Ю. Л. Сачков, Управляемость двумерных и трехмерных билинейных систем в положительном ортанте, *Диффе-ренц. уравнения*, 1993, том 29, номер 2, 361–363

ФЕВРАЛЬ 1993 г., ТОМ 29, № 2

УДК 517.977

Ю. Л. САЧКОВ

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ОРТАНТЕ

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим билинейную управляемую систему

$$\dot{X}=(uA+B)X,\ X\in\mathbf{R}^n,\ u\in(-\infty;+\infty). \tag{1}$$

Приведем необходимые обозначения и определения. Пусть $X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$. Тогда запись $X\geqslant 0$ $(X>0)$ означает, что $x_i\geqslant 0$ (соответственно $x_i>0$) при всех $i=1,\dots,n$, $\mathbf{R}^n_+=\{X\in\mathbf{R}^n: X\geqslant 0\}$, $\mathring{\mathbf{R}}^n_+=\{X\in\mathbf{R}^n: X>0\}$. $\mathrm{Lie}(A,B)$ — матричная алгебра Ли, порожденная матрицами A и B; при $X\in\mathbf{R}^n$ $\mathrm{Lie}(A,B)(X)=\{V\in\mathbf{R}^n: V=CX,\ C\in\mathrm{Lie}(A,B)\}$.

Пусть $X\in\mathbf{R}^n$. Через $R_1^+(X)$ обозначим множество достижимости системы (1) из точки X за произвольное неотрицательное время, а через $R_1^-(X)$ — множество достижимости системы (1) из точки X за произвольное неположительное время.

Определение 1. Система (1) называется управляемой в положительном ортанте $\mathbf{R}^n_+$, если для любой точки $X\in\mathbf{R}^n_+\setminus\{0\}$ имеем $R_1^+(X)\supset\mathring{\mathbf{R}}^n_+$.

Задача управляемости системы (1) в $\mathbf{R}^n_+$ рассматривалась в работе [1]. Там указано, что эту задачу имеет смысл рассматривать лишь если положительный ортант инвариантен для системы (1), т. е. когда матрица A диагональна, а матрица B существенно неотрицательна (т. е. $b_{ij}\geqslant 0$ при $i\neq j$). В [1] для случая $n=2$ приведены открытые подмножества множества пар матриц (A,B) с указанными свойствами, для которых получено решение поставленной задачи; дополнение к этим открытым подмножествам имеет непустую внутренность.

В данной работе предлагается решение задачи управляемости системы (1) в $\mathbf{R}^n_+$ при $n=2, 3$ для почти всех пар (A,B) указанного вида. При $n=2$ это решение охватывает результаты [1].

2. **Вспомогательная лемма.** Рассмотрим наряду с (1) систему

$$\dot{X}=(uA+B)X,\ X\in\mathbf{R}^n,\ u\in[-\infty;+\infty]. \tag{2}$$

Траекториями системы (2) являются траектории системы (1) (когда $u\in\mathbf{R}$) и траектории полей $\pm AX$ (когда $u=\pm\infty$).

Определение 2. Система (2) называется управляемой в положительном ортанте $\mathbf{R}^n_+$, если для любой точки $X\in\mathbf{R}^n_+\setminus\{0\}$ имеем $R_2^+(X)\supset\mathring{\mathbf{R}}^n_+$, где $R_2^+(X)$ обозначает множество достижимости системы (2) за произвольное неотрицательное время.

Лемма 1. *Система (1) управляема в $\mathbf{R}^n_+$ тогда и только тогда, когда управляема в $\mathbf{R}^n_+$ система (2).*

