Л. А. АПАЙЧЕВА, В. Е. ГОРЛОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

В монографии [1] доказана равномерная и среднеквадратическая сходимость метода моментов для интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода.

В настоящей заметке для указанных уравнений исследуется сходимость и устанавливается оценка погрешности метода моментов в среднем с показателем p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Это позволило: 1) установить общие достаточные условия сходимости метода моментов; 2) доказать равномерную сходимость метода моментов как следствие сходимости в среднем с показателем p, $1 < p < \infty$; 3) доказать сходимость метода моментов в коэффициентах Фурье как следствие сходимости в среднем с показателем p, $1 < p < \infty$; 4) получить практически эффективные оценки погрешности приближенного решения.

Исследование метода моментов проводится по схеме, предложенной в работе [2] для метода механических квадратур.

В работе рассмотрена также применимость метода моментов к приближенному решению нелинейного интегрального уравнения и установлена оценка погрешности приближенного решения.

§ 1. Постановка задачи и вспомогательные сведения

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$Kx \equiv x(t) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(t, s)\, x(s)\, ds = y(t), \tag{1.1}$$

где $h(t, s)$ — интегрируемая с показателями p и q $(1/p + 1/q = 1)$ соответственно по первому и второму аргументам, 2π — периодическая по обоим аргументам функция, а $y(t)$ — 2π — периодическая, интегрируемая с показателем p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ функция.

Приближенное решение уравнения (1.1) будем искать в виде полинома

$$x_n(t)=\sum_{k=0}^{2n} c_k\,\varphi_k(t)\,, \tag{1.2}$$

где

$$\varphi_0(t)=1/\sqrt{2}\,,\ \varphi_{2i-1}(t)=\sin it,\ \varphi_{2i}(t)=\cos it,\ i=1,2,\ldots, \tag{1.3}$$

— тригонометрическая система функций. Неизвестные коэффициенты c_k, $k=\overline{0,2n}$, будем определять из системы алгебраических уравнений

$$c_j+\sum_{k=0}^{2n} c_k\,\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t,s)\,\varphi_k(s)\,\varphi_j(t)\,ds\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\,\varphi_j(t)\,dt\,,\ i=\overline{0,2n}\,. \tag{1.4}$$

Обозначим через $X=L_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ пространство 2π — периодических функций, суммируемых в среднем с показателем p и обычной нормой

$$\|x\|_{L_p}=\|x\|_p=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|x(t)|^p\,dt\right\}^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty;$$

$$\|x\|_{L\infty}=\|x\|_\infty=\operatorname*{vrai\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|x(t)|,\quad p=\infty.$$

Через $X_n\subset X$ будем обозначать множество всех тригонометрических полиномов степени не выше n $(n=1,2,\ldots)$ вида (1.2).

Пусть $S_nx=(S_nx)(t)$ — частная сумма ряда Фурье функции $x(t)\in L_p$:

$$(S_nx)(t)=\sum_{k=0}^{2n} x^k\,\varphi_k(t)\,,\quad n=1,2,\ldots, \tag{1.5}$$

где $x^k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\,\varphi_k(t)\,dt$ — коэффициенты Фурье функции $x(t)$ по системе (1.3).

Имеет место следующая (см., например, [3], [4])

Лемма 1. *Для любого p, $1<p<\infty$, и $x(t)\in L_p$ справедливы соотношения:*

$$\|S_nx\|_p\leqslant B_p\|x\|_p,\quad n=1,2,\ldots, \tag{1.6}$$

$$\|x-S_nx\|_p\to 0 \text{ при } n\to\infty, \tag{1.7}$$

где B_p — положительная постоянная, зависящая только от p; в частности, $B_2=1$.

Отметим, что в предельных случаях при $p=1$ и $p=\infty$ постоянная B_p уже зависит от n, а именно, справедлива следующая (см. [3], [4])

Лемма 2. *Для любых $n=1, 2, \ldots$ справедливо соотношение*

$$B_p = B_p(n) = 4\,\frac{\ln n}{\pi^2} + O(1), \quad p=1, \infty. \tag{1.8}$$

Лемма 3. *Пусть $x(t) \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, а $E_n(x)_p$ — ее наилучшее (в L_p) приближение тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $n=1, 2, \ldots$. Тогда равномерно относительно $n=1, 2, \ldots$ справедлива оценка*

$$\| x - S_n x \|_p \leqslant (1 + B_p) E_n(x)_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{1.9}$$

Заметим, что если $x(t)$ — непрерывная 2π — периодическая функция, а $E_n(x)$ — ее наилучшее равномерное приближение тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $n = 1, 2, \ldots$, то справедливо неравенство

$$E_n(x)_p \leqslant E_n(x), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.10}$$

Рассмотрим операторные уравнения вида

$$Kx = y \, (x, \, y \in X), \tag{1.11}$$

$$K_n x_n = y_n \, (x_n, y_n \in X_n), \tag{1.12}$$

где K и K_n — линейные операторы соответственно в X и X_n. Имеет место следующая (см., например, [5])

Лемма 4. *Пусть существует линейный оператор K^{-1} и $\alpha_n = \| K - K_n \| \, \| K^{-1} \| < 1$, $K - K_n$: $X_n \to X$. Тогда существует также линейный оператор K_n^{-1}, $\| K_n^{-1} \| \leqslant \| K^{-1} \| \, (1-\alpha_n)^{-1}$, и для решений x^* и x_n^* уравнений (1.11) и (1.12) справедлива оценка*

$$\| x^* - x_n^* \| \leqslant (\| y - y_n \| + \alpha_n \| y \|) \, \| K^{-1} \| \, (1 - \alpha_n)^{-1}.$$

Рассмотрим в пространстве $X = L_p$ уравнение

$$a(t)\, x(t) = y(t) \, (x, \, y \in X), \tag{1.13}$$

где $a(t)$ — непрерывная 2π — периодическая функция, удовлетворяющая условию Дини—Липшица.

