Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. В. Ишханов, Отображения двойственности для когомологий Галуа,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1980, том 100, 86–105

https://www.mathnet.ru/znsl3312

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
22 мая 2025 г., 07:10:55

В.В.Ишханов

ОТОБРАЖЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ КОГОМОЛОГИЙ ГАЛУА

Пусть k – числовое поле, p – простое число, S – множество простых точек поля k, содержащее все делители p в поле k. В настоящей работе, которая частично носит обзорный характер, исследуются когомологические свойства группы Галуа F_S максимального алгебраического или p-расширения Ω поля k с ветвлением только в точках из множества S. Известно, что если p отлично от 2 или S не содержит бесконечных точек, то когомологическая p-размерность $cd_p F_S$ не превосходит 2 (см. [1], [2], [3]). Для алгебраических расширений Тэйтом была доказана теорема двойственности для конечных модулей (см. [4]), которая была обобщена Учидой [5] на конечнопорожденные как абелевы группы модули. В работе [6] был вычислен дуализирующий модуль для группы F_S в случае максимального алгебраического расширения при условии, что S содержит бесконечные точки и $cd_p F_S = 2$. Мы распространим двойственность Тэйта на p-расширения и на индуктивный предел конечных F_S-модулей, дуализирующий модуль для группы F_S вычислим в общей ситуации.

Введем обозначения. Для произвольного поля K, содержащего k, будет обозначаться через

K^* – мультипликативная группа поля,

$\mathfrak{J}_K$ – группа иделей,

C_K – группа классов иделей,

S_K – множество простых дивизоров поля K, делящих дивизоры поля k, содержащиеся в множестве S,

$\mathfrak{U}_{\mathfrak{p},K}$ – группа $\mathfrak{p}$-адических единиц в пополнении $K_\mathfrak{p}$,

$$\mathfrak{U}_{S,K} = \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathfrak{U}_\mathfrak{p}; \qquad \mathfrak{J}_{S,K} = \mathfrak{J}_K / \mathfrak{U}_{S,K}; \qquad C_{S,K} = C_K / \mathfrak{U}_{S,K}.$$

$\overline{\mathfrak{J}}_K$ – подгруппа группы $\mathfrak{J}_K$, состоящая из иделей $\{a_\mathfrak{p}\}$ таких, что $\prod_\mathfrak{p} |a_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1$, где $|\ |_\mathfrak{p}$ – нормирование в точке $\mathfrak{p}$, а произведение берется по всем простым дивизорам поля K,

$$\overline{C}_K = \overline{\mathfrak{J}}_K / K^*, \qquad \overline{C}_{S,K} = \overline{C}_K / \mathfrak{U}_{S,K}.$$

Для произвольной группы A через A' будем обозначать группу характеров.

R^+ – мультипликативная группа положительных вещественных чисел.

Мы будем рассматривать индуктивную систему всех конечных нормальных расширений K_α / k с группой Галуа F_α, содержащихся в Ω .

H_α – подгруппа группы F_S , соответствующая полю K_α . Для произвольного дискретного F_S -модуля A через $\overline{N}_k A$ будем обозначать группу универсальных норм модуля A , т.е. подгруппу группы A^{F_S} , которая является пересечением

$\bigcap_\alpha N_{K_\alpha/k} A^{H_\alpha}$, где $N_{K_\alpha/k}$ – норма расширения K_α/k.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА I. Универсальные нормы $\overline{N}_k C_{S,\Omega}$ – группа с делением, если Ω – максимальное алгебраическое расширение, и группа с делением на p , если Ω – максимальное p -расширение.

Доказательство приведем для p -расширения. Из теории полей классов известно, что существует точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow D \longrightarrow C_k \xrightarrow{\psi_1} G \longrightarrow 1 ,$$

где ψ_1 – гомоморфизм Артина, G – группа Галуа максимального абелева расширения поля k и D – связная компонента группы C_k . Следовательно, D – группа с делением. Рассмотрим точную последовательность

$$1 \longrightarrow \overline{D} \longrightarrow C_k \longrightarrow G_p \longrightarrow 1 ,$$

где G_p – группа Галуа максимального абелева p -расширения поля k . Заметим, что $\overline{D}$ – прямая сумма группы D и проконечной группы с делением на p , следовательно, $\overline{D}$ – группа с делением на p .

Из коммутативной диаграммы с естественными гомоморфизмами

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \longrightarrow & \overline{N}_k C_{S,\Omega} & \longrightarrow & C_{S,k} & \longrightarrow & G_{p,S} & \longrightarrow 1 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
1 \longrightarrow & \overline{D} & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & G_p & \longrightarrow 1 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 & \overline{D} \cap U_{S,k} & \longrightarrow & U_{S,k} & & &
\end{array}$$

где $G_{p,S}$ – группа Галуа максимального абелева подрасширения расширения Ω/k , следует, что $\overline{N}_k C_{S,\Omega}$ – группа с делением на p .

ЛЕММА 2. Пусть $\{A_\alpha\}$ – индуктивная система конечных F_S -модулей, тогда для любого F_S -модуля X существует функториальный изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{F_S}(\varinjlim A_\alpha, X) \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Hom}_{F_S}(A_\alpha, X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если индуктивный предел $\varinjlim A_\alpha$ определен относительно отображений φ_α^β, то проективный предел относительно двойственных отображений

$$\bar{\varphi}_\alpha^\beta : \operatorname{Hom}_{F_S}(A_\beta, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{F_S}(A_\alpha, X).$$

Обозначим через φ_α естественный гомоморфизм

$$A_\alpha \longrightarrow \varinjlim A_\alpha .$$

Пусть $g \in \operatorname{Hom}_{F_S}(\varinjlim A_\alpha, X)$. Определим отображение

$$f : \operatorname{Hom}_{F_S}(\varinjlim A_\alpha, X) \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Hom}_{F_S}(A_\alpha, X),$$

положив

$$(fg)_\alpha(a_\alpha) = g(\varphi_\alpha a_\alpha), \quad \text{где} \quad a_\alpha \in A_\alpha .$$

Легко проверяется, что g - функториальный мономорфизм.

Предположим, что $\varinjlim A_\alpha = 1$. Так как A_α - конечный модуль, то для любого α существует такое β, что $\varphi_\alpha^\beta A_\alpha = 1$, тогда $\bar{\varphi}_\alpha^\beta = 0$, следовательно,

$$\varprojlim \operatorname{Hom}_{F_S}(A_\alpha, X) = 1 .$$

Рассмотрим теперь случай, когда все отображения φ_α^β инъективны. Определим отображение

$$\bar{f} : \varprojlim \operatorname{Hom}_{F_S}(A_\alpha, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{F_S}(\varinjlim A_\alpha, X),$$

положив для некоторого α и $a_\alpha \in A_\alpha$

$$(\bar{f}\,\bar{g})(\varphi_\alpha a_\alpha) = \bar{g}_\alpha(a_\alpha).$$

Легко проверяется, что отображение $\bar{f}$ определено корректно, не зависит от выбора α и $f\bar{f} = 1$, $\bar{f}f = 1$.

