П. П. Кулиш, Многокомпонентное нелинейное уравнение Шредингера с градуировкой, *Докл. АН СССР*, 1980, том 255, номер 2, 323–326

УДК 517.43 + 530.145 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

П.П. КУЛИШ

МНОГОКОМПОНЕНТНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ГРАДУИРОВКОЙ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 8 VIII 1980)

В настоящее время известный метод обратной задачи решения нелинейных эволюционных уравнений перенесен в квантовую теорию ([1-6]). Квантовый метод обратной задачи (к.м.о.з.) позволил установить глубокие связи ([5]) между различными приемами одномерной математической физики, среди которых упомянем анзатц Бете в теории ферромагнетиков ([3], [6]) и специальные методы вычисления статсумм двумерных решеточных моделей. Упомянутые результаты относятся к уравнениям и моделям с бозе-полями, которым в классической теории отвечают функции с коммутирующими значениями. В предлагаемой статье формулируется к.м.о.з. для уравнений, содержащих наряду с бозе-полями ферми-поля, которым в классическом пределе отвечают функции со значениями в алгебре Грассмана G. Мы делаем это на примере нелинейного уравнения Шредингера, взяв наиболее общий матричный случай.

1. Рассмотрим прямоугольную $(n \times m)$ матрицу $q = \{q_{a\alpha}\}$, элементы которой принадлежат G. Матрица q называется градуированной ([7]) (ниже речь будет идти только о Z_2-градуировке), если ее строкам $(a = 1, 2, \ldots, n)$ и столбцам ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$) приписана определенная четность $p(a)$, $p(\alpha)$, принимающая значения 0 или 1. Градуированная матрица q имеет определенную четность $p(q)$, если все ее элементы имеют определенную четность (однородны), а выражение $p(q) = p(q_{a\alpha}) + p(a) + p(\alpha)$ не зависит от a и α. Говорят, что $(n \times m)$-градуированная матрица имеет структуру $(k, l) \times (q, r)$, $k + l = n$, $q + r = m$, если k строк и q столбцов четны $(p = 0)$, а l строк и r столбцов нечетны $(p = 1)$. Далее будем рассматривать только четные матрицы и для простоты будем считать, что матрица q имеет структуру $(n, 0) \times (m - l, l)$. Линейное градуированное пространство C^n размерности n имеет структуру $(n - l, l)$, если в базисе, состоящем из однородных векторов, $n - l$ четных и l нечетных векторов.

2. Пусть $q(x, t)$ — функция со значениями в линейном пространстве описанных в п.1 градуированных $(n \times m)$-матриц с матричными элементами в бесконечномерной нормированной алгебре Грассмана ([7]). Матричное нелинейное уравнение Шредингера

$$(1)\qquad i\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t) - 2cq(x, t)q^+(x, t)q(x, t)$$

является условием совместности двух линейных систем

$$(2)\qquad -i\frac{d}{dx} f = \left(\frac{\lambda}{2} J + Q\right) f, \qquad -i\frac{d}{dt} f = (\lambda^2 J + \lambda A + B) f,$$

$$J = \begin{pmatrix} e_n & 0 \\ 0 & -e_m \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ cq^+ & 0 \end{pmatrix},$$

где e_n — единичная матрица в C^n, а матрица A, B просто выражаются через q, q^+ (их явный вид ниже не используется). Четная матрица — потенциал Q имеет структуру $(n + m - l, l) \times (n + m - l, l)$, порожденную составляющими Q блоками q и q^+. Решения уравнений (2) — функции со значениями в градуированном пространстве C^{n+m} структуры $(n + m - l, l)$. В случае, когда матрица q сводится к одному столбцу и $q_a(x)$ — бозе-поля, уравнение (1) было решено в классической теории методом обратной задачи в ([8]), а в квантовой теории – в ([9]). Основной объект исследования метода обратной задачи – матрица монодромии – матрица фундаментальных решений линейной задачи. Для уравнения (2) матрицу монодромии на интервале $(-L, L)$ – $T_L(\lambda)$ естественно представить в блочном виде

$$(3)\qquad T_L(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{ab}(\lambda) & B_{a\beta}(\lambda) \\ C_{\alpha b}(\lambda) & D_{\alpha\beta}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

В следующих пунктах мы определим $T_L(\lambda)$ и опишем ряд ее свойств в квантовой теории.

3. В квантовой теории матричные элементы q – операторнозначные функции в пространстве Фока $\mathcal{H}_\Phi$, удовлетворяющие перестановочным соотношениям (знак определяется четностью элементов $q_{a\beta}(x)$, $\overset{+}{q}_{\alpha b}(y)$),

$$(4)\qquad q_{a\beta}(x) q_{\alpha b}(y) - (-1)^{p(q)p(q^+)} \overset{+}{q}_{\alpha b}(y) q_{a\beta}(x) = \delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}\delta(x-y),$$

т.е. матрица $q(x)$ содержит бозе- и ферми-поля.