Приближенное уравнение, соответствующее методу моментов для уравнения (1.13), имеет вид

$$S_n [a(t)\, x_n(t)] = (S_n y)(t) \, (x_n, \, S_n y \in X_n). \tag{1.14}$$

Используя метод, предложенный в [6], легко доказывается следующая

Лемма 5. *Пусть непрерывная 2π — периодическая функция $a(t)$ удовлетворяет условию Дини—Липшица и*

$$a(t) \neq 0, \; \varkappa = \operatorname{ind} a(t) = 0. \tag{1.15}$$

Тогда оператор $S_n a S_n : X_n \to X_n$ линейно обратим при достаточно больших $n \geqslant n_0$ и

$$\| [S_n a S_n]^{-1} \|_p \leqslant C_p,$$

где C_p — при $1 < p < \infty$ положительная постоянная, значение которой зависит от p и функции $a(t)$ и не зависит от n, а при $p = 1$ и ∞ величина C_p уже зависит от n и не зависит от p и имеет порядок

$$C_p = C_p(n) = O(\ln n).$$

Справедливо также неравенство

$$\| [S_n a S_n]^{-1} \|_C \leqslant C'_\infty = Q(\ln n).$$

При обосновании метода моментов для нелинейного уравнения нами будет использована следующая

Лемма 6[7]. *Пусть A — оператор в банаховом пространстве F, дифференцируемый по Фреше при $\| u - u_0 \| < r_0$, где u_0 — некоторая фиксированная точка F, $r_0 > 0$. Пусть существует линейный обратный оператор $[A'(u_0)]^{-1}$ и при некоторых r_1* и $\bar{q}$ $(0 < r_1 \leqslant r_0;\ 0 \leqslant \bar{q} < 1)$ *выполняются неравенства*

$$\gamma_1 = \sup_{\| u - u_0 \| \leqslant r_1} \| [A'(u_0)]^{-1} [A'(u) - A'(u_0)] \| \leqslant \bar{q}, \tag{1.16}$$

$$\gamma_2 = \| [A'(u_0)]^{-1} [A(u_0) - v] \| \leqslant r_1 (1 - \bar{q}). \tag{1.17}$$

Тогда нелинейное уравнение $A(u) = v$ имеет в шаре $\| u - u_0 \| \leqslant r_1$ пространства F единственное решение u^* и справедливы оценки

$$\gamma_2 (1 + \bar{q})^{-1} \leqslant \| u^* - u_0 \| \leqslant \gamma_2 (1 - \bar{q})^{-1}. \tag{1.18}$$

§ 2. Сходимость метода моментов

Обозначим через $S_n^t h = S_n^t h(t, s)$ частную сумму ряда Фурье порядка n $(n = 1, 2, \ldots)$ для функции $h(t, s)$ по переменной t, построенную по аналогии с формулой (1.5), и положим

$$\varepsilon = \varepsilon(n, p) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} | h - S_n^t h |^q \, d\,s \right)^{p/q} dt \right\}^{1/p}. \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Пусть оператор K, определяемый уравнением (1.1), имеет линейный обратный в пространстве $X = L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty) : \| K^{-1} \| = \| K^{-1} \|_p \leqslant A_p < \infty$. Пусть, кроме того, ядро $h(t, s)$ и правая часть $y(t)$ уравнения (1.1) таковы, что при $n \to \infty$*

$$\lim \varepsilon(n, p) = \lim \| y - S_n y \|_p = 0, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty^1. \tag{2.2}$$

Тогда при достаточно больших n, а именно, при

$$\alpha = \alpha(n, p) = \varepsilon(n, p) A_p < 1, \tag{2.3}$$

система алгебраических уравнений (1.4) имеет единственное решение $c_k = c_k^*$, $k = \overline{0,2n}$. *Приближенные решения*

$$x_n^*(t) = \sum_{k=0}^{2n} c_k^* \varphi_k(t) \tag{2.4}$$

сходятся по норме пространства X к точному решению $x^*(t)$ *уравнения (1.1), причем погрешность метода моментов может быть оценена неравенством*

$$\| x^* - x_n^* \|_p \leqslant \{\alpha \| y \|_p + \| y - S_n y \|_p\} \| K^{-1} \|_p (1 - \alpha)^{-1}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Интегральное уравнение (1.1) в пространстве X запишем в виде операторного уравнения

$$Kx \equiv x + Thx = y, \tag{2.6}$$

где $(Thx)(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(t, s) x(s) ds$.

Система (1.4) эквивалентна линейному операторному уравнению в подпространстве X_n:

$$K_n x_n \equiv x_n + T_n h x_n = S_n y, \tag{2.7}$$

где $(T_n h x_n)(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} S_n^t\, h(t, s) x_n(s) ds$.

В силу (2.6), (2.7), (2.1) и неравенства Гёльдера для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\| Kx_n - K_n x_n \|_p = \| Thx_n - T_n h x_n \|_p \leqslant \varepsilon(n, p) \| x_n \|_p, \tag{2.8}$$

т. е. $\| K - K_n \|_{X_n \to X} \leqslant \varepsilon(n, p)$. Отсюда, из соотношений (2.2), (2.3) и леммы 4, при достаточно больших n, точнее таких, что выполняется условие (2.3), следует теорема 1 и оценка (2.5).