Перейдем к общему случаю. Обозначим через B_α ядро отображения φ_α. Для каждого α существует точная последовательность

$$1 \longrightarrow B_\alpha \longrightarrow A_\alpha \longrightarrow A_\alpha / B_\alpha \longrightarrow 1 .$$

Очевидно, что отображения φ_α^β индуцируют мономорфизмы

$$A_\alpha / B_\alpha \longrightarrow A_\beta / B_\beta .$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму с естественными гомоморфизмами

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \mathrm{Hom}_{F_S}(\varinjlim A_\alpha/B_\alpha, X) & \to & \mathrm{Hom}_{F_S}(\varinjlim A_\alpha, X) & \to & \mathrm{Hom}_{F_S}(\varinjlim B_\alpha, X) = 0 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \\ 0 \to \varprojlim \mathrm{Hom}_{F_S}(A_\alpha/B_\alpha, X) & \to & \varprojlim_{F_S}(A_\alpha, X) & \to & \varprojlim \mathrm{Hom}_{F_S}(B_\alpha, X) = 0 . \end{array}$$

Так как f_1 – изоморфизм, то и f_2 – изоморфизм.

Напомним определение групп гомологий проконечных групп. Пусть $1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 1$ – точная последовательность конечных групп, A – G_2 -модуль, B – такой G_3-модуль, что существуют вложения

$$\gamma_1 : N_{G_1} A \longrightarrow B ; \qquad \gamma_2 : B \longrightarrow A^{G_1} \quad \text{, где}$$

N_{G_1} – норменное отображение. Пусть $P_n(G_2)$ и $P_n(G_3)$ – n -ые члены проективной резольвенты соответственно для групп G_2 и G_3. Существуют естественные гомоморфизмы

$$\varphi_n : P_n(G_2) \longrightarrow P_n(G_3') .$$

Определим для $n \geqslant 1$ отображение дефляции $de\,f$ на n -мерных цепях

$$P_n(G_2) \underset{G_2}{\otimes} A \longrightarrow P_n(G_3) \underset{G_1}{\otimes} B ,$$

как композицию отображения $\varphi_n \otimes N_{G_1}$ и $id \otimes \gamma_1$. Очевидно, что дефляция перестановочна с дифференциалом, следовательно, она индуцирует гомоморфизм

$$H_n(G_2, A) \longrightarrow H_n(G_3, B) ,$$

который также будем обозначать через $de\,f$. Так как при $i \leqslant -2$

$$H^i(G_2, A) = H_{-1-i}(G_2, A) ,$$

то построена система гомоморфизмов

$$H^i(G_2, A) \longrightarrow H^i(G_3, B)$$

При $i = -1$ определим дефляцию как гомоморфизм, индуцированный композицией норменного отображения N_{G_1} на группе $\mathrm{Ker}\, N_{G_2} A$ и гомоморфизма γ_1. При $i = 0$ дефляция определяется, если

γ_2 –изоморфизм, как гомоморфизм

$$H^0(G_2,A) \longrightarrow H^0(G_3,A^{G_1})$$

индуцированный тождественным отображением

$$A^{G_2} \longrightarrow (A^{G_1})^{G_3}.$$

Пусть A – дискретный F_S –модуль, т.е. абелева группа на которой действуют операторы из группы F_S, причем $A=\bigcup_\alpha A^{H_\alpha}$, где объединение берется по всем открытым нормальным делителям H_α группы F_S. Определим при $i \leqslant 0$ группы гомологий $H^i(F_S,A)$, как проективный предел $\varprojlim_\alpha H^i(F_\alpha,A^{H_\alpha})$ относительно дефляции.

ЛЕММА 3. Инфляция двойственна дефляции, точнее, если H_β – подгруппа группы H_α, то при $i \geqslant 2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^i(F_\beta,A) & \xrightarrow{\Psi_2} & H^{2-i}(F_\beta,\mathrm{Hom}_{H_\beta}(A,C_{S,\Omega}))' \\ \uparrow \inf & & \uparrow \overline{\mathrm{def}} \\ H^i(F_\alpha,A) & \xrightarrow{\Psi_3} & H^{2-i}(F_\alpha,\mathrm{Hom}_{H_\alpha}(A,C_{S,\Omega}))', \end{array}$$

где Ψ_2 и Ψ_3 – гомоморфизмы, индуцированные $\cup$ – умножением, а $\overline{\mathrm{def}}$ – гомоморфизм, двойственный дефляции.

Доказательство проведем сдвигом размерности. Пусть сначала $i=2$. Очевидно, что в этом случае достаточно показать, что в диаграмме с естественными гомоморфизмами

$$\begin{array}{ccccc} H^2(F_\beta,A) & \otimes & H^0(F_\beta,\mathrm{Hom}(A,C_{S,K_\beta})) & \xrightarrow{\Psi_\beta} & H^2(F_\beta,C_{S,K_\beta}) \\ \uparrow \inf & & \downarrow \mathrm{def} & & \uparrow \inf \\ H^2(F_\alpha,A) & \otimes & H^0(F_\alpha,\mathrm{Hom}(A,C_{S,K_\alpha})) & \xrightarrow{\Psi_\alpha} & H^2(F_\alpha,C_{S,K_\alpha}) \end{array}$$

справедливо равенство

$$\Psi_\beta(\inf f\otimes g) = \inf \Psi_\alpha(f\otimes \mathrm{def}\, g)$$

где $f\in H^2(F_\alpha,A)$ и $g\in H^0(F_\beta,\mathrm{Hom}(A,C_{S,K_\beta}))$.

