N. V. Proskurin, Cubic symplectic theta-functions, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1987, Volume 162, 186–188

Н.В.Проскурин

КУБИЧЕСКИЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ТЭТА-ФУНКЦИИ

1.1. Мы анонсируем здесь существование двух метаплектических форм $\theta_{\vee}$ и $\theta_{\wedge}$, которые, следуя известной аналогии называем кубическими симплектическими тэта-функциями. Они определены на пространстве $\mathfrak{X} = \mathbb{C}^4 \times \mathbb{R}_+^{*2}$, которое изоморфно как вещественное аналитическое многообразие $Sp(4,\mathbb{C})/Sp(4)$. Посредством изоморфизма доставляемого разложением Ивасавы на $\mathfrak{X}$ определяется действие группы $Sp(4,\mathbb{C})$. Пусть Γ главная конгруэнцподгруппа $\bmod 3$ в $Sp(4,\mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ - кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Метаплектические формы $\theta_{\vee}, \theta_{\wedge}$ автоморфны относительно Γ и имеют системой мультипликаторов кубический гомоморфизм Басса-Милнора-Серра $\Psi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$, [1].

1.2. Аналогия, упомянутая выше, основана на конструкции Мааса [3] квадратичной тэта-функции как вычета ряда Эйзенштейна. В силу этой аналогии функцию исследованную Куботой и Паттерсоном, смотрите [4], называют кубической тэта-функцией на $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$; мы обозначим ее θ_*. Еще одна кубическая тэта-функция была найдена в моей работе [6], она определена на $SL(3,\mathbb{C})/SU(3)$. Из результатов Кaждана и Паттерсона [2] следует, что кубических тэта-функций на $SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$, $n \geqslant 4$, нет.

1.3. Все предварительные построения анонсированы нами ранее в [7]. Пусть $E(\cdot, s; \theta_*) : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ - ряд Эйзенштейна соответствующий θ_*; $s \in \mathbb{C}$. Из теорем 1,2 [7] и 8.1 [4] следует, что постоянный член этого ряда Эйзенштейна равен

$$\frac{3^{\frac{5}{2}}}{2} D_{0,0}\left(s, \tfrac{2}{3}\right) J_{0,0}\left(u, y, s, \tfrac{2}{3}\right); \ u, y \in \mathbb{R}_+^*, \ s \in \mathbb{C}; \qquad (1)$$

здесь

$$D_{0,0}\left(s, \tfrac{2}{3}\right) = \frac{\zeta_*(3s-9)\,\zeta_*\left(\frac{3}{2}s-5\right)}{\zeta_*(3s-8)\,\zeta_*\left(\frac{3}{2}s-3\right)}, \quad \zeta_*(s) = \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(s), \qquad (2)$$

а $J_{0,0}$ определяется интегралом, который вычисляется явно, -

$$J_{0,0}(u, y, s, \eta) = \frac{2^5\, 3^{-\frac{15}{2}}\, \pi^3\, u^{-\frac{2}{3}}\, y^{6-s}}{(s-3)(s-\eta-2)(s+\eta-4)}. \qquad (3)$$

Из свойств дзета-функции Дедекинда $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ следует, что постоянный член ряда Эйзенштейна имеет простые полюса в точках $\frac{10}{3}$ и 4.

I.4. Мы полагаем:

$$\theta_V = \operatorname*{Res}_{s=\frac{10}{3}} E(\cdot, s; \theta_*); \ \theta_\Lambda = \operatorname*{Res}_{s=4} E(\cdot, s; \theta_*). \tag{4}$$

Функции (4) являются кубическими симплектическими метаплектическими формами в смысле определения данного в [7]; они, конечно, $\neq 0$.

I.5. Пусть F одна из функций (4) и $c_{\mu,\nu}(u,y,F)$ ее коэффициент Фурье, $\mu,\nu \in (\sqrt{-3})^{-3}\mathcal{O}$, $u,y \in \mathbb{R}_+^*$ смотрите (4) [7]. Эти коэффициенты, в принципе, могут быть вычислены на основе теорем 2 [7] и 8.I [4].