Отметим, что при сделанных в § 1 предположениях относительно $h(t, s)$ и $y(t)$, в силу теоремы Фубини и леммы 1, условие (2.2) выполняется при любом p, $1 < p < \infty$. Таким образом, справедлива следующая

[1] Второе соотношение из (2.2) выполняется для любой функции $y \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ (см., например, лемму 1).

Теорема 2. *Пусть интегральное уравнение (1.1) однозначно разрешимо в* $X = L_p (1 < p < \infty)$. *Тогда при достаточно больших* n *система (1.4) также однозначно разрешима и приближенные решения (2.4) сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *уравнения (1.1) в среднем с показателем* p, $1 < p < \infty$.

Данной теореме можно придать более определенный вид в случае, когда $h(t, s)$ и $y(t)$ обладают хорошими структурными свойствами. Пусть ядро $h(t, s)$ и правая часть $y(t)$ уравнения (1.1) — непрерывные 2π — периодические функции. Обозначим через $E_n^t(h)$ наилучшее равномерное приближение функции $h(t, s)$ по переменной t тригонометрическими полиномами порядка не выше n $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда из теорем 1, 2 и леммы 3 следует

Теорема 3. *Пусть интегральное уравнение (1.1) однозначно разрешимо в* $L_p (1 < p < \infty)$. *Если* $h(t, s)$ *и* $y(t) \in C_{2\pi}$, *то при*

$$\beta = \beta(n, p) = (1 + B_p) A_p E_n^t(h) < 1 \tag{2.9}$$

система алгебраических уравнений (1.4) однозначно разрешима и приближенные решения $x_n^*(t)$ *сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *уравнения (1.1) в среднем с показателем* p, $1 < p < \infty$, *со скоростью*

$$\| x^* - x_n^* \|_p \leqslant (1 + B_p) \{ A_p \| y \|_p E_n^t(h) + E_n(y) \} \| K^{-1} \|_p (1 - \beta)^{-1}. \tag{2.10}$$

§ 3. Равномерная сходимость метода моментов

В этом параграфе нами будет доказана равномерная сходимость метода моментов двумя способами.

Теорема 4. *В условиях теоремы 3 погрешность приближенного решения уравнения (1.1) методом моментов в равномерной метрике может быть оценена неравенствами*

$$\| x^* - x_n^* \|_c \leqslant M(h) \| x^* - x_n^* \|_p + (1 + B_p) \{ \| x_n^* \|_p E_n^t(h) + E_n(y) \}, \tag{3.1}$$

$$\| x^* - x_n^* \|_c \leqslant (1 + B_p) \frac{M_1^2 M_2^2}{1 - \beta} \left(4 \frac{\ln n}{\pi^2} + O(1) \right) \{ E_n^t(h) + E_n(y) \}, \tag{3.2}$$

где $M(h) = \max\limits_{0 \leqslant t, s \leqslant 2\pi} |h(t, s)|$, $M_1 = \max \{1, \| y \|_c, M(h)\}$, $M_2 = \max \{1, \| K^{-1} \| \}$.

Следствие. *Если функции* $h(t, s)$ *(по аргументу* t*) и* $y(t)$ *удовлетворяют условию Дини—Липшица, то в условиях* *теоремы 3 приближенное решение (2.4) при $n \to \infty$ равномерно сходится к точному решению $x^*(t)$ уравнения (1.1) со скоростью*

$$\| x^* - x_n^* \|_c = O \{ (E_n^t(h) + E_n(y) \ln n \}. \tag{3.3}$$

Доказательство. В условиях теоремы 3 для решений $x^*(t)$ и $x_n^*(t)$ уравнений (2.6) и (2.7) в $C_{2\pi}$ получаем

$$\| x^* - x_n^* \|_c \leqslant \| y - S_n y \|_c + \| Thx^* - Thx_n^* \|_c + $$
$$+ \| Thx_n^* - T_n h x_n^* \|_c. \tag{3.4}$$

Используя леммы 1 и 2, для первого слагаемого правой части (3.4) находим

$$\| y - S_n y \|_C \leqslant (1 + B_\infty) E_n(y). \tag{3.5}$$

С помощью неравенства Гёльдера для второго слагаемого правой части (3.4) имеем

$$\| Thx^* - Thx_n^* \|_c \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | h(t, s) |^q ds \right)^{1/q} \| x^* - x_n^* \|_p \leqslant$$
$$\leqslant M(h) \| x^* - x_n^* \|_p. \tag{3.6}$$

Используя леммы 1 и 2 и неравенство Гёльдера, для третьего слагаемого правой части (3.4) получаем

$$\| Thx_n^* - T_n h x_n^* \|_c \leqslant (1 + B_\infty) E_n^t(h) \| x_n^* \|_p. \tag{3.7}$$

Теперь из соотношений (3.4)—(3.7) получаем оценку (3.1). Оценки (3.2) и (3.3) следуют из неравенств (2.9), (2.10) и леммы 2.

