N. G. Askerov, S. G. Krein, G. I. Laptev, On a class of non-selfadjoint boundary-value problems,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1964, Volume 155, Number 3, 499–502

Доклады Академии наук СССР
1964. Том 155, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. Г. АСКЕРОВ, С. Г. КРЕЙН, Г. И. ЛАПТЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 23 XII 1963)

Ряд вопросов математической физики приводит к однородным краевым задачам, содержащим один и тот же параметр λ в дифференциальных уравнениях и в граничных условиях. Несмотря на то, что при каждом фиксированном λ дифференциальный оператор и граничные условия являются самосопряженными, задача в целом часто бывает несамосопряженной; спектр может быть невещественным. В настоящей статье проводится общее рассмотрение одного класса таких задач.

1^0. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\, , \,)$ задан линейный оператор A со всюду плотной областью определения $D(A)$. Пусть, кроме того, на $D(A)$ определены два линейных оператора T и Γ, отображающие $D(A)$ в некоторое другое сепарабельное гильбертово пространство H_1 со скалярным произведением $(\, , \,)_1$. Операторы A, T, Γ обладают следующими свойствами:

1) Совокупность элементов из $D(A)$, удовлетворяющих условиям $\Gamma v = 0$, и $Tv=0$, плотна в H.

2) Сужение A_0 оператора A на множество всех элементов из $D(A)$, для которых $Tu = 0$, является самосопряженным, положительно определенным оператором, имеющим вполне непрерывный обратный.

Введем в рассмотрение оператор $A_0^{1/2}$. Область его определения $D(A_0^{1/2})$ будем рассматривать как гильбертово пространство $H_{1/2}$ со скалярным произведением $[uv] = (A_0^{1/2}u, A_0^{1/2}v)$ $(u, v \in D\,(A_0^{1/2}))$. Как известно, пространство $H_{1/2}$ может быть получено из $D(A_0)$ замыканием его по норме $\sqrt{[u, u]} = \sqrt{(A_0u, u)}$.

3) Оператор Γ отображает $D(A_0)$ в множество, плотное в H_1, и при этом является вполне непрерывным как оператор из пространства $H_{1/2}$ в пространство H_1. Будем считать оператор Γ расширенным по непрерывности на все пространство $H_{1/2}$, при этом $\| \Gamma u \|_1 \leqslant C \| A_0^{1/2}u \|$ $(u \in D\,(A_0^{1/2}) = H_{1/2})$.

4) Имеет место «формула Грина»:

$$(Au, v) = A\,(u, v) - (Tu, \Gamma v)_1, \tag{1}$$

где $A\,(u, v)$ — билинейный функционал такой, что $A\,(u, u) \geqslant 0$. Нетрудно видеть, что функционал $A\,(u, v)$ может быть по непрерывности расширен на все элементы $u, v \in D\,(A_0^{1/2})$, причем $A\,(u, v) = (A_0^{1/2}u, A_0^{1/2}v)$.

Обозначим через N совокупность всех элементов w из $D(A_0^{1/2})$, для которых неравенство $|(A_0^{1/2}w, A_0^{1/2}z)| \leqslant C_w \| \Gamma z \|_1$ справедливо при любом $z \in D(A_0^{1/2})$.

Лемма 1. *Для каждого $\varphi \in H_1$ существует единственный элемент $w \in N$, удовлетворяющий тождеству*

$$(A_0^{1/2}w, A_0^{1/2}z) = (\varphi, \Gamma z)_1 \tag{2}$$

при любом $z \in D(A_0^{1/2})$. Наоборот, каждому $w \in N$ отвечает единственный элемент $\varphi \in H_1$, удовлетворяющий тождеству (2).

Лемма доказывается обычными рассуждениями с помощью теоремы Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Если $w \in N \cap D(A)$, то выполнены условия $Aw = 0$ и $Tw = \varphi$. Следовательно, элементы $w \in N$ можно рассматривать как обобщенные решения этих уравнений. В дальнейшем при любом $w \in N$ будем обозначать $\varphi = Tw$ и $w = T^{-1}\varphi$.

Лемма 2. *Оператор $R = A_0^{1/2}T^{-1}\Gamma A_0^{-1/2}$ является самосопряженным неотрицательным вполне непрерывным оператором в H.*

2^0. Постановка задачи: требуется найти решение уравнения

$$Ay = \lambda y, \tag{3}$$

удовлетворяющее условию

$$\lambda Ty = \sigma \Gamma y, \tag{4}$$

где заданное $\sigma > 0$.

Обобщенным решением задачи (3) — (4) будем называть элемент $y \in D(A_0^{1/2})$, представимый в виде $y = u + w$, где $u \in D(A_0)$, $w \in N$ удовлетворяют уравнениям $A_0 u = \lambda y$ и $\lambda Tw = \sigma \Gamma y$.