Уравнения (1) и (2) следует понимать как нормально упорядоченные (операторы рождения $\overset{+}{q}_{\alpha b}(x)$ стоят левее всех операторов уничтожения $q_{a\beta}(x)$) или, как это принято в к.м.о.з, провести регуляризацию, переходя к решетке ([5]). Элементы матрицы монодромии (3) в квантовой теории становятся операторами в $\mathcal{H}_\Phi$, перестановочные соотношения которых дает следующая

Теорема 1. *Тензорные произведения* $T_L(\lambda) \otimes T_L(\mu)$ и $T_L(\mu) \otimes T_L(\lambda)$ *подобны*

$$(5)\qquad R(\lambda-\mu) T_L(\lambda) \otimes T_L(\mu) = T_L(\mu) \otimes T_L(\lambda) R(\lambda-\mu).$$

Подобие осуществляет унитарная матрица в $C^{n+m} \otimes C^{n+m}$ *вида*

$$(6)\qquad R(\lambda) = b(\lambda) + a(\lambda) P_{n+m},\quad a(\lambda) = 1 - b(\lambda) = \lambda/(\lambda + ic),$$

где P_{n+m} *– оператор перестановки в тензорном произведении градуированных пространств* $C^{n+m} \otimes C^{n+m}$.

В силу градуировки матриц q и Q матрица $T_L(\lambda)$ также градуирована. В утверждении теоремы фигурирует, таким образом, тензорное произведение градуированных матриц, которое для четных матриц F и K в компонентах определяется так:

$$(F \otimes K)_{ij,kl} = F_{ik} K_{jl} (-1)^{p(j)(p(i)+p(k))}.$$

Оператор перестановки в градуированном пространстве

$$P_{ij,kl} = \delta_{il}\delta_{jk}(-1)^{p(i)p(j)}.$$

Следствия: 1) Суперслед $\operatorname{str} T_L(\lambda)$ матрицы монодромии коммутирует при различных значениях спектрального параметра

$$(7)\qquad [\operatorname{str} T_L(\lambda), \operatorname{str} T_L(\mu)] = 0,\quad \operatorname{str} F = \sum_i (-1)^{p(i)} F_{ii}.$$

2) Матрица $L(\lambda) = P_{n+m} R(\lambda)$ удовлетворяет градуированному соотношению Янга – Бакстера

$$(8)\qquad L_{ab,lm}(\lambda-\mu) L_{lc,in}(\lambda) L_{mn,jk}(\mu)(-1)^{p(m)(p(c)+p(n))} =$$
$$= L_{bc,lm}(\mu) L_{am,nk}(\lambda) L_{nl,ij}(\lambda-\mu)(-1)^{p(l)(p(m)+p(k))}.$$

Между решениями $S_{ab,cd}(\lambda)$ обычного соотношения Янга – Бакстера ([5]) и градуированного $L_{ab,cd}(\lambda)$ имеется взаимнооднозначное соответствие

$$S_{ab,cd}(\lambda) = (-1)^{p(a)p(b)} L_{ab,cd}(\lambda).$$

4. Перейдем к диагонализации оператора $\operatorname{str} T_L(\lambda)$ в пространстве Фока для операторов $q_{a\beta}(x)$, $q^+_{\alpha b}(y)$. Как и в случае скалярного уравнения (1)([1,2,5]), вакуум Ω для $q_{a\beta}(x)$ (т.е. $q_{a\beta}(x)\Omega = 0$) является собственным для операторов, стоящих в блоках A, B, D матрицы монодромии (3). Операторы блока C являются операторами рождения. При построении собственных состояний $\operatorname{str} T_L(\lambda)$ основную роль играют следующие из (5) перестановочные соотношения:

$$A_{ab}(\lambda)C_{\alpha c}(\mu) = C_{\alpha d}(\mu)A_{ap}(\lambda)\frac{r^{(n)}_{dp,\,bc}(\lambda-\mu)}{a(\lambda-\mu)} - \frac{b(\lambda-\mu)}{a(\lambda-\mu)}C_{\alpha b}(\lambda)A_{ac}(\mu),$$

$$D_{\alpha\beta}(\lambda)C_{\gamma a}(\mu) = \frac{r^{(m)}_{\alpha\gamma,\,\epsilon\delta}(\mu-\lambda)}{a(\mu-\lambda)}C_{\epsilon a}(\mu)D_{\delta\beta}(\lambda) - \frac{b(\mu-\lambda)}{a(\mu-\lambda)}C_{\alpha a}(\lambda)D_{\gamma\beta}(\mu),$$

$$r^{(m)}_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}(\lambda-\mu)C_{\gamma a}(\lambda)C_{\delta b}(\mu) = C_{\alpha c}(\mu)C_{\beta d}(\lambda)r^{(n)}_{cd,\,ab}(\lambda-\mu).$$