Заметим, что теорема 4 доказана при условии, что функции $h(t, s)$ и $y(t)$ непрерывны. Однако одной лишь непрерывности функций $h(t, s)$ и $y(t)$, что подтверждает следствие данной теоремы, недостаточно для равномерной сходимости метода моментов. Отметим также, что в условиях следствия из теоремы 4 равномерную сходимость метода моментов можно получить как следствие теоремы 1 в предельном случае при $p = \infty$. А именно, справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть функции $h(t, s)$ (непрерывная по обеим переменным) по переменной t и $y(t)$ удовлетворяют условию Дини—Липшица. Если уравнение (1.1) однозначно разрешимо в $C_{2\pi}$, то при*

$$\gamma = \gamma(n, \infty) = (1 + B_\infty) \| K^{-1} \|_c E_n^t(h) < 1 \tag{3.8}$$

система (1.4) однозначно разрешима и приближенные реше-

ния $x_n^*(t)$ равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (1.1) со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_c \leqslant (1 + B_\infty) M_3 \{E_n^t(h) + E_n(y)\} \|K^{-1}\|_c (1-\gamma)^{-1}, \quad (3.9)$$

где $M_3 = \max\{1, \|y\|_c \|K^{-1}\|_c\}$.

Доказательство. В условиях теоремы любое измеримое ограниченное решение уравнения (1.1) удовлетворяет условию Дини—Липшица. Поэтому $\|x^* - x_n^*\|_\infty = \underset{0\leqslant t\leqslant 2\pi}{v\,\mathrm{rai}\,\sup} \times$ $\times |x^*(t) - x_n^*(t)| = \|x^* - x_n^*\|_c$. Тогда при $p = \infty$ с помощью лемм 1 и 2 для (2.1) находим

$$\varepsilon(n, \infty) = \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(t, s) - S_n^t h(t, s)| \, ds \leqslant (1 + B_\infty) E_n^t(h). \quad (3.10)$$

Отсюда и из соотношений (3.8), (3.5), используя лемму 4, получим (3.9).

§ 4. Сходимость метода моментов в коэффициентах Фурье

Каждой 2π-периодической функции $\varphi(t) \in X$ поставим в соответствие $(2n+1)$-мерный вектор $\overline{\varphi} = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^{2n})$, где φ^k $(k = \overline{0, 2n})$— коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$ по системе (1.3). Норму в пространстве m_{2n+1} зададим следующим образом:

$$\|\overline{\varphi}\|_{m_{2n+1}} = \max_{0\leqslant k\leqslant 2n} |\varphi^k| = \|\varphi\|_{\overline{c}_n}.$$

Имеет место следующая

Теорема 6. *В условиях теоремы 2 метод моментов сходится в том смысле, что*

$$\|x^* - x_n^*\|_{\overline{c}_n} \to 0, \text{ при } n \to \infty. \quad (4.1)$$

Если, кроме того, функции $h(t, s)$ и $y(t) \in C_{2\pi}$, то погрешность приближенного решения уравнения (1.1) методом моментов может быть оценена неравенствами:

$$\|x^* - x_n^*\|_{\overline{c}_n} \leqslant M' \|x^* - x_n^*\|_p, \quad 1 < p < \infty; \quad (4.2)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{\overline{c}_n} \leqslant (1 + B_p) M' M_2 M_4 \{E_n^t(h) + E_n(y)\} \times$$
$$\times \|K^{-1}\|_p (1-\beta)^{-1}, \quad (4.3)$$

где $M' = \min\{2, M(h)\}$, $M_4 = \max\{1, \|y\|_c\}$, M_2 и *$M(h)$ оп-*

ределены в теореме 4, а β — в теореме 3.

Следствие. *Равномерно относительно t справедлива оценка*

$$|x^*(t) - x_n^*(t)| \leqslant B_\infty \|x^* - x_n^*\|_{\bar{C}_n} + (1 + B_\infty) E_n(x^*). \quad (4.4)$$

Доказательство. В условиях теоремы для любого j, $0 \leqslant j \leqslant 2n$, так же, как и в (3.4), получаем

$$|x^{*j} - x_n^{*j}| = |x^{*j} - c_j^*|| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} (x^*(t) - x_n^*(t))\varphi_j(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|x^* - x_n^*\|_p,$$

$$|x^{*j} - c_j^*| = |(Thx^* - T_n hx_n^*)^j| \leqslant \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t, s)\varphi_j(t)\,dt\right|^q ds\right\}^{1/q} \times$$

$$\times \|x^* - x_n^*\|_p. \quad (4.5)$$

Отсюда и из теоремы 2 следует справедливость (4.1).

Пусть теперь $h(t, s)$ и $y(t) \in C_{2\pi}$. Тогда из неравенств (4.5) автоматически следует оценка (4.2), а из нее и теоремы 3, как и при доказательстве неравенства (3.2), следует оценка (4.3). Оценка (4.4) получается с помощью лемм 1, 2 и полинома наилучшего равномерного приближения для решения $x^*(t)$ уравнения (1.1).

§ 5. О скорости сходимости метода моментов

Из доказанных выше теорем и прямых теорем конструктивной теории функций можно сделать следующий вывод: чем лучше структурные свойства коэффициентов уравнения (1.1), то, во-первых, тем меньше номер $n = n_1$, начиная с которого система (1.4) однозначно разрешима, и, во-вторых, тем меньше погрешность приближенного решения уравнения (1.1) как в $L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$, так в $C_{2\pi}$ и в $\bar{C}_n$.