Теорема 1. *Задача о нахождении обобщенных решений* (3) — (4) *эквивалентна задаче о решении в пространстве H уравнения*

$$x = \lambda A_0^{-1} x + \frac{\sigma}{\lambda} Rx. \tag{5}$$

Если x — решение (5), *то $y = A_0^{1/2}x$ — обобщенное решение* (3) — (4), *и наоборот.*

3^0. Исследуем в общем виде в гильбертовом пространстве H уравнение

$$f = \lambda Pf + \frac{1}{\lambda} Qf, \tag{6}$$

где P — положительный, а Q — неотрицательный вполне непрерывные операторы в H.

Из результатов И. Ц. Гохберга ([1]) (см. также ([2])) следует, что числа λ, соответствующие ненулевым решениям уравнения (6) (собственные числа), могут иметь лишь две точки сгущения: $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. В связи с этим естественно попытаться преобразовать уравнение (6) к такому виду, чтобы собственные числа нового уравнения имели лишь одну точку сгущения $\lambda = 0$.

Непосредственно проверяется, что уравнение (6) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} P^{1/2}BP^{1/2}g + P^{1/2}BQ^{1/2}h &= \frac{1}{1+\lambda} g, \\ -Q^{1/2}BP^{1/2}g + (I - Q^{1/2}BQ^{1/2})\, h &= \frac{1}{1+\lambda} g, \end{aligned} \tag{7}$$

где $g = P^{1/2}f$, $h = \frac{1}{\lambda} Q^{1/2}f$ и $B = (I + P + Q)^{-1}$.

Систему (7) можно рассматривать как уравнение

$$\mathfrak{A}X = \mu X \quad \left(X = \binom{g}{h}, \ \mu = \frac{1}{1+\lambda}\right)$$

в пространстве $H \times H$ с оператором

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} P^{1/2}BP^{1/2} & P^{1/2}BQ^{1/2} \\ -Q^{1/2}BP^{1/2} & I - Q^{1/2}BQ^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ были точками сгущения собственных чисел уравнения (6), то точками сгущения спектра оператора $\mathfrak{A}$ будут $\mu = 1$ и $\mu = 0$. Построим оператор $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(I - \mathfrak{A})$. Прямым вычислением получаем

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} P^{1/2}B(I + 2Q)BP^{1/2} & -P^{1/2}B(P - Q)BQ^{1/2} \\ Q^{1/2}B(P - Q)BP^{1/2} & Q^{1/2}B(I + 2P)BQ^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Оператор $\mathfrak{B}$ оказывается вполне непрерывным. Между собственными числами λ уравнения (6) и собственными числами ν оператора $\mathfrak{B}$ имеется соотношение $\lambda/(1+\lambda)^2=\nu$.

Теорема 2. *Все собственные числа уравнения* (6) *имеют неотрицательную вещественную часть. Если выполнено условие*

$$4\,\| P \|\,\| Q \| \leqslant 1, \tag{9}$$

то все собственные числа вещественны. Если условие (9) *не выполнено, то невещественные собственные числа уравнения* (6) *могут располагаться лишь в кольце* $1/2\,\| P \| \leqslant |\lambda| \leqslant 2\| Q \|$ *и, в силу этого, они образуют конечное множество* *.

Если рассмотреть сумму корневых подпространств оператора $\mathfrak{B}$, соответствующих данному собственному числу ν, то получится инвариантное конечномерное подпространство оператора $\mathfrak{A}$. В нем можно выбрать базис, в котором оператор $\mathfrak{A}$ имеет нормальную жорданову форму. В подпространстве, соответствующем одной жордановой клетке, нам будет удобно выбрать базис из элементов $X_0, X_1, \ldots, X_m$ таких, что

$$\mathfrak{A}X_k=\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{k-l}}{(1+\lambda)^{k+1-l}}X_l \quad (k=0,\,1,\,\ldots,\,m).$$

Если $X_k=\begin{pmatrix} g_k \\ h_k \end{pmatrix}$, то элементы $f_k=P^{-1/2}g_k$ удовлетворяют уравнениям

$$f_k=\lambda Pf_k+\frac{1}{\lambda}Qf_k+Pf_{k-1}+\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^{k-l}}{\lambda^{k+1-l}}Qf_l \quad (k=0,\,1,\,\ldots,\,m).$$

Эти уравнения могут быть получены формально дифференцированием уравнения (6) по λ, если при этом полагать $f_k=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f_0}{\partial\lambda^k}$. Подпространство, натянутое на каждую цепочку элементов $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ максимальной длины, называют корневым подпространством, соответствующим собственному числу λ.