Пусть $\overline{f}$ – коцикл из класса f и $\overline{g}$ из класса g, σ,τ – элементы из группы F_β, $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$ образы σ,τ в группе F_α, тогда имеем

$$\Psi_\beta(\inf \overline{f}\otimes\overline{g})(\sigma,\tau)=\overline{g}\,\overline{f}(\overline{\sigma},\overline{\tau}),$$

$$\inf \psi_\alpha(\bar{f} \otimes \operatorname{def} \bar{g})(\sigma,\tau)=\psi_\alpha(\bar{f} \otimes \operatorname{def} \bar{g})(\bar{\sigma},\bar{\tau})=(\operatorname{def} \bar{g})\, \bar{f}\,(\bar{\sigma},\bar{\tau}).$$

Так как $\operatorname{def} \bar{g}=\bar{g}$, то при $i=2$ утверждение леммы доказано. Предположим, что оно верно при $i<n$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\gamma_3} A_1=\operatorname{Hom}(Z(F_\alpha),A) \longrightarrow A_2 \longrightarrow 0\ ,$$

где $Z\,(F_\alpha)$ - целочисленное групповое кольцо группы F_α с образующими e_σ и при $a \in A$

$$(\gamma_3 a)\,(e_\sigma)=a.$$

Покажем, что последовательность расщепляется над Z . Определим отображение $\bar{\gamma}_3 : A_1 \longrightarrow A$, положив при $\bar{a} \in A_1$

$$\bar{\gamma}_3 \bar{a}=\bar{a}\ (e_1).$$

Легко проверяется, что $\bar{\gamma}_3$ -гомоморфизм и $\bar{\gamma}_3 \cdot \gamma_3=id$. Таким образом, для любого F_β -модуля B точна последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(A_2,B) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A_1,B) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A,B) \longrightarrow 0.$$

Рассмотрим диаграмму с естественными гомоморфизмами

$$\begin{tikzcd}
 & H^{n}(F_\beta,A) \arrow[rr, "\psi_4"] & & H^{2-n}(F_\beta,\operatorname{Hom}(A,C_{S,K_\beta}))' \\
H^{n-1}(F_\beta,A_2) \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "\psi_5"] & & H^{3-n}(F_\beta,\operatorname{Hom}(A_2,C_{S,K_\beta}))' \arrow[ur, "\bar{\delta}"] & \\
 & H^{n}(F_\alpha,A) \arrow[uu, "\inf"] \arrow[rr, "\psi_6"] & & H^{2-n}(F_\alpha,\operatorname{Hom}(A,C_{S,K_\alpha}))' \arrow[uu, "\overline{\operatorname{def}}"'] \\
H^{n-1}(F_\alpha,A_2) \arrow[uu, "\inf"] \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "\psi_7"] & & H^{3-n}(F_\alpha,\operatorname{Hom}(A_2,C_{S,K_\alpha}))' \arrow[uu, "\operatorname{def}"] \arrow[ur, "\bar{\delta}"] &
\end{tikzcd}$$

По предположению $\psi_5 \inf=\overline{\operatorname{def}}\ \psi_7$. Дефляция и инфляция перестановочны со связывающими гомоморфизмами, следовательно,

$$\bar{\delta}\ \overline{\operatorname{def}}=\overline{\operatorname{def}}\ \bar{\delta} \qquad \text{и} \qquad \delta \inf=\inf \delta .$$

Согласно предложению 6.I гл.I2 [I0]

$$\overline{\delta}\,\psi_5 = (-1)^{2-n}\psi_4\,\delta \quad \text{и} \quad \psi_6\,\delta = (-1)^{2-n}\delta\,\psi_7 .$$

Очевидно, что δ – изоморфизм групп $H^{n-1}(F_\alpha, A_2)$ и $H^n(F_\alpha, A)$. Тогда имеем

$$\overline{def}\,\psi_6 = (-1)^{2-n}\,\overline{def}\,\overline{\delta}\,\psi_7\,\delta^{-1} = (-1)^{2-n}\,\overline{\delta}\,\overline{def}\,\psi_7\,\delta^{-1} =$$

$$= (-1)^{2-n}\,\overline{\delta}\,\psi_5\, inf\,\delta^{-1} = \psi_4\,\delta\, inf\,\delta^{-1} = \psi_4\, inf .$$

Докажем еще одно вопомогательное утверждение

ЛЕММА 4. Если $A - F_S$ – модуль, конечнопорожденный как абелева группа, то естественное отображение

$$H^0(F_S, Hom(A, C_{S,\Omega})) \xrightarrow{\psi_8} Hom_{F_S}(A, C_{S,\Omega})/\overline{N}_k\, Hom(A, C_{S,\Omega})$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$H^0(F_S, Hom(A, C_{S,\Omega})) = \varprojlim Hom_{F_S}(A, C_{S,\Omega})/N_{K_\alpha/k}\, Hom_{H_\alpha}(A, C_{S,\Omega})$$

Если мы заменим $C_{S,\Omega}$ на $\overline{C}_{S,\Omega}$, то группы $Hom_{H_\alpha}(A, \overline{C}_{S,\Omega})$ компактны, следовательно, в этом случае ψ_8 –изоморфизм, поэтому можно считать доказанным утверждение, если A – конечный модуль, поэтому нам остается рассмотреть случай, когда A – решетка. Точная последовательность

$$1 \longrightarrow \overline{C}_{S,K_\alpha} \longrightarrow C_{S,K_\alpha} \longrightarrow R^+ \longrightarrow 1$$

индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow Hom(A, \overline{C}_{S,K_\alpha}) \longrightarrow Hom(A, C_{S,K_\alpha}) \longrightarrow Hom(A, R^+) \longrightarrow 0.$$

Так как R^+ – группа с однозначным делением, то и $Hom(A, R^+)$ – группа с однозначным делением, следовательно, гомологически тривиальный модуль, и естественные отображения

$$\psi_{9,i} : H^i(F_S, Hom(A, \overline{C}_{S,\Omega})) \longrightarrow H^i(F_S, Hom(A, C_{S,\Omega}))$$

являются изоморфизмами.

Рассмотрим последовательность с естественными гомоморфизмами

$$Hom_{F_S}(A, \overline{C}_{S,\Omega})/\overline{N}_K\, Hom(A, \overline{C}_{S,\Omega}) \xrightarrow{\psi_{10}}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{F_S}(A, C_{S,\Omega}) / \overline{N}_k \mathrm{Hom}(A, C_{S,\Omega}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{F_S}(A, R^+) / \overline{N}^{\cdot}_k \mathrm{Hom}(A, R^+).$$