Доказательство. В силу включения $R_2^+(X)\supset R_1^+(X)$ необходимо доказать только, что из управляемости в $\mathbf{R}^n_+$ системы (2) следует управляемость (1). Пусть для любого $X\in\mathbf{R}^n_+\setminus\{0\}$ имеем $R_2(X)\supset\mathring{\mathbf{R}}^n_+$. Тогда из результатов [2] следует, что $\dim\mathrm{Lie}(A,B)(X)=n$ для любого $X\in\mathbf{R}^n_+\setminus\{0\}$. Значит, для любого $X\in\mathbf{R}^n_+\setminus\{0\}$ имеем (снова используя результаты [2]) $\overline{\mathrm{int}\,R_1^+(X)}\supset R_1^+(X)\supset\mathring{\mathbf{R}}^n_+$. Таким же рассуждением показывается, что для любого $X\in\mathring{\mathbf{R}}^n_+$ имеем $\overline{\mathrm{int}\,R_1^-(X)}\supset R_1^-(X)\supset\mathbf{R}^n_+\setminus\{0\}$. Для любых $X\in\mathbf{R}^n_+\setminus\{0\}$, $Y\in\mathring{\mathbf{R}}^n_+$ имеем $R_1^+(X)\cap R_1^-(Y)\neq\varnothing$, а для $Z\in R_1^+(X)\cap R_1^-(Y)$ имеем $Y\in R_1^+(Z)$, $Z\in R_1^+(X)$; т. е. $Y\in R_1^+(X)$. Система (1) управляема в $\mathbf{R}^n_+$. Лемма 1 доказана.

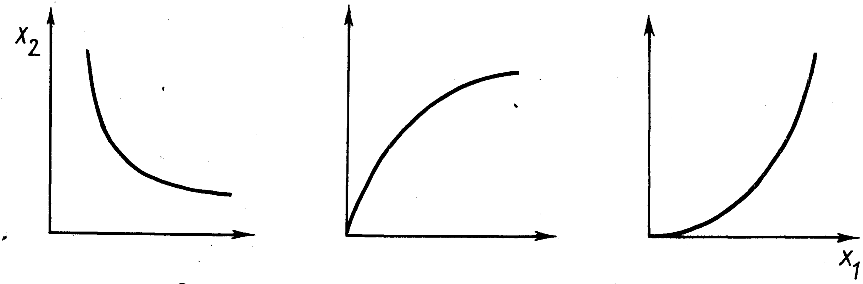
3. **Двумерные системы.** Пусть $n=2$,

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$a_1\neq a_2,\ a_1a_2\neq 0,\ b_{12}>0,\ b_{21}>0. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (3), (4). Система (2) управляема в $\mathbf{R}^2_+$ тогда и только тогда, когда любая траектория поля AX в $\mathring{\mathbf{R}}^2_+$ пересекается полем BX в обоих направлениях.*

Доказательство. Траектории AX в $\mathring{\mathbf{R}}^2_+$ имеют в зависимости от a_1 и a_2 один из видов, изображенных на рисунке.



$a_1 a_2 < 0$ $\quad |a_1| > |a_2| > 0$ $\quad |a_2| > |a_1| > 0$

Пусть в $\mathring{\mathbf{R}}^2_+$ одна (а тогда и любая) траектория поля AX пересекается полем BX только в одном направлении. Тогда система (2) неуправляема в $\mathbf{R}^2_+$, так как эта траектория AX делит $\mathbf{R}^2_+\backslash\{0\}$ на две части такие, что попасть из одной в другую можно, лишь пересекая эту траекторию AX. Но переход через эту траекторию в силу системы (2) в направлении, противоположном направлению пересечения ее полем BX, невозможен.

Если любая траектория AX в $\mathring{\mathbf{R}}^2_+$ пересекается полем BX в обоих направлениях, то из любой точки $\mathbf{R}^2_+\backslash\{0\}$ можно в силу системы (2) попасть сначала на любую траекторию AX в $\mathring{\mathbf{R}}^2_+$, а затем в любую точку этой траектории. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (3), (4). Любая траектория поля AX в $\mathring{\mathbf{R}}^2_+$ пересекается полем BX в обоих направлениях тогда и только тогда, когда*

$$\left[\begin{array}{l} a_1a_2>0,\\ \begin{cases} (a_1b_{22}-a_2b_{11})^2+4a_1a_2b_{21}b_{12}>0,\\ (a_1b_{22}-a_2b_{11})a_1\leqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

(Квадратные скобки здесь и далее обозначают логическое «или».)