В отличие от скалярного случая здесь возникли матрицы $r^{(n)}(\lambda)$ и $r^{(m)}(\lambda)$, имеющие ту же структуру (6), что и матрица $R(\lambda)$. Оператор $\operatorname{str} T_L(\lambda)$ коммутирует с оператором полного числа частиц $\int q^+_{\alpha b}(x)q_{b\alpha}(x)dx$ и его можно диагонализовать в секторах с фиксированным числом частиц N. При этом возникает необходимость диагонализовать суперследы вспомогательных операторов

$$T_A(\lambda) = L^{(n)}(\lambda-\lambda_N)L^{(n)}(\lambda-\lambda_{N-1})\ldots L^{(n)}(\lambda-\lambda_1),$$

$$T_D(\lambda) = L^{(m)}(\lambda_1-\lambda)L^{(m)}(\lambda_2-\lambda)\ldots L^{(m)}(\lambda_N-\lambda),$$

где $L^{(k)}(\lambda) = P_k r^{(k)}(\lambda)$, $k = n, m$, и при выбранной нами структуре матрицы $q - (n, 0) \times (m-l, l)$ – матрицы $r^{(m)}$, P_m, $L^{(m)}$ и T_D градуированные. Операторы T_A, T_D представляют собой матрицы монодромии обобщенных неоднородных ферромагнетиков на одномерной решетке ([10,11]). Собственные значения $\nu_A(\lambda)$, $\nu_D(\lambda)$ и собственные состояния Φ_A, Φ_D операторов $\operatorname{tr} T_A(\lambda)$ и $\operatorname{str} T_D(\lambda)$ строятся в рамках квантового метода обратной задачи ([5,11]).

Теорема 2. *Собственные состояния оператора* $\operatorname{str} T_L(\lambda)$ *в* $\mathcal{H}_\Phi$ *на интервале* $(-L, L)$ *с периодическими граничными условиями параметризуются* $(n + m - 1)$ *наборами комплексных чисел* λ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$; $\lambda^{(p)}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n_p$, $p = 1, 2, \ldots, n-1$; $\mu^{(q)}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m_q$, $q = 1, 2, \ldots, m-1$, *которые удовлетворяют системе трансцендентных уравнений*

$$e^{2i\lambda_j L}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{a(\lambda_i-\lambda_j)}{a(\lambda_j-\lambda_i)} = \frac{\nu_D(\lambda_j)}{\nu_A(\lambda_j)}$$

и уравнениями для $\{\lambda^{(p)}_j\}$ *и* $\{\mu^{(q)}_k\}$ *– параметров неоднородных ферромагнетиков* ([11]).

Соответствующее собственное значение

$$\nu(\lambda) = e^{i\lambda L}\nu_A(\lambda)\prod_{i=1}^{N}a^{-1}(\lambda-\lambda_i) + e^{-i\lambda L}\nu_D(\lambda)\prod_{i=1}^{N}a^{-1}(\lambda_i-\lambda),$$

$$\nu_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{N}a(\lambda-\lambda_i)\prod_{j=1}^{n_1}a^{-1}(\lambda-\lambda^{(1)}_j) + \prod_{j=1}^{n_1}a^{-1}(\lambda^{(1)}_j-\lambda),$$

$$\nu_D(\lambda) = \prod_{i=1}^{N}a(\lambda_i-\lambda)\prod_{k=1}^{m_1}a^{-1}(\lambda-\mu^{(1)}_k) - \prod_{i=1}^{N}d(\lambda_i-\lambda)\prod_{k=1}^{m_1}\frac{d(\mu^{(1)}_k-\lambda)}{a(\mu^{(1)}_k-\lambda)},$$

где $d(\lambda) = a(\lambda) - b(\lambda)$ (см. (6)) и для краткости ν_A, ν_D приведены в случае структуры q $(2, 0) \times (1, 1)$. Собственный вектор $\operatorname{str} T_L(\lambda)$ получается действием операторов $C_{\alpha_i a_i}(\lambda_i)$ на вакуум Ω и сверткой по индексам $\{\alpha_i\}$, $\{a_i\}$ с состояниями Φ_D и Φ_A соответственно.

Ленинградское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило 4 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е.К. Склянин, Л.Д. Фаддеев*, ДАН, т. 243, 1430 (1978). [2] *Е.К. Склянин*, ДАН, т. 244, 1337 (1979). [3] *P.P. Kulish, E.K. Sklyanin*, Phys. Lett., v. 70A, 461 (1979). [4] *Е.К. Склянин, Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев*, Теор. и матем. физ., т. 40, 194 (1979). [5] *Л.Д. Фаддеев*, Препринт ЛОМИ, Р-2-79, 1979. [6] *Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев*, УМН, т. 34, в. 5, 13 (1979). [7] *F.A. Berezin*, Preprint ITEP-76, 1977. *Ф.А. Березин*, Метод вторичного квантования, М., 1965. [8] *С.В. Манаков*, ЖЭТФ, т. 65, 505 (1973). [9] *M. Gaudin*, Phys. Lett., v. 24A, 55 (1967). *C.N. Yang*, Phys. Rev. Lett., v. 19, 1312 (1967). [10] *B. Sutherland*, Phys. Rev., v. B12, 3795 (1975). [11] *П.П. Кулиш*, Препринт ЛОМИ, Э-3-79, 1979.