Так как $\mathrm{Hom}_{H_\alpha}(A, \overline{C}_{S,\Omega})$ – компактные группы, то последовательность точна. Покажем, что

$$\mathrm{Hom}_{F_S}(A, R^+) = \overline{N}_k \mathrm{Hom}(A, R^+).$$

Пусть $q \in \mathrm{Hom}_{F_S}(A, R^+)$. Рассмотрим произвольное расширение K_α / k с группой Галуа F_α. Пусть его степень равна n, тогда рассмотрим гомоморфизм $\overline{q} \in \mathrm{Hom}(A, R^+)$, положив

$$\overline{q}(a) = \frac{1}{n} q(a).$$

Легко проверяется, что $q \in N_{K_\alpha/k} \overline{q}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму с естественными гомоморфизмами

$$\begin{array}{ccc}
H^0(F_S, \mathrm{Hom}(A, \overline{C}_{S,\Omega})) & \xrightarrow{\overline{\psi}_8} & \mathrm{Hom}_{F_S}(A, \overline{C}_{S,\Omega}) / \overline{N}_k \mathrm{Hom}(A, \overline{C}_{S,\Omega}) \\
\downarrow \psi_{9,0} & & \downarrow \psi_{10} \\
0 \longrightarrow H^0(F_S, \mathrm{Hom}(A, C_{S,\Omega})) & \xrightarrow{\psi_8} & \mathrm{Hom}_{F_S}(A, C_{S,\Omega}) / \overline{N}_k \mathrm{Hom}(A, C_{S,\Omega}).
\end{array}$$

Так как $\overline{\psi}_8$ и $\psi_{9,0}$ – изоморфизмы, а ψ_{10} – эпиморфизм, то ψ_8 – изоморфизм.

Перейдем к доказательству двойственности Тэйта, следуя методике работы Учиды [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$$

точная последовательность F_S-модулей, A_2 – решетка с конечным числом образующих, причем если Ω / k – p-расширение, то группа кручения модуля A_3 – p-группа, тогда при $i < 0$ существует точная последовательность

$$H^i(F_S, \mathrm{Hom}(A_1, C_{S,\Omega})) \longrightarrow H^{i+1}(F_S, \mathrm{Hom}(A_3, C_{S,\Omega})) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{i+1}(F_S, \mathrm{Hom}(A_2, C_{S,\Omega})) \longrightarrow H^{i+1}(F_S, \mathrm{Hom}(A_1, C_{S,\Omega})).$$

Доказательство аналогично как для p-расширений, так и для максимального алгебраического расширения. Мы рассмотрим случай, когда Ω / k – максимальное p-расширение с фиксированным ветвлением. Так как A_2 – конечно порожденная группа, то существует открытый нормальный делитель H группы F_s, тривиально действующий на A_2. Легко видеть, что

$$\varprojlim H^i(F_\alpha, \mathrm{Hom}_{H_\alpha}(A_j, C_{s,\Omega})) \approx$$

$$\approx \varprojlim H^i(F_s/H_\alpha \cap H, \mathrm{Hom}_{H_\alpha \cap H}(A_j, C_{s,\Omega})),$$

поэтому в дальнейшем вместо системы H_α будем рассматривать систему $H_\alpha \cap H$, сохраняя старые обозначения.

Покажем сначала, что утверждение предложения верно, если заменить $C_{s,\Omega}$ на $\overline{C}_{s,\Omega}$. Так как $\mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,K_\alpha})$ – компактные группы, то

$$H^i(F_s, \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,\Omega})) = \varprojlim Z^i(F_\alpha, \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,K_\alpha})) / \varprojlim B^i(F_\alpha, \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,K_\alpha})).$$

По определению при $i \leqslant -2$

$$C^i(F_\alpha, \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,K_\alpha})) = P_{-1-i}(F_\alpha) \underset{F_\alpha}{\otimes} \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,K_\alpha})$$

По следствию 3.8 гл.8 [7]

$$pr_\alpha \varprojlim_{\beta > \alpha} C^i(F_\beta, \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,K_\beta})) = \bigcap_{\beta > \alpha} P_{-1-i}(F_\alpha) \underset{F_\alpha}{\otimes} N_{K_\beta/K_\alpha} \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,K_\beta}).$$

Правая часть равенства равна

$$P_{-1-i}(F_\alpha) \underset{F_\alpha}{\otimes} \overline{N}_{K_\alpha} \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,\Omega})$$

в силу очевидного равенства

$$\bigcap_{\beta > \alpha} P_{-1-i}(F_\alpha) \underset{F_\alpha}{\otimes} N_{K_\beta/K_\alpha} \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,K_\beta}) / \overline{N}_{K_\alpha} \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,\Omega}) = 1.$$

Таким образом, выполняются равенства

$$pr_\alpha \varprojlim_{\beta > \alpha} C^i(F_\beta, \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,K_\beta})) = C^i(F_\alpha, \overline{N}_{K_\alpha} \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,\Omega})).$$

Легко проверяется, что при $i \leqslant -2$ имеем аналогичные равенства для групп циклов и границ. Непосредственная проверка показывает справедливость аналогичных равенств и при $i = -1$. Таким образом, при $i \leqslant -1$

$$H^i(F_s, \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,\Omega})) = \varprojlim H^i(F_\alpha, \overline{N}_{K_\alpha} \mathrm{Hom}(A_j, \overline{C}_{s,\Omega})).$$

Из точной последовательности

$$1 \longrightarrow \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega} \longrightarrow \overline{N}_{K_\alpha}C_{S,\Omega} \longrightarrow R^+ \longrightarrow 1$$

и леммы I следует, что $\overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega}$ – группа с делением на p.

Точная последовательность

$$0 \to Hom(A_j, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega}) \to Hom(A_j, \overline{C}_{S,K_\alpha}) \to Hom(A_j, G_{S,p,\alpha}) \to 0$$

индуцирует точную последовательность

$$\longrightarrow H^i(F_\alpha, Hom(A_j, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})) \longrightarrow H^i(F_\alpha, Hom(A_j, \overline{C}_{S,K_\alpha}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^i(F_\alpha, Hom(A_j, G_{p,S,\alpha})) \longrightarrow H^{i+1}(F_\alpha, Hom(A_j, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})) \longrightarrow.$$

Переходя к проективному пределу относительно отображений дефляции, получаем при $i \leqslant -1$

$$\varprojlim H^i(F_\alpha, Hom(A_j, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})) = H^i(F_S, Hom(A_j, \overline{C}_{S,\Omega}))$$

Переходя к проективному пределу относительно отображений дефляции в точной последовательности

$$H^i(F_\alpha, Hom(A_1, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})) \longrightarrow H^{i+1}(F_\alpha, Hom(A_3, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{i+1}(F_\alpha, Hom(A_2, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})) \longrightarrow H^{i+1}(F_\alpha, Hom(A_1, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})),$$

получаем искомую точную последовательность, по крайней мере, в отрицательных членах. Проверим, что последовательность точна и в нулевой размерности. Пусть $a \in H^0(F_S, Hom(A_3, \overline{C}_{S,\Omega}))$ и естественное отображение

$$\omega : H^0(F_S, Hom(A_3, \overline{C}_{S,\Omega})) \longrightarrow H^0(F_S, Hom(A_2, \overline{C}_{S,\Omega}))$$