Доказательство. Любая траектория поля AX в $\mathring{\mathbf{R}}^2_+$ пересекается полем BX в обоих направлениях тогда и только тогда, когда меняет знак в $\mathring{\mathbf{R}}^2_+$ функция $f(X)=$ $=\det(AX, BX)$,

$$f(x_1, x_2)=a_1b_{21}x_1^2+(a_1b_{22}-a_2b_{11})x_1x_2-a_2b_{12}x_2^2.$$

Определим также функцию $g(k)=c_0k^2+c_1k+c_2$, где $c_0=a_1b_{21}\neq 0$, $c_1=a_1b_{22}-a_2b_{11}$, $c_2=-a_2b_{12}$.

Функция $f(X)$ меняет знак в $\mathring{\mathbf{R}}^2_+$ тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен $g(k)$ имеет хотя бы один положительный простой корень. Выразим это условие через c_i:

$$D=c_1^2-4c_0c_2>0,$$

$$k_{1,2}=(-c_1\pm\sqrt{c_1^2-4c_0c_2})/(2c_0)=-(c_1/(2c_0))\pm\sqrt{(c_1/(2c_0))^2-c_2/c_0}.$$

Больший корень $k_1=-(c_1/(2c_0))+\sqrt{(c_1/(2c_0))^2-c_2/c_0}$.

Итак, условие того, что $g(k)$ имеет хотя бы один положительный простой корень, имеет вид

$$\begin{cases} c_1^2-4c_0c_2>0,\\ -(c_1/(2c_0))+\sqrt{(c_1/(2c_0))^2-c_2/c_0}>0\end{cases} \langle=\rangle$$

$$\langle=\rangle \begin{cases} c_1^2-4c_0c_2>0,\\ \left[\begin{array}{l} c_1/(2c_0)\leqslant 0,\\ (c_1/(2c_0))^2-c_2/c_0>(c_1/(2c_0))^2\end{array}\right.\end{cases} \langle=\rangle \begin{cases} c_1^2-4c_0c_2>0,\\ \left[\begin{array}{l} c_1c_0\leqslant 0,\\ c_2c_0<0\end{array}\right.\end{cases} \langle=\rangle$$

$$\langle=\rangle \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_1^2-4c_0c_2>0,\\ c_1c_0\leqslant 0,\end{cases}\\ \\ \begin{cases} c_1^2-4c_0c_2>0,\\ c_2c_0<0\end{cases}\end{array}\right. \langle=\rangle \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_1^2-4c_0c_2>0,\\ c_1c_0\leqslant 0,\end{cases}\\ c_2c_0<0.\end{array}\right.$$

Выражая это условие через a_i, b_{ij} и учитывая, что $b_{12}>0$, $b_{21}>0$, получаем условие леммы. Лемма 3 доказана.

Из лемм 1—3 следует

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3), (4). Система (1) управляема в $\mathbf{R}^2_+$ тогда и только тогда, когда*

$$\left[\begin{array}{l} a_1a_2>0, \\ \begin{cases} (a_1b_{22}-a_2b_{11})^2+4a_1a_2b_{21}b_{12}>0, \\ (a_1b_{22}-a_2b_{11})a_1\leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Замечание. Если $a_1=a_2$, то система (1) неуправляема в $\mathbf{R}^2_+$, так как при $a_1\neq 0$ траекториями поля AX являются лучи с вершиной в начале координат и поле BX не может пересекать их в обоих направлениях, а при $a_1=0$ поле AX всюду равно нулю.

4. **Трехмерные системы.** Пусть $n=3$.

Теорема 2. *Пусть* $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, $a_1<a_2<a_3$, $b_{13}>0$, $b_{31}>0$, $b_{12}>0$, $b_{32}>0$. ***Тогда система (1) не является управляемой в*** $\mathbf{R}^3_+$.