Проиллюстрируем этот факт на следующем примере. Пусть функции $h(t, s)$ (непрерывная по обоим аргументам) по аргументу t и $y(t)$ имеют r — непрерывных производных, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\alpha (0 < \alpha \leqslant 1)$. Обозначим через $a_1 = H(h_t^{(r)}; \alpha)$ и $a_2 = H(y^{(r)}; \alpha)$ постоянные Гёльдера (при данном α) соответствующих производных функций $h(t, s)$ и $y(t)$. Тогда из теорем Джексона, оценок Н. П. Корнейчука [8] и теорем 3, 4 и 6 следует

Теорема 7. *Пусть $y(t)$ и $h(t, s)$ (непрерывная по s) по переменной t принадлежат $H_\alpha^{(r)}[0,2\pi]$ $(r \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$. Если интегральное уравнение (1.1) однозначно разрешимо в $L_p (1 < < p < \infty)$, то при*

$$\delta = \delta(n, p) = \frac{3}{2} a_1 (1 + B_p) \|K^{-1}\|_p n^{-r-\alpha} < 1$$

система (1.4) однозначно разрешима и приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$:

1) в среднем с показателем p $(1 < p < \infty)$ со скоростью

$$\| x^* - x_n^* \|_p \leqslant \frac{3}{2} (1 + B_p) M_2 M_4 (a_1 + a_2) (1 - \delta)^{-1} \| K^{-1} \|_p n^{-r-\alpha};$$

2) в коэффициентах Фурье со скоростью

$$\| x^* - x_n^* \|_{\overline{c}_n} \leqslant 3 (1 + B_p) M_2 M_4 (a_1 + a_2) (1 - \delta)^{-1} \| K^{-1} \|_p n^{-r-\alpha};$$

3) равномерно со скоростью

$$\| x^* - x_n^* \|_c \leqslant \frac{3}{2} (1 + B_\infty)(1 + B_p) M_1^2 M_2 (a_1 + a_2) (1 - \delta)^{-1} \| K^{-1} \|_p n^{-r-\alpha}.$$

§ 6. Сходимость метода моментов для уравнений, приводящихся к уравнениям второго рода

В этом параграфе результаты предыдущих параграфов переносятся на следующее интегральное уравнение:

$$Kx \equiv a(t)\, x(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t, s)\, x(s)\, ds = y(t), \tag{6.1}$$

где $a(t)$ — непрерывная 2π — периодическая функция, удовлетворяющая условиям леммы 5, а $h(t, s)$ и $y(t)$ такие же, что и в уравнении (1.1).

Приближенное решение уравнения (6.1) будем искать в виде полинома (1.2), а неизвестные коэффициенты c_k, $k = \overline{0, 2n}$, будем определять из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{2n} c_k \frac{1}{\pi} \int^{2\pi} a(t)\, \varphi_k(t)\, \varphi_j(t)\, dt + \sum_{k=0}^{2n} c_k \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t, s)\, \varphi_k(s)\, \varphi_j(t)\, ds\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t)\, \varphi_j(t)\, dt, \quad j = \overline{0, 2n}. \tag{6.2}$$

Обозначим через $k_n(t, s)$ тригонометрический полином наилучшего приближения в L_p по переменной t, степени не выше $n (n = 1, 2, \ldots)$ для функции $h(t, s)/a(t)$ и положим

$$\varepsilon' = \varepsilon'(n, p) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\int_9^{2\pi} \left| \frac{h(t, s)}{a(t)} - k_n(t, s) \right|^q ds \right|^{p/q} dt \right\}^{1/p}. \tag{6.3}$$

Теорема 8. *Пусть функция $a(t)$ удовлетворяет условиям леммы 5 и оператор K, определяемый уравнением (6.1),* *имеет линейный обратный в пространстве $X = L_p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$: $\|K^{-1}\|_p < \infty$. Пусть, кроме того, ядро $h(t, s)$ и правая часть $y(t)$ уравнения (6.1) таковы, что при $n \to \infty$*

$$\lim B_p C_p \varepsilon'(n, p) = \lim B_p C_p E_n(y/a)_p = 0, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{6.4}$$

Тогда при достаточно больших n система алгебраических уравнений (6.2) имеет единственное решение $c_k = c_k^*$, $k = \overline{0,2n}$, и приближенные решения (2.4) сходятся по норме пространства X к точному решению $x^*(t)$ уравнения (6.1), причем погрешность метода моментов может быть оценена неравенством

$$\|x^* - x_n^*\|_p \leqslant M_5 C_p \cdot B_p \{\varepsilon'(n, p) + E_n(y/a)_p\} \|K^{-1}\|_p. \tag{6.5}$$

Доказательство. Уравнение (6.1), в силу условия (1.15), эквивалентно следующему операторному уравнению в X:

$$\widetilde{K}x \equiv x + Tkx = y/a, \tag{6.6}$$

где

$$(Tkx)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(t, s)}{a(t)} x(s)\, ds.$$

Для норм обратных операторов K и $\widetilde{K}$ справедливы неравенства

$$\|\widetilde{K}^{-1}\|_p \leqslant \|a\|_C \|K^{-1}\|_p, \quad \|K^{-1}\|_p \leqslant \|1/a\|_C \|\widetilde{K}^{-1}\|_p. \tag{6.7}$$

Далее рассмотрим следующее вспомогательное уравнение в X_n:

$$\widetilde{K}_n x_n \equiv x_n + Tk_n x_n = y_n, \tag{6.8}$$

где $y_n(t)$ — тригонометрический полином наилучшего приближения в L_p степени не выше $n\,(n = 1, 2, \ldots)$ для функции $y(t)/a(t)$.