аннулирует элемент a. Пусть $\overline{a}$ – представитель класса a в группе $Hom_{F_S}(A_3, \overline{C}_{S,\Omega})$, тогда образ $\overline{a}$ при отображении

$$\overline{\omega} : Hom_{F_S}(A_3, \overline{C}_{S,\Omega}) \longrightarrow Hom_{F_S}(A_2, \overline{C}_{S,\Omega})$$

находится в подгруппе $\overline{N_K Hom(A_2, \overline{C}_{S,\Omega})}$, следовательно, можно считать, что $\overline{\omega} a \in N_{K_\alpha/k} Hom(A_2, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})$ (A_2 – решетка), поэтому $\overline{a} \in Hom_{F_\alpha}(A_3, N_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})$ для всех α и существуют такие элементы $t_\alpha \in H^{-1}(F_\alpha, Hom(A_1, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega}))$, что $\delta_\alpha t_\alpha = a_\alpha$, где δ_α – связывающие гомоморфизмы и a_α – проекция a на α – компоненту. Пусть θ_α – естественные гомоморфизмы

$$H^{-1}(F_\alpha, Hom(A_2, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})) \to H^{-1}(F_\alpha, Hom(A_1, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega})).$$

Очевидно, что смежные классы $t_\alpha \theta_\alpha H^{-1}(F_\alpha, Hom(A_2, \overline{N}_{K_\alpha}\overline{C}_{S,\Omega}))$ образуют проективную систему компактных пространств относительно отображений дефляции. По теореме 3.6 гл.8 [7] проективный предел непуст. Легко видеть, что естественное отображение

$$H^{-1}(F_S, Hom(A_3, \overline{C}_{S,\Omega})) \to H^0(F_S, Hom(A_1, \overline{C}_{S,\Omega}))$$

переводит его в элемент a. Остается показать точность в члене $H^0(F_S, Hom(A_2, \overline{C}_{S,\Omega}))$. Пусть элемент b аннулируется отображением

$$\nu : H^0(F_S, Hom(A_2, \overline{C}_{S,\Omega})) \to H^0(F_S, Hom(A_1, \overline{C}_{S,\Omega})).$$

Возьмем в группе $Hom_{F_S}(A_2, \overline{C}_{S,\Omega})$ элемент $\overline{b}$ – представитель класса b, тогда образ $\overline{b}$ относительно отображения

$$\overline{\nu} : Hom_{F_S}(A_2, \overline{C}_{S,\Omega}) \to Hom_{F_S}(A_1, \overline{C}_{S,\Omega})$$

лежит в группе $\overline{N}_k\, Hom(A_1, \overline{C}_{S,\Omega})$. Так как A_1 – решетка, то

$$\overline{N}_k\, Hom(A_1, \overline{C}_{S,\Omega}) = N_{K/k}\, Hom(A_1, \overline{N}_K\overline{C}_{S,\Omega}),$$

где K – подполе поля Ω, принадлежащее подгруппе H, действующей тривиально на A_2. Так как $\overline{N}_K\overline{C}_{S,\Omega}$ – группа с делением на p, то в группе $N_{K/k}\, Hom(A_2, \overline{N}_K\overline{C}_{S,\Omega})$ существует элемент $\overline{b}_1$, отображающийся в $\overline{\nu}\,\overline{b}$. Так как A_2 – решетка, то

$$N_{K/k}\, Hom(A_2, \overline{N}_K\overline{C}_{S,\Omega}) = \overline{N}_k\, Hom(A_2, \overline{C}_{S,\Omega}); \quad \overline{\nu}(b - \overline{b}_1) = 0,$$

следовательно, существует элемент $\overline{a}_1 \in Hom_{F_S}(A_1, \overline{C}_{S,\Omega})$ со свойством $\overline{\omega}\,\overline{a}_1 = \overline{b} - \overline{b}_1$, что заканчивает доказательство. Остается показать, что утверждение предложения верно и для группы $C_{S,\Omega}$. Для этого достаточно заметить, что естественное отображение

$$H^i(F_S, Hom(A_j, \overline{C}_{S,\Omega})) \to H^i(F_S, Hom(A_j, C_{S,\Omega}))$$

является изоморфизмом (см.доказательство леммы 4).

ТЕОРЕМА I (глобальная двойственность Тэйта).

Пусть A – F_S – модуль, конечнопорожденный как абелева группа, тогда при $i \geqslant 2$ существует функториальный изоморфизм

$$H^i(F_S, A) \longrightarrow H^{2-i}(F_S, Hom(A, C_{S,\Omega}))'.$$

Доказательство приведем для случая, когда Ω/k – максимальное p -расширение с фиксированным ветвлением.

По определению

$$H^i(F_S, A) = \varinjlim H^i(F_\alpha, A^{H_\alpha}),$$

где индуктивный предел определяется относительно инфляции.

Мы будем считать, что система групп H_α выбрана так, что H_α действуют тривиально на A. $\cup$ – умножение индуцирует гомоморфизмы

$$\varepsilon_\alpha : H^i(F_\alpha, A) \longrightarrow H^{2-i}(F_\alpha, Hom(A, C_{S,K_\alpha}))'.$$

Так как инфляция двойственна дефляции (лемма 3), то переходя к индуктивному пределу, получаем гомоморфизм

$$\varepsilon : H^i(F_S, A) \longrightarrow H^{2-i}(F_S, Hom(A, C_{S,\Omega}))'.$$

Если A – решетка, то по теореме Накаямы–Тэйта ([II] , стр.I32) ε_α – изоморфизмы, следовательно ε – изоморфизм. Предположим теперь, что в модуле A возможно только p – кручение. Существует точная последовательность F_S – модулей

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

где A_2 – решетка. Из предложения I следует, что существует точная последовательность

$$H^{2-i}(F_S, Hom(A_1, C_{S,\Omega}))' \longrightarrow H^{2-i}(F_S, Hom(A_2, C_{S,\Omega}))' \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{2-i}(F_S, Hom(A, C_{S,\Omega}))' \longrightarrow H^{1-i}(F_S, Hom(A_1, C_{S,\Omega}))' \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{1-i}(F_S, Hom(A_2, C_{S,\Omega}))'.$$

Так как A_1 и A_2 – решетки и для них утверждение теоремы доказано, из точной последовательности

$$H^i(F_S, A_1) \longrightarrow H^i(F_S, A_2) \longrightarrow H^i(F_S, A) \longrightarrow H^i(F_S, A_1) \longrightarrow H^{i+1}(F_S, A_2)$$

