описанных конфигурациями I), II)). Но это значит, что A должна лежать и на плоскости $\pi_4 \cap \pi_5$, и по крайней мере на двух из сфер S_1, S_2, S_3. Значит, A должна совпадать с одной из вершин симплекса, и в этом случае теорема доказана.

Если же точка A играет роль неподвижной точки в каждой из пар с точками B, C и при этом не совпадает с вершинами симплекса, то обязательно найдутся такие $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, что точки B, C лежат на сфере $S_i \cap S_j$.

Мы доказали теорему во всех случаях, кроме одного специального, и в этом специальном случае у точек B, C очень локализованное положение. Далее мы будем работать с точками B и C и покажем, что в этом случае мы можем передвинуть любую из точек B, C в вершину так, что расстояние между ними строго возрастет. Следующая лемма завершит доказательство теоремы 4.

Лемма 3. *Пусть даны точки B, C, принадлежащие множеству $\Delta \cap S_1 \cap S_2$ и отличные от вершин Δ. Тогда найдется такая вершина $\mathbf{v}_i$ симплекса Рело Δ, что*

$$\|B - C\| < \|B - \mathbf{v}_i\|.$$

Доказательство леммы 3. Пересечение $\Delta \cap S_1 \cap S_2$ – это сферический треугольник Рело на сфере радиуса $\sqrt{3}/2$. Точки B, C лежат внутри этого треугольника, который, в свою очередь, лежит в некоторой открытой полусфере. Мы, конечно же, можем передвинуть точку C на границу треугольника Рело, т.е. на дугу. Пусть эта дуга соединяет вершины $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, а центр ее находится в вершине $\mathbf{v}_5$.

Спроецируем треугольник Рело на плоскость, содержащую дугу $\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$. Рассмотрим прямую в этой плоскости, параллельную $\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$ и проходящую через проекцию вершины $\mathbf{v}_5$. Тогда все точки проекции треугольника Рело будут лежать по одну сторону от этой прямой, и лишь проекция вершины $\mathbf{v}_5$ попадет на эту прямую. Это естественное свойство вытекает из того, что радиус сферы достаточно большой, и треугольник Рело попадает в открытую полусферу. Внутри этой плоскости мы можем применить лемму 2 и передвинуть C в одну из вершин $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_5$ так, что расстояние от проекции B до C строго возрастет. А соответственно, возрастет и расстояние от B до C. Лемма 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] K. Borsuk, "Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre", *Fund. Math.*, **20** (1933), 177–190.

[2] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.

[3] А. М. Райгородский, "Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств", *УМН*, **56**:1 (337) (2001), 107–146.

[4] А. М. Райгородский, "Вокруг гипотезы Борсука", *Геометрия и механика*, СМФН, **23**, РУДН, М., 2007, 147–164.

[5] A. M. Raigorodskii, "Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters", *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*, Contemp. Math., **625**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 93–109.

[6] A. M. Raigorodskii, "Coloring distance graphs and graphs of diameters", *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, New York, 2013, 429–460.

[7] J. Kahn, G. Kalai, "A counterexample to Borsuk's conjecture", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **29**:1 (1993), 60–62.

[8] T. Jenrich, A. E. Brouwer, "A 64-dimensional counterexample to Borsuk's conjecture", *Electron. J. Combin.*, **21**:4 (2014), Paper 4.29.

[9] A. V. Bondarenko, "On Borsuk's conjecture for two-distance sets", *Discrete Comput. Geom.*, **51**:3 (2014), 509–515.

[10] H. Hopf, E. Pannwitz, “Aufgabe Nr. 167”, *Jahr. Deutsch. Math.-Verein*, **43** (1934), 114.

[11] B. Grünbaum, “A proof of Vászonyi’s conjecture”, *Bull. Res. Council Israel. Sect. A*, **6** (1956), 77–78.

[12] A. Heppes, “Beweis einer Vermutung von A. Vázsonyi”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7** (1957), 463–466.

[13] S. Straszewicz, “Sur un problème géométrique de P. Erdős”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, **5** (1957), 39–40.

[14] P. Erdős, “On sets of distances of n points in Euclidean space”, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 165–169.

[15] K. J. Swanepoel, “Unit distances and diameters in Euclidean spaces”, *Discrete Comput. Geom.*, **41**:1 (2009), 1–27.

[16] Z. Schur, M. A. Perles, H. Martini, Y. S. Kupitz, “On the number of maximal regular simplices determined by n points in $\mathbb{R}^d$”, *Discrete and Computational Geometry*, Algorithms Combin., **25**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 767–787.

[17] F. Morić, J. Pach, “Remarks on Schur’s conjecture”, *Computational Geometry and Graphs*, Lecture Notes in Comput. Sci., **8296**, Springer-Verlag, Berlin, 2013, 120–131.

[18] A. Kupavskii, “Diameter graphs in $\mathbb{R}^4$”, *Discrete Comput. Geom.*, **51**:4 (2014), 842–858.

[19] В. В. Буланкина, А. Б. Купавский, А. А. Полянский, “Заметка о гипотезе Шура в $\mathbb{R}^4$”, *Докл. АН*, **454** (2014), 507–511.

[20] A. Kupavskii, A. Polyanskii, “Proof of Schur’s conjecture in $\mathbb{R}^d$”, *Combinatorica*, arXiv: 1402.3694 (в печати).

[21] I. Bárány, “The densest $(n+2)$-set in $\mathbb{R}^n$”, *Intuitive Geometry*, Coll. Math. Soc. János Bolyai, **63**, North-Holland, Amsterdam, 1994, 7–10.

А. Б. Купавский
Московский физико-технический институт,
г. Долгопрудный, Московская обл.;
École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland
E-mail: kupavskii@yandex.ru

Поступило
04.03.2014
Исправленный вариант
13.03.2016

А. А. Полянский
Московский физико-технический институт,
г. Долгопрудный, Московская обл.;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва;
Technion – Israel Institute of Technology
E-mail: alexander.polyanskii@yandex.ru