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию на $\mathring{\mathbf{R}}^3_+$:

$$H(x_1, x_2, x_3)=x_1^{(a_3-a_2)}x_2^{(a_1-a_3)}x_3^{(a_2-a_1)}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что:

1) при $\forall C>0$ поле AX касается поверхности $\{H=C\}$;

2) при малых положительных C поле BX пересекает поверхность $\{H=C\}$ только в одном направлении.

$$\operatorname{grad} H(x_1, x_2, x_3)=((a_3-a_2)/x_1, (a_1-a_3)/x_2, (a_2-a_1)/x_3)H.$$

1) $(AX, \operatorname{grad} H(X))=a_1x_1H(a_3-a_2)/x_1+a_2x_2H(a_1-a_3)/x_2+a_3x_3H(a_2-a_1)/x_3=$ $=(a_1(a_3-a_2)+a_2(a_1-a_3)+a_3(a_2-a_1))H=0$;

2) положим $\Phi(X)=(BX, \operatorname{grad} H(X))=(a_3-a_2)(b_{11}+b_{12}(x_2/x_1)+b_{13}(x_3/x_1))H+$ $+(a_1-a_3)(b_{21}(x_1/x_2)+b_{22}+b_{23}(x_3/x_2))H+(a_2-a_1)(b_{31}(x_1/x_3)+b_{32}(x_2/x_3)+b_{33})H$.

Покажем, что при малых $C>0$ имеем $\Phi|_{H=C}>0$. Положим $u=x_1/x_2$, $v=x_3/x_2$, $\alpha=a_3-a_2$, $\beta=a_2-a_1$.

$$H(x_1, x_2, x_3)=(x_1/x_2)^{(a_3-a_2)}(x_3/x_2)^{(a_2-a_1)}=u^\alpha v^\beta.$$

На поверхности $\{H=C\}$ имеем $v=C^{1/\beta}u^{-\alpha/\beta}$, причем $1/\beta>0$, $-\alpha/\beta<0$,

$$\Phi=(a_3-a_2)(b_{11}+b_{12}u^{-1}+b_{13}(v/u))H+(a_1-a_3)(b_{21}u+b_{22}+b_{23}v)H+$$
$$+(a_2-a_1)(b_{31}(u/v)+b_{32}v^{-1}+b_{33})H,$$
$$\Phi|_{H=C}=C(a_3-a_2)(b_{11}+b_{12}u^{-1}+b_{13}C^{1/\beta}u^{-1-\alpha/\beta})+$$
$$+C(a_1-a_3)(b_{21}u+b_{22}+b_{23}C^{1/\beta}u^{-\alpha/\beta})+$$
$$+C(a_2-a_1)(b_{31}C^{-1/\beta}u^{1+(\alpha/\beta)}+b_{32}C^{-1/\beta}u^{\alpha/\beta}+b_{33}).$$

Выберем число $K>0$ достаточно малым так, чтобы

$$(a_3-a_2)b_{12}/K+(a_3-a_2)b_{11}+(a_1-a_3)(b_{21}K+b_{22})+(a_2-a_1)b_{33}>0.$$

Уменьшая K, можно также добиться того, чтобы при $u<K$ выполнялось неравенство

$$(a_3-a_2)b_{13}C^{1/\beta}u^{-1-(\alpha/\beta)}+(a_1-a_3)b_{23}C^{1/\beta}u^{-\alpha/\beta}>0.$$

Тогда при любом $C>0$ имеем $\Phi|_{H=C,\, u<K}>0$. Выберем теперь $C>0$ достаточно малым так, чтобы

$$(a_2-a_1)b_{32}C^{-1/\beta}K^{\alpha/\beta}+(a_3-a_2)b_{11}+(a_1-a_2)(b_{22}+b_{23}C^{1/\beta}K^{-\alpha/\beta})+(a_2-a_1)b_{33}>0.$$

Уменьшая $C>0$, можно также добиться того, чтобы при $u\geqslant K$ выполнялось неравенство

$$(a_2-a_1)b_{31}C^{-1/\beta}u^{1+\alpha/\beta}+(a_1-a_3)b_{21}u>0.$$

Для выбранного так C имеем $\Phi|_{H=C,\, u\geqslant K}>0$ и $\Phi|_{H=C,\, u<K}>0$, т. е $\Phi|_{H=C}>0$. Теорема 2 доказана.

Автор выражает благодарность А. Ф. Филиппову за внимание к работе.

Литература

1. Boothby W. M. // SIAM J. Control and Optimization. 1982. Vol. 20. N 5.

2. Sussmann H., Jurdjevich V. // J. Differential equations. 1972. Vol. 12. P. 95—116.

Институт программных систем РАН

Поступила в редакцию 18 сентября 1991 г.