7 1897

следует утверждение теоремы для модуля A. Рассмотрим теперь произвольный конечнопорожденный F_S-модуль A и пусть A_1 – подмодуль, состоящий из периодических элементов, порядок которых взаимно прост с p. Нам достаточно показать, что изоморфны группы

$$H^{2-i}(F_S, Hom(A, C_{S,\Omega})) \quad \text{и} \quad H^{2-i}(F_S, Hom(A/A_1, C_{S,\Omega})).$$

Напишем точную последовательность

$$0 \longrightarrow Hom(A/A_1, C_{S,K_\alpha}) \xrightarrow{\mu_\alpha} Hom(A, C_{S,K_\alpha}) \longrightarrow Hom(A_1, C_{S,K_\alpha}).$$

Очевидно, что порядок коядра отображения μ_α взаимно прост с p, следовательно,

$$H^i(F_\alpha, Hom(A/A_1, C_{S,K_\alpha})) \approx H^i(F_\alpha, Hom(A, C_{S,K_\alpha}))$$

Переход к проективному пределу заканчивает доказательство теоремы.

Для конечных p-примарных F_S-модулей двойственность Тэйта имеет более простой вид. Докажем сначала вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если множество S не содержит бесконечных дивизоров, A – p-примарный F_S-модуль, то

$$\varprojlim Hom_{H_\alpha}(A, C_{S,\Omega}) = 0,$$

где проективный предел определяется относительно норменных отображений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – подгруппа конечного индекса группы F_S, действующая тривиально на A, тогда достаточно показать, что

$$\varprojlim Hom_{H_\alpha \cap H}(A, C_{S,\Omega}) = 0.$$

Обозначим $C_{S,\Omega}^{H \cap H_\alpha}$ через C_α, тогда утверждение предложения эквивалентно равенству

$$\varprojlim Hom(A, C_\alpha) = 0.$$

Для каждого α рассмотрим точную последовательность

$$1 \longrightarrow D_\alpha \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow G_\alpha \longrightarrow 1,$$

где G_α – группа Галуа максимального абелева неразветвленного вне множества S p-расширения поля K_α. Индуцированная точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,D_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,G_\alpha) \longrightarrow 0.$$

Так как проективный предел групп G_α тривиален, то переходя к проективному пределу в последовательности, получаем

$$\varprojlim \mathrm{Hom}(A,D_\alpha) = \varprojlim \mathrm{Hom}(A,C_\alpha).$$

Если $D_{\alpha,p}$ – p-компонента группы D_α, то достаточно показать тривиальность проективного предела групп $D_{\alpha,p}$ относительно норменных отображений. Так как D_α – группа с делением на p (лемма I), то $D_{\alpha,p}$ обладает тем же свойством. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность элементов из группы $D_{\alpha,p}$, причем

$$\text{(I)} \qquad a_1^p = 1, \quad a_2^p = a_1, \ldots, \quad a_n^p = a_{n-1}, \ldots$$

Пусть $\{b_n\}$ – прообраз $\{a_n\}$ в группе J_{S,K_α} относительно гомоморфизма

$$J_{S,K_\alpha} \longrightarrow C_{S,K_\alpha},$$

тогда

$$b_1^p = c_0, \quad b_2^p = b_1 c_1, \ldots, \quad b_n^p = b_{n-1} c_{n-1}, \quad \text{где } c_i \in K_\alpha^*.$$

Очевидно, что бесконечное произведение $c_0 c_1^p \ldots c_n^{p^n} \ldots$ принадлежит ядру R_α отображения

$$K_\alpha^* \otimes Z_p \longrightarrow J_{S,K_\alpha} \otimes Z_p,$$

где Z_p – аддитивная группа целых p-адических чисел. Обратно, пусть $c_0 c_1^p \ldots c_n^{p^n} \ldots$ принадлежит R_α, тогда найдется последовательность элементов $\{b_n\}$ в группе J_{S,K_α} такая, что

$$b_1^p = c_0, \quad b_2^p = b_1 c_1, \ldots, \quad b_n^p = b_{n-1} c_{n-1}, \ldots$$

Легко проверяется, что разным последовательностям из $D_{\alpha,p}$ вида (I) соответствуют разные элементы из R_α и обратно. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между последовательностями вида (I) и элементами группы R_α. Если K_β / K_α – некоторое подрасширение расширения Ω / K_α и $\{\bar{a}_n\}$ – некоторая последовательность вида (I) из $D_{\beta,p}$, $\bar{c}_\beta$ – соответствующий элемент из R_β, то легко проверяется, что последовательности $\{N_{K_\beta/K_\alpha}\bar{a}_n\}$ соответствует элемент $N_{K_\beta/K_\alpha}\bar{c}_\beta$ из группы R_α. Таким образом, достаточно показать, что проективный предел групп R_α тривиален, что следует из теоремы 4.2 работы [8].

Пусть $\bar{S}_{K_\alpha}$ – множество конечных точек из S_{K_α}. Точная последовательность

$$1 \longrightarrow \sum_{\mathfrak{p}\in S_\Omega/\bar{S}_\Omega}\oplus\, U_{\mathfrak{p},\Omega} \longrightarrow C_{S,\Omega} \longrightarrow C_{\bar{S},\Omega} \longrightarrow 1$$

индуцирует точную последовательность

$$1 \longrightarrow \sum_{\mathfrak{p}\in S_k/\bar{S}_k}\oplus\, U_{\mathfrak{p},k} \longrightarrow C_{S,k} \longrightarrow C_{\bar{S},\Omega}^{F_S} \longrightarrow H^1\left(F_S, \sum\oplus\, U_{\mathfrak{p},\Omega}\right).$$

Очевидно, что группа $H^1\left(F_S, \sum\oplus\, U_{\mathfrak{p},\Omega}\right)$ является подгруппой группы $\sum_{\mathfrak{p}\in S_k/\bar{S}_k}\oplus\, H^1(Z/2Z, U_{\mathfrak{p}})$, которая тривиальна, следовательно, $C_{\bar{S},\Omega}$ – дискретный модуль.