Вещественная часть оператора $\mathfrak{B}$ определяется диагональными членами матрицы (8) и является неотрицательным оператором, поэтому к изучению вопроса о полноте системы корневых подпространств уравнения (6) можно применить теорию диссипативных операторов. Если операторы P и Q имеют конечный след, то и все операторы матрицы (8) имеют конечный след. С помощью результатов В. Б. Лидского ([3]) и М. Г. Крейна ([4]) можно получить:

Теорема 3. *Если операторы P и Q имеют конечный след, то система корневых подпространств уравнения* (6) *двукратно полна в пространстве H в следующем смысле* (*см.* ([5])): *для каждой пары элементов $x, y \in H$ существует последовательность линейных комбинаций* $\sum c_{sk}^{(N)}f_k^{(s)}$ $(N=1,2,\ldots)$ *из собственных и присоединенных элементов уравнения* (6) (s *— номер корневого подпространства*, k *— номер присоединенного элемента*) *такая, что при* $N\to\infty$

$$\sum_k c_{sk}^{(N)}f_k^{(s)}\to x \quad \text{в норме } (Px,\,x),$$

$$\sum c_{sk}^{(N)}\sum_{j=0}\frac{(-1)^{k-j}}{\lambda^{k+1-j}}f_j^{(s)}\to y \quad \text{в полунорме } (Qx,x)\,**.$$

---

* Условие (9) может быть заменено менее ограничительным $4\,(Pf,\,f)\,(Qf,\,f)\leqslant(f,f)^2$ при любом $f\in H$.

** Как нам сообщил М. Г. Крейн, результаты, полученные им совместно с Г. Лангером, в некоторых случаях позволяют расширить теорему 3.

4^0. Элементы $y_1, y_2, \ldots, y_m$ назовем присоединенными к обобщенному решению y_0 задачи (3) — (4), если $y_k = u_k + w_k$, где $u_k \in D(A_0)$, $w_k \in N$, и удовлетворяют уравнениям

$$A_0 u_k = \lambda y_k + y_{k-1}, \quad \lambda T w_k + T w_{k-1} = \sigma \Gamma y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Подпространство, натянутое на $y_0, y_1, \ldots, y_m$, называется корневым подпространством задачи (3) — (4).

Обозначим через $\{e_k\}$ полную ортонормированную систему собственных элементов оператора A_0, а через $\{\mu_k\}$ — систему соответствующих собственных чисел. Тогда в базисе $\{e_k\}$ оператор R задается матрицей. $R = \left(\frac{\Gamma e_i, \Gamma e_j)}{\sqrt{\mu_i}\sqrt{\mu_j}}\right)$. Его след равен $\sum \frac{\|\Gamma e_n\|_1^2}{\mu_n}$. Из теорем 1—3 следует

Теорема 4. *Начиная с некоторого номера, все собственные числа задачи* (3) — (4) *вещественны. Если выполнены условия*

$$\sum \frac{1}{\mu_n} < \infty, \quad \sum \frac{\|\Gamma e_n\|_1^2}{\mu_n} < \infty, \tag{10}$$

то система $\{y_k^{(s)}\}$ *обобщенных и присоединенных решений задачи* (3) — (4) *двукратно полна в следующем смысле: для каждой пары элементов* $x \in H$ *и* $\varphi \in H_1$ *найдутся линейные комбинации решений* $y_k^{(s)}$ *такие, что при* $N \to \infty$

$$\sum c_{sk}^{(N)} y_k^{(s)} \to x \quad \text{в } H; \quad \sum c_{sk}^{(N)} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j} \Gamma y_j^{(s)}}{\lambda^{k+1-j}} \to \varphi \text{ в } H_1. \tag{11}$$

Замечание 1. Теорема 4 остается справедливой, если множитель σ заменить ограниченным неотрицательным оператором в H_1. В последней части теоремы тогда можно утверждать, что линейные комбинации (11) сходятся в полунорме $(\sigma\varphi, \varphi)_1$.

Замечание 2. Если σ — отрицателен, то задача (3) — (4) также сводится к исследованию уравнения (5) или к уравнению

$$f = \lambda P f - \frac{1}{\lambda} Q f,$$

где P и Q — такие же, как и в (6). Последнее уравнение заменой $g = P^{1/2} f$ и $h = \frac{1}{\lambda} Q^{1/2} f$ сводится к уравнению $\mathfrak{A}X = \lambda X$, где $\mathfrak{A}$ — самосопряженный оператор в пространстве $H \times H$. Таким образом, при $\sigma < 0$ задача резко упрощается. Для любой пары элементов $x \in H$ и $\varphi \in H_1$ можно написать разложения в ряды по обобщенным решениям задачи (3) — (4).

Замечание 3. Условия, при которых доказана первая часть теоремы 4, проверяются в различных задачах для уравнений в частных производных с помощью теорем вложения и энергетических неравенств. При этом оператор A определяется дифференциальным выражением, а операторы T и Γ являются граничными операторами. Условия (10) значительно более стеснительны. Для расширения круга возможных приложений следует в теореме 3 ослабить условия на операторы P и Q.

Авторы выражают искреннюю благодарность М. Г. Крейну за ценные дискуссии.

Поступило
16 XII 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, ДАН, 78, 629 (1951). [2] A. E. Taylor, Ann. Math., ser. 2, 39, № 3 (1938). [3] В. Б. Лидский, Тр. Моск. матем. общ., 8, 83 (1959). [4] М. Г. Крейн, ДАН, 130, № 2 (1960). [5] М. В. Келдыш, ДАН, 77, 11 (1951).