Используя условие (6.4) и рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, для уравнений (6.6) и (6.8) получаем, что при достаточно больших n, а именно, при

$$\alpha' = \alpha'(n, p) = \varepsilon'(n, p) \|\widetilde{K}^{-1}\|_p < 1, \tag{6.8$'$}$$

следует линейная обратимость операторов $\widetilde{K}_n : X_n \to X_n$, причем

$$\|\widetilde{K}_n^{-1}\|_p \leqslant \|\widetilde{K}^{-1}\|_p (1 - \alpha')^{-1},$$

и для решений $x^*(t)$ и $\widetilde{x}_n^*(t)$ уравнений (6.6) и (6.8) справедлива оценка

$$\|x^* - \widetilde{x}_n^*\|_p \leqslant \{\alpha' \|y\|_p + E_n(y)_p\} \|\widetilde{K}^{-1}\|_p (1 - \alpha')^{-1}. \tag{6.9}$$

Используя лемму 5 и начиная с n_0 такого, что операторы $S_n a\ S_n: X_n \to X_n$ линейно обратимы, выберем n_3 так, чтобы для всех $n \geqslant n_3$ выполнялось неравенство (6.8′). Тогда уравнение (6.7) эквивалентно операторному уравнению, заданному в X_n

$$\overline{K}_n x_n \equiv S_n a\, x_n + S_n a\, T\, k_n x_n = S_n a\, y_n\,, \tag{6.10}$$

а для обратного оператора $\overline{K}_n^{-1}$ справедлива оценка

$$\|\overline{K}_n^{-1}\|_p \leqslant C_p \|\widetilde{K}_n^{-1}\|_p. \tag{6.11}$$

Систему уравнений (6.2) запишем в виде эквивалентного ей операторного уравнения, заданного в подпространстве X_n

$$K_n x_n \equiv S_n a\, x_n + T_n h\, x_n = S_n y. \tag{6.12}$$

Используя неравенство Гёльдера, леммы 1, 2 и обозначение (6.3), для любого $x_n(t) \in X_n$ находим

$$\|\overline{K}_n x_n - K_n x_n\|_p = \|S_n a\, T\, k_n x_n - T_n h\, x_n\|_p \leqslant B_p \|a\|_C\, \varepsilon'(n, p) \times \\ \times \|x_n\|_p,$$

откуда, для достаточно больших n, в силу условия (6.4), будет выполняться неравенство

$$\alpha'' = \alpha'''(n, p) = C_p B_p \|a\|_c\, \varepsilon'(n, p) \|\widetilde{K}_n^{-1}\|_p < 1.$$

Тогда из леммы 4, для достаточно больших n, следует линейная обратимость операторов $K_n: X_n \to X_n$, причем

$$\| K_n^{-1}\| \leqslant \|\overline{K}_n^{-1}\|$$

и для решений $\widetilde{x}_n^*(t)$ и $x_n^*(t)$ уравнений (6.10) и (6.12) получаем

$$\|\widetilde{x}_n^* - x_n^*\|_p \leqslant \{\alpha'' \|S_n a\, y_n\|_p + B_p \|a\|_C E_n(y)_p\} \|\overline{K}_n^{-1}\| (1 - \alpha'')^{-1}.$$

Отсюда и из (6.9) получаем оценку (6.5).

Заметим, что при сделанных предположениях относительно исходных данных уравнения (6.1), в силу теоремы Фубини и леммы 1, условие (6.4) выполняется при любом p, $1 < p < \infty$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть функция $a(t)$ удовлетворяет условиям леммы 5 и интегральное уравнение (6.1) однозначно разрешимо в $X = L_p$ $(1 < p < \infty)$. Тогда при достаточно больших n система (6.2) однозначно разрешима и приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (6.1) в среднем с показателем p, $1 < p < \infty$.*

Если исходные данные уравнения (6.1) обладают хорошими структурными свойствами, то данной теореме, аналогично теореме 3, можно придать более определенный вид.

Теорема 10. *Пусть функция $a(t)$ удовлетворяет условиям леммы 5 и интегральное уравнение (6.1) однозначно разрешимо в $X = L_p (1 < p < \infty)$. Если $h(t, s)$ и $y(t) \in C_{2\pi}$, то система алгебраических уравнений (6.2) при достаточно больших n однозначно разрешима и приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (6.1) в среднем с показателем p, $1 < p < \infty$, со скоростью*

$$\| x^* - x_n^* \|_p \leqslant M_6 C_p B_p \{E_n^t (h/a) + E_n (y/a)\} \| K^{-1} \|_p. \tag{6.13}$$

В следующей теореме установлена равномерная сходимость метода моментов как следствие сходимости в среднем с показателем p, $1 < p < \infty$.

Теорема 11. *В условиях теоремы 10 погрешность приближенного решения уравнения (6.1) методом моментов в равномерной метрике может быть оценена неравенством*

$$\| x^* - x_n \|_C \leqslant M (h/a) \| x^* - x_n^* \|_p + (1 + C'_\infty B_\infty \| a \|_C) \{ \| x_n^* \|_p E_n^t (h/a) + \\ + E_n (y/a) \}. \tag{6.14}$$