I.6. Проще всего найти коэффициенты Фурье с $\mu = \nu = 0$:

$$c_{0,0}(u,y,\theta_V) = 2^{-4} 3^{-\frac{1}{2}} \pi^4 \log 3 \ \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(0) \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(2)^{-2} u^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{8}{3}},$$

$$c_{0,0}(u,y,\theta_\Lambda) = 2^{-1} 3^{-\frac{5}{2}} 5^{-1} \cdot \pi^4 \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(4)^{-1} u^{-\frac{2}{3}} y^2. \tag{5}$$

I.7. Несколько сложнее вычисление коэффициентов Фурье с $\mu = 0$, $\nu \neq 0$:

$$c_{0,\nu}(u,y,\theta_V) = 2^{-5} 3^{-\frac{13}{2}} \pi^2 \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(2)^{-2} \tilde{Q}'(\nu,1) J_{0,\nu}(u,y;\tfrac{10}{3},\tfrac{2}{3}), \tag{6}$$

$$c_{0,\nu}(u,y,\theta_\Lambda) = 2^{-\frac{7}{3}} 5^{-1} \cdot \pi^{\frac{5}{3}} \Gamma(\tfrac{2}{3})^{-1} \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(2)^{-1} \frac{\overline{\tau(\nu)}}{|\nu|^{\frac{1}{3}}} J_{0,\nu}(u,y;4;\tfrac{2}{3}) \tag{7}$$

здесь: τ из теоремы 8.I[4]; $J_{0,\nu}(u,y,s,\frac{2}{3})$ определено в [7] для s с достаточно большой $\operatorname{Re} s$ и продолжается до мероморфной функции на $\mathbb{C}$, регулярной в точках $s = \frac{10}{3}, 4$; $\tilde{Q}'(\nu,\cdot)$ обозначает производную функции $\tilde{Q}(\nu,\cdot)$. Я не имею в настоящий момент явных формул для $\tilde{Q}'(\nu,1)$.

I.8. Существенно сложнее вычислить коэффициенты Фурье $c_{\mu,\nu}(u,y,\theta_V)$ и $c_{\mu,\nu}(u,y,\theta_\Lambda)$ с $\mu \neq 0$. Здесь, в частности, необходимо знать вычеты в точке $\frac{10}{3}$ функций $P(\nu,\cdot)$ определяемых рядом Дирихле

$$P(\nu,s) = \sum_{\substack{c \equiv 1 \pmod q \\ (c,\nu)=1}} \frac{S(\nu,c)^2}{|c|^s} \tag{8}$$

в области $\operatorname{Re} s > 4$ (и продолжающихся мероморфно на $\mathbb{C}$). Ряды (8) с $\nu = 1$ исследовались Паттерсоном [5]. В частном случае, когда

$\mu=\nu=1$, мы имеем просто

$$c_{1,1}(u,y,\theta_\nu)=2^{-3}3^{2}\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(2)^{-1}\overline{\operatorname{Res}_{s=\frac{10}{3}}P(1,s)}\,J_{\mu,\nu}\left(u,y,\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right), \tag{9}$$

где $J_{\mu,\nu}$ из [7]. Полные вычисления будут проведены позднее.

Литература

1. H.B a s s, J.M i l n o r and S.-J.S e r r e, "Solution of the congruence subgroup problem for SL_n $(n\geqslant 3)$ and Sp_{2n} $(n\geqslant 2)$ ", Inst.Hautes Etudes Sci.Publ.Math., No.33, 59-137 (1967).
2. D.A.K a z h d a n and S.J.P a t t e r s o n, "Metaplectic forms", Inst.Hautes Etudes Sci.Publ.Math., No.59, 35-142 (1984).
3. H.M a a s s, "Konstruktion ganzer Modulformen halbzahligar Dimension", Abh.Math.Semin.Univ.Hamb. 12, 133-162 (1937).
4. S.J.P a t t e r s o n, "On cubic analogue of the theta series I, II", J.Reine Angew.Math. 296, 125-161, 217-220, (1977).
5. S.J.P a t t e r s o n, "On Dirichlet series associated with cubic Gauss sums", J.Reine Angew.Math. 303/304, 102-143 (1978).
6. N.V.P r o s k u r i n "Automorphic functions and the Bass-Milnor-Serre homomorphism, I, II", Zap.Nauch.Sem.LOMI, 129, 85-126, 127-163, (1983). (Translation from Russian to English: Journal of Soviet Mathematics, vol.29, No.2, april 1985, 1150-1191, 1192-1218).
7. N.V.P r o s k u r i n , "On cubic symplectic metaplectic forms", LOMI Preprint E-1-87, 1987.