ТЕОРЕМА 2. Если $p\neq 2$, или при $p=2$ S не содержит бесконечных точек, то для индуктивного предела p-примарных F_S-модулей $A=\varinjlim A_\beta$ двойственность Тэйта имеет вид

$$H^2(F_S, A) \longrightarrow Hom_{F_S}(A, C_{\bar{S},\Omega})'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала A – конечный модуль. Рассмотрим естественное отображение

$$\psi_{11} : H^0(F_S, Hom(A, C_{S,\Omega})) \longrightarrow H^0(F_S, Hom(A, C_{\bar{S},\Omega})).$$

Если $p=2$, то по условию $S=\bar{S}$ и ψ_{11} – тождественное отображение. Пусть $p\neq 2$, тогда порядок группы $Hom(A, \sum_{\mathfrak{p}\in S\setminus\bar{S}}\oplus\, U_{\mathfrak{p},\Omega})$ - нечетное число, следовательно, это гомологически тривиальный модуль и ψ_{11} – изоморфизм. Из теоремы I следует, что естественное отображение

$$H^2(F_S, A) \longrightarrow H^0(F_S, Hom(A, C_{\bar{S},\Omega}))'$$

является изоморфизмом. Повторяя рассуждения леммы 4, можно показать, что

$$H^0(F_S, Hom(A, C_{\bar{S},\Omega})) \approx Hom_{F_S}(A, C_{\bar{S},\Omega}) / \bar{N}_k\, Hom(A, C_{\bar{S},\Omega}).$$

Из предложения 2 непосредственно следует, что

$$\bar{N}_k\, Hom(A, C_{\bar{S},\Omega}) = 0.$$

Пусть A – произвольный индуктивный предел p-примарных F_S –модулей, тогда

$$H^2(F_S,A)=\varinjlim H^2(F_S,A_\beta)\longrightarrow \varinjlim \mathrm{Hom}_{F_S}(A_\beta,C_{\bar S,\Omega})'\longrightarrow$$

$$\longrightarrow[\varprojlim \mathrm{Hom}_{F_S}(A_\beta,C_{\bar S,\Omega})]'\longrightarrow \mathrm{Hom}_{F_S}(\varinjlim A_\beta,C_{S,\Omega})'.$$

Все отображения являются изоморфизмами, следовательно, и сквозное отображение

$$H^2(F_S,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{F_S}(A,C_{\bar S,\Omega})'$$

изоморфизм.

Вычислим теперь когомологическую p –размерность группы F_S.

ТЕОРЕМА 3. В условиях теоремы 2, $cd_p F_S$ не превосходит двух.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно показать, что для любого p – примарного модуля A выполняется равенство

$$H^3(F_S,A)=0.$$

Согласно теореме I

$$H^3(F_S,A)\approx H^{-1}(F_S,\mathrm{Hom}(A,C_{S,\Omega}))'.$$

Легко показать, что

$$H^{-1}(F_S,\mathrm{Hom}(A,C_{\bar S,\Omega}))\approx H^{-1}(F_S,\mathrm{Hom}(A,C_{S,\Omega})).$$

В доказательстве предложения I было установлено, что

$$H^{-1}(F_S,\mathrm{Hom}(A,C_{S,\Omega}))=\varprojlim H^{-1}(F_\alpha,\bar N_{K_\alpha}\mathrm{Hom}(A,C_{S,\Omega})).$$

Аналогичное равенство верно, если заменить $C_{S,\Omega}$ на $C_{\bar S,\Omega}$. Из предложения 2 следует, что

$$\bar N_{K_\alpha}\mathrm{Hom}(A,C_{\bar S,\Omega})=0,$$

что завершает доказательство.

Напомним, что если группа F_S имеет когомологическую p-размерность 2, то дуализирующим модулем для нее называется модуль I_2 со свойством, что для любого p –примарного модуля A существует изоморфизм

$$H^2(F_S,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{F_S}(A,I_2)'.$$

В качестве следствия теорем 2,3 получаем, что p -компонента $C_{\bar{S},\Omega,p}$ модуля $C_{\bar{S},\Omega}$ является дуализирующим модулем для группы F_S, если $cd_p\, F_S = 2$.

Установим теперь двойственность в первой размерности.

ТЕОРЕМА 4. Если A — p -примарный F_S -модуль, то существует функториальный изоморфизм

$$H^1(F_S, A) \longrightarrow Ext^1_{F_S}(A, C_{S,\Omega})'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность F_S -модулей

$$1 \longrightarrow V \longrightarrow Z(A) \xrightarrow{\gamma_4} A \longrightarrow 1,$$

где $Z(A)$ – целочисленное групповое кольцо группы A и отображение γ_4 определяется следующим образом

$$\gamma_4(e_a) = a \quad \text{при} \quad a \in A.$$

Она индуцирует точную последовательность

$$0 = H^1(F_S, Z(A)) \longrightarrow H^1(F_S, A) \longrightarrow H^2(F_S, V) \longrightarrow H^2(F_S, Z(A)).$$

Согласно теореме I мы можем написать коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow H^1(F_S, A) \longrightarrow & H^2(F_S, V) & \longrightarrow & H^2(F_S, Z(A)) \\
& \Big\downarrow \psi_{12} & & \Big\downarrow \psi_{13} \\
& H^0(F_S, Hom(V, C_{S,\Omega}))' & \xrightarrow{\psi_{14}} & H^0(F_S, Hom(Z(A), C_{S,\Omega})).
\end{array}$$

Так как ψ_{12} и ψ_{13} – изоморфизмы, то группа $H^1(F_S, A)$ естественно изоморфна ядру отображения ψ_{14}. Из леммы 4 следует, что справедливы равенства

$$H^0(F_S, Hom(V, C_{S,\Omega})) = Hom_{F_S}(V, C_{S,\Omega}) / \bar{N}_K\, Hom(V, C_{S,\Omega}),$$

$$H^0(F_S, Hom(Z(A), C_{S,\Omega})) = Hom_{F_S}(Z(A), C_{S,\Omega}) / \bar{N}_K\, Hom(Z(A), C_{S,\Omega}).$$

Пусть H – подгруппа группы F_S, тривиально действующая на $Z(A)$, $F = F_S / H$ и $K = \Omega_S^H$. Тогда

$$\overline{N}_k \mathrm{Hom}(Z(A), C_{S,\Omega}) = N_{K/k} \mathrm{Hom}(Z(A), \overline{N}_k C_{S,\Omega})$$
$$\overline{N}_k \mathrm{Hom}(V, C_{S,\Omega}) = N_{K/k} \mathrm{Hom}(V, \overline{N}_k C_{S,\Omega})$$

Так как $\overline{N}_k C_{S,\Omega}$ – группа с делением на p, то естественное отображение

$$\overline{N}_k \mathrm{Hom}(Z(A), C_{S,\Omega}) \longrightarrow \overline{N}_k \mathrm{Hom}(V, C_{S,\Omega})$$

эпиморфизм, следовательно, ядро отображения ψ_{14} совпадает с группой $\mathrm{Ext}^1_{F_S}(A, C_{S,\Omega})'$ – ядром отображения

$$\mathrm{Hom}_{F_S}(V, C_{S,\Omega})' \longrightarrow \mathrm{Hom}_{F_S}(Z(A), C_{S,\Omega})'.$$

В заключение вычислим дуализирующий модуль для группы F_S в случае $cd_p F_S = 1$. Обозначим через Q_p подгруппу аддитивной группы рациональных чисел, состоящую из дробей, знаменатель которых степень числа p. Превратим группу $C_{S,\Omega} \otimes Q_p / Z$ в F_S -модуль, положив

$$\left(c \otimes \frac{q}{p^n}\right)^{\sigma} = c^{\sigma} \otimes \frac{q}{p^n}.$$

Легко проверяется, что $C_{S,\Omega} \otimes Q_p/Z$ – дискретный F_S -модуль.