Следствие. *Если функции $a(t)$, $h(t, s)$ (по аргументу t) и $y(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, то в условиях теоремы 10 приближенные решения $x_n^*(t)$ при $n \to \infty$ равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$, уравнения (6.1) со скоростью*

$$\| x^* - x_n^* \|_C = O \{(E_n^t (h/a) + E_n (y/a)) \ln^2 n\}. \tag{6.15}$$

Доказательство. В условиях теоремы 3 для достаточно больших n, для решений $x^*(t)$ и $x_n^*(t)$ уравнений (6.1) и (6.12) в $C_{2\pi}$ получаем

$$\| x^* - x_n^* \|_C \leqslant \| y/a - y_n \|_C + \| [S_n a S_n]^{-1} S_n a (y/a - y_n) \|_C + \| Tkx^* - \\ - Tkx_n^* \|_C + \| Tkx_n^* - T_n kx_n^* \|_C + \| [S_n a S_n]^{-1} S_n a (Tkx^* - T_n kx_n^*) \|_C. \tag{6.16}$$

Используя леммы 1,2 и 5, для первого и второго слагаемых правой части (6.16) находим

$$\| y/a - y_n \|_C + \| [S_n a S_n]^{-1} S_n a (y/a - y_n) \|_C \leqslant \\ \leqslant (1 + C'_\infty B_\infty \| a \|_C) E_n (y/a). \tag{6.17}$$

Для третьего слагаемого правой части (6.16) так же, как и в (3.6), получаем

$$\| Tkx_n^* - Tkx^* \|_C \leqslant M (h/a) \| x^* - x_n^* \|_p. \tag{6.18}$$

Используя леммы 1, 2 и 5, для четвертого и пятого слагаемых правой части (6.16) находим

$$\| Tkx_n^* - T_n kx_n^* \|_C + \| [S_n a S_n]^{-1} S_n a (Tkx_n^* - T_n kx_n^*) \|_C \leqslant \\ \leqslant (1 + C'_\infty B_\infty \| a \|_C) \| x_n^* \|_p E_n^t (h/a). \tag{6.19}$$

Теперь из соотношений (6.16)—(6.19) получаем оценку (6.14). Оценка (6.15) следует из оценки (6.14) и лемм 1, 2 и 5.

В следующей теореме установлена равномерная сходимость метода моментов как следствие теоремы 8 в предельном случае при $p=\infty$.

Теорема 12. *Пусть функция $a(t)$ удовлетворяет условиям леммы 5. Пусть также функции $a(t)$, $h(t, s)$ (непрерывная по обоим аргументам) по аргументу t и $y(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера. Если уравнение (6.1) однозначно разрешимо в $C_{2\pi}$, то при достаточно больших n система (6.2) однозначно разрешима и приближенные решения $x_n^*(t)$ равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (6.1) со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_C \leqslant M_7 C_\infty B_\infty \|K^{-1}\|_C \{E_n^t(h/a) + E_n(y/a)\}.$$

Следствие. *В условиях теоремы операторы $K_n: X_n \to X_n$ при достаточно больших n линейно обратимы, причем*

$$\|K_n^{-1}\|_C \leqslant O(\ln n).$$

Доказательство теоремы и следствия проводится аналогично доказательству теоремы 5 с использованием теоремы 8 и лемм 1—5.

§ 7. Обоснование метода моментов для нелинейного интегрального уравнения

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение вида

$$A(x) \equiv \Phi\left[t;\ x(t);\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t, s;\ x(s))\,ds\right] = y(t), \tag{7.1}$$

где $y(t)$, $g(t, s;\ u)$ и $\Phi[t, u, v]$ $(|u|, |v| < \infty)$ — известные непрерывные функции, 2π — периодические по аргументам t и s.

Приближенное решение уравнения (7.1) ищем в виде полинома (1.2), а неизвестные коэффициенты c_k, $k=\overline{0,2n}$, определяем из системы уравнений

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi\left[t;\ x_n(t);\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t, s;\ x_n(s))\,ds\right] \varphi_j(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\,\varphi_j(t)\,dt,\ \ j=\overline{0,2n}. \tag{7.2}$$

Обоснование метода Галеркина для нелинейного уравнения вида

$$x = T(x),$$

где T — нелинейный оператор в банаховом пространстве E, определенный и непрерывный на некотором непустом открытом множестве $\Omega \in E$, имеется в работах [9, 10] (см. также [7]).

Обоснование вычислительной схемы метода моментов (7.1), (1.2), (7.2) при определенных ограничениях на функции Φ и g сводится к обоснованию метода моментов для линейного интегрального уравнения (6.1), где

$$a(t)=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right|_{x=\bar{x}(t)},\quad h(t,s)=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right|_{x=\bar{x}(t)}\cdot\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x=\bar{x}(t)},$$

а $\bar{x}(t)$ — некоторая фиксированная функция.

Мы укажем основные этапы обоснования схемы (7.1), (1.2), (7.2).

1) Пусть Φ, g и y удовлетворяют условию Гёльдера по всем переменным. Тогда точное уравнение (7.1) эквивалентно операторному уравнению в $X=C_{2\pi}$

$$A(x)\equiv\Phi[t;\,x;\,Tg(x)]=y, \tag{7.1'}$$

где A — нелинейный оператор в X. Система (7.2) эквивалентна следующему операторному уравнению в $X_n\subset X$:

$$A_n(x_n)\equiv S_n\Phi[t;\,x_n;\,Tg(x_n)]=S_ny, \tag{7.2'}$$

где A_n — нелинейный оператор в X_n.

2) Пусть Φ'_u, Φ'_v и g'_u удовлетворяют условию Гёльдера по всем переменным. Тогда оператор A в X дифференцируем по Фреше и оператор $A'(\bar{x})\,(\bar{x}\in X)$ определяется левой частью уравнения (6.1). Аналогично, оператор A_n в X_n дифференцируем по Фреше и оператор $A'_n(\bar{x}_n)$ определяется левой частью уравнения (6.12), т. е. производная Фреше в точке $\bar{x}_n\in X_n$ приближенного оператора A_n метода моментов совпадает с приближенным оператором метода моментов для производной Фреше точного оператора, вычисленной в той же точке $\bar{x}_n\in X_n$.

3) При выполнении условий пунктов 1) и 2) производные Фреше $A'(\bar{x})$ в X и $A'_n(\bar{x}_n)$ в X_n удовлетворяют условиям

$$\|A'(\bar{x})-A'(\bar{\bar{x}}_n)\|_C\leqslant M_8\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|_C^{\beta}(\bar{x},\ \bar{\bar{x}}\in X),$$

$$\|A'_n(\bar{x}_n)-A'_n(\bar{\bar{x}}_n)\|_C\leqslant M_9\|\bar{x}_n-\bar{\bar{x}}_n\|_C^{\beta}\cdot\ln n\,(\bar{x}_n,\ \bar{\bar{x}}_n\in X_n),\ 0<\beta\leqslant 1. \tag{7.3}$$

4) Пусть уравнение (7.1) в некотором шаре из пространства $X=C_{2\pi}$ имеет единственное решение $x^*(t)$, удовлетворяющее условию Гёльдера с показателем, $0<\nu\leqslant 1$. Тогда существует такой элемент $x_n^0\in X_n$, что равномерно относительно n имеем

$$\|x^*-x_n^0\|_C\leqslant M_{10}n^{-\nu}.$$

Пусть также функция $a(t)=\Phi'_u|_{x=x^*(t)}$ удовлетворяет условию (1.15) леммы 5 и оператор $A'(x^*)$ линейно обратим в $X=C_{2\pi}$. Тогда в силу (7.3) и теоремы Банаха при всех достаточно больших n линейно обратимы в X также операторы $A'(x_n^0)$ и $\|[A'(x_n^0)]^{-1}\|_C \leqslant M_{11}$.

5) Из пункта 4) и § 6 следует линейная обратимость операторов $A'_n(x_n^0)$ при достаточно больших n, причем $\|[A'_n(x_n^0)]^{-1}\|_C \leqslant M_{12}\ln n$.

6) Для достаточно малых $r_1 \leqslant r$ и достаточно больших n находим

$$\gamma_1 = \sup_{\|x_n - x_n^0\|_C \leqslant r_1} \|[A'_n(x_n^0)]^{-1}[A'_n(x_n) - A'_n(x_n^0)]\|_C \leqslant M_{13} r_1 \ln^2 n = \bar{q} < 1,$$

$$\gamma_2 = \|[A'_n(x_n^0)]^{-1}[A_n(x_n^0) - S_n y]\|_C \leqslant M_{14} n^{-\nu} \ln^2 n \leqslant r_1(1-\bar{q}),\ n > n_4.$$

7) Теперь из леммы 6 следует, что в некоторой окрестности точки $x_n^0(t)$ (при достаточно больших n) уравнение (7.2′) имеет единственное решение $x_n^*(t)$ и

$$\|x_n^* - x_n^0\|_C \leqslant M_{15} n^{-\nu} \ln^2 n.$$

8) Погрешность приближенного решения уравнения (7.1) методом моментов оценивается следующим образом:

$$\|x^* - x_n^*\|_C \leqslant M_{16} n^{-\nu} \ln^2 n.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 13. *Пусть выполнены следующие условия: а) функции Φ, Φ'_u, Φ'_v, g, g'_u и y удовлетворяют условию Гёльдера; б) нелинейное уравнение (7.1) в некотором шаре из $C_{2\pi}$ имеет единственное решение $x^*(t)$, удовлетворяющее условию Гёльдера с показателем ν, $0<\nu\leqslant 1$; в) функция $a(t) = \Phi'_u|_{x=x^*(t)}$ удовлетворяет условию (1.15); г) оператор $A'(x^*)$ линейно обратим в $C_{2\pi}$.*

Тогда в некоторой окрестности точки $\bar{x}^* = (x^{*0}, \dots, x^{*2n})$ при всех достаточно больших n система нелинейных уравнений (7.2) имеет единственное решение $c_k = c_k^*$, $k=\overline{0,2n}$, и погрешность метода оценивается неравенством

$$\|x^* - x_n^*\|_C \leqslant M_{16} n^{-\nu} \ln^2 n,\ 0 < \nu \leqslant 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

2. Габдулхаев Б. Г. К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур. — Изв. вузов. Матем., 1972, № 12, с. 23—39.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., „Мир“, 1965, т. 1.

4. Т и м а н А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.

5. Г а б д у л х а е в Б. Г. Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, I. — Изв. вузов, Матем., 1971, № 11, с. 33—44.

6. B a x t e r G. A norm inequality for a „finite-section“ Wiener Hopf equations, Illinois J. Math. 7, 1963, p. 97—103.

7. К р а с н о с е л ь с к и й М. А., В а й н и к к о Г. М., З а б р е й к о П. П., Р у т и ц к и й Я. Б., С т е ц е н к о В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., „Наука“, 1969.

8. К о р н е й ч у к Н. П. О наилучшем приближении непрерывных функций. — ИАН СССР. Сер. матем., 1963, т. 27, № 1, с. 29—44.

9. К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.

10. В а й н и к к о Г. М. Возмущенный метод Галеркина и общая теории приближенных методов для нелинейных уравнений. — Ж. выч. матем. я мат. физ., 1967, т. 7, № 4.