ТЕОРЕМА 5. Если $cd_p F_S = 1$, то $C_{S,\Omega} \otimes Q_p/Z$ – дуализирующий модуль для F_S, т.е. для любого p – примарного модуля A существует изоморфизм

$$H^1(F_S, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{F_S}(A, C_{S,\Omega} \otimes Q_p/Z)'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 существует изоморфизм

$$H^1(F_S, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{F_S}(A, C_{S,\Omega})'.$$

Пусть H – подгруппа группы F_S, тривиально действующая на модуль A, $F = F_S / H$ и $K = \Omega^H$. Из коммутативной диаграммы с естественными гомоморфизмами

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_F(Z(A), C_{S,K}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_F(V, C_{S,K}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_F(A, C_{S,K}) & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & & & \\
\mathrm{Hom}_{F_S}(Z(A), C_{S,\Omega}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{F_S}(V, C_{S,\Omega}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{F_S}(A, C_{S,\Omega}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

следует, что группы $\mathrm{Ext}^1_F(A, C_{S,K})$ и $\mathrm{Ext}^1_{F_S}(A, C_{S,\Omega})$ изоморфны. Покажем, что в группе $C_{S,\Omega}$ нет нетривиальных элементов периода p. Для этого достаточно доказать аналогичное утверждение для всех групп C_{s,K_α}. Так как $cd_p F_s = 1$, то в силу предложения I4 гл.I [9] $cd_p H_\alpha = 1$, следовательно,

$$H^2(H_\alpha, Z/pZ) = 0.$$

В силу теоремы 2

$$Hom\left(Z/pZ, C_{s,K_\alpha}\right) \approx H^2\left(H_\alpha, Z/pZ\right)' = 0.$$

Так как группа $C_{s,K}$ не имеет p -кручения, то точна последовательность F -модулей

$$1 \longrightarrow C_{s,K} \otimes Z \xrightarrow{\gamma_5} T = Hom\left(Z(F), C_{s,K} \otimes Q_p\right) \longrightarrow T_1 \longrightarrow 1,$$

где $Z(F)$ - целочисленное групповое кольцо группы F с образующими e_σ и γ_5 определяется следующим образом:

$$\gamma_5(c \otimes 1)(e_\sigma) = c \otimes 1 \text{ для всех } \sigma \in F.$$

Индуцированная точная последовательность

$$Hom_F(A,T) \longrightarrow Hom_F(A,T_1) \longrightarrow Ext_F^1(A, C_{s,K}) \longrightarrow Ext_F^1(A,T),$$

$C_{s,K} \otimes Q_p$ - группа с делением на p и не имеет p -кручения, следовательно,

$$Hom_F(A,T) = 0; \quad Ext_F^1(A,T) \approx Ext^1(A, C_{s,K} \otimes Q_p) = 0.$$

Таким образом, группы $Hom_F(A, T_1)$ и $Ext_F^1(A, C_{s,K})$ изоморфны. Рассмотрим коммутативную диаграмму с естественными гомоморфизмами

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & C_{s,K} \arrow[r, "\gamma_6"] & T \arrow[r, "\gamma_7"] & T_1 \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & C_{s,K} \arrow[r] \arrow[u, equal] & C_{s,K} \otimes Q_p \arrow[r, "\gamma_{10}"] \arrow[u, "\gamma_8"] & C_{s,K} \otimes Q_p/Z \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_9"] & 1.
\end{tikzcd}$$

Пусть $t_1 \in T_1$ и $p^n t_1 = 1$. Возьмем t - прообраз t_1 в группе T, тогда $p^n t = \gamma_6 t_2$ при некотором элементе $t_2 \in C_{s,K}$, т.е.

$$p^n t(e_\sigma) = t_2 \otimes 1 \quad \text{для всех } \sigma \in F.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\bar{t} \in T$, определенный следующим образом

$$\bar{t}(e_\sigma) = t_2 \otimes \frac{1}{p^n} \quad \text{для всех } \sigma \in F$$

Тогда $p^n \bar{t} = t$, $\bar{t} = \gamma_8 (t_2 \otimes \frac{1}{p^n})$ и $\gamma_9 \gamma_{10} (t_2 \otimes \frac{1}{p^n}) = t_1$.
Таким образом, p – компоненты групп T_1 и $C_{S,K} \otimes Q_p / Z$ совпадают, следовательно, $C_{S,\Omega} \otimes Q_p / Z$ – дуализирующий модуль.

Литература

I. Brumer A. Galois groups of extentions of algebraic number fields with given ramification. – Mich.Math., 1966,vol.13, N 1, p.33–40.
2. Кузьмин Л.В. Гомологии проконечных групп, мультипликатор Шура и теория полей классов. – Изв.АН СССР. Сер.мат., I969, т.33, № 6, с.I220–I254.
3. Нойманн О. О p-замкнутых полях алгебраических чисел с ограниченным ветвлением. – Изв.АН СССР. Сер.мат., I975, т.39, № 2, с.259–27I.
4. Tate J. Duality theorems in Galois cohomology over number fields. – In: Proc.Internat.Congr.Math.Aug. 1962, Djursholm. Uppsala, 1963, p.288–295.
5. Uchida K. On Tate's duality theorems in Galois cohomology. – Tohoku Math.J., 1969, vol.21, N 1, p.92–101.
6. Takahashi T. On extentions with given ramification.– Proc.Japan Acad., 1968, vol.44, N 8, p.771–775.
7. Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. М., I958, 403 с.
8. Кузьмин Л.В. Модуль Тэйта полей алгебраических чисел.– Изв.АН СССР. Сер.мат., I972, т.36, № 2, с.267–327.
9. Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. М., I968, 208 с.
I0. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М., I960. 5I0 с.
11. Lang S. Rapport sur la cohomologie des groupes. N.-Y. – Amsterdam, 1966